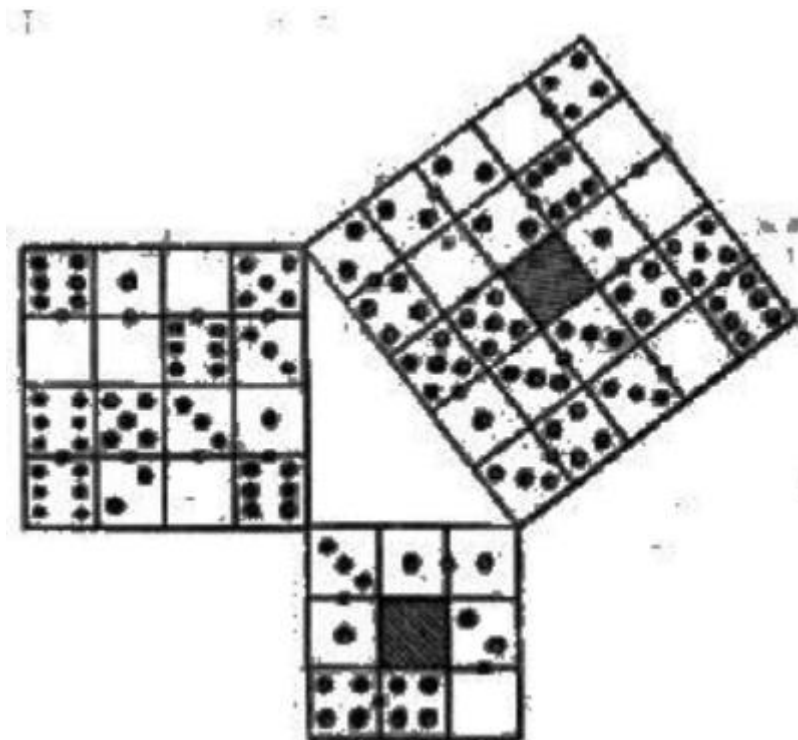


80 - El teorema de Pitágoras

81. Con fichas de dominó se puede dar otra comprobación vistosa del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo cuyos lados están en la proporción de 3 : 4 : 5. La figura 37 es suficientemente explícita.



Breu descripció del material

- Joc de dominó

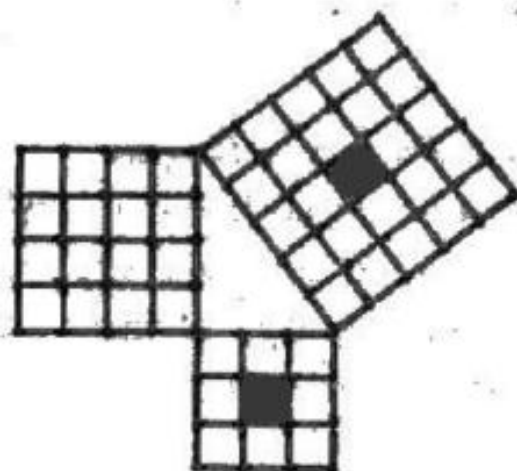
Continguts que es poden tractar

- Teorema de Pitàgores
- Ternes pitagòriques
- Combinatòria

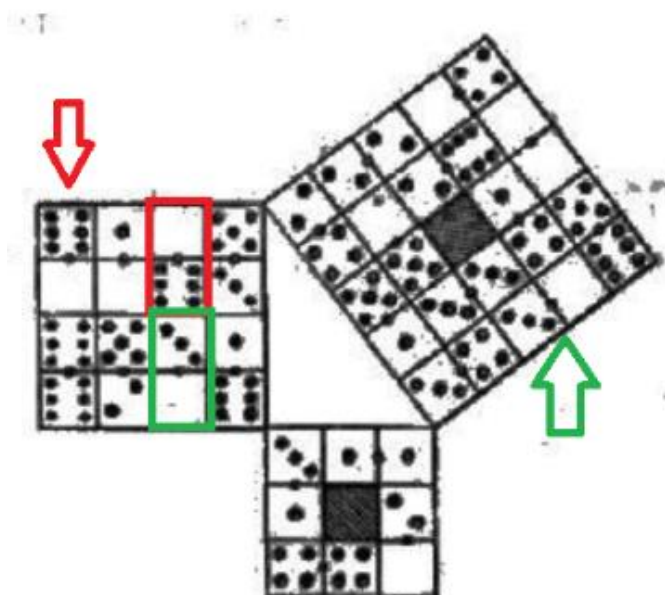
Proposta d'aplicació didàctica

Aquesta proposta apareix dintre del conjunt d'activitats del primer capítol del llibre Ciència recreativa de Josep Estalella, exactament de la 76 a la 81, dedicades a la demostració i comprovació del Teorema de Pitàgores.

En l'activitat 80 es proposa fer una comprovació de l'equivalència de les àrees emplenant amb peces de dòmino els quadrats sobre la hipotenusa i sobre els catets del triangle rectangle de costats 3, 4 i 5.



Si analitzem la figura 37 del llibre es veu que necessitem 24 peces per cobrir els tres quadrats (per al quadrat de costat 5 necessitem 12 peces de dòmino i ens queda un quadrat petit buit, per al quadrat de costat 3 necessitem 4 peces de dòmino i ens queda també un quadrat petit buit i finalment per al quadrat de costat 4 necessitem 8 peces de dòmino).



Per altra banda podem observar que hi ha dues peces repetides, el que no té més rellevància per comprovar l'equivalència d'àrees.

A partir de la proposta del Josep Estalella ens venen al cap diferents preguntes que ens permeten ampliar o estirar l'activitat:

1. De quantes maneres diferents podem triar les 24 peces del dòmino per realitzar l'activitat sense repetir cap peça?
2. Podríem emplenar els quadrats sense peces repetides de manera que la suma dels punts dels quadrats de costats 3 i 4 unitats fos igual a la suma de punts del quadrat de costat 5 unitats? Es pot aconseguir de manera que, tal com passa amb el joc del dòmino, tota part d'un peça quan la col·loquem s'hagués de tocar com a mínim amb una altra del mateix valor?
3. Podríem emplenar els quadrats sense peces repetides de manera que la suma de punts de cada quadrat conformi una terna pitagòrica? Es pot aconseguir de manera que, tal com passa amb el joc del dòmino, tota part d'un peça quan la col·loquem s'hagués de tocar com a mínim amb una altra del mateix valor?

Totes elles són una invitació a fer una treball d'exploració que es convertirà en una vertadera aventura matemàtica. Així que som-hi!

Pregunta 1: De quantes maneres podem triar les 24 peces del dòmino per realitzar l'activitat sense repetir cap peça?

Donat que el dòmino de 6 punts té 28 peces i n'hem de triar 24 sense repetir-ne cap, es tracta d'una combinació sense repetició de 28 elements agafats en grups de 24. Aquesta situació és equivalent a triar les 4 que deixarem fora, per tant es tracta d'una combinació de 28 elements agafats en grups de 4:

$$C_{24}^{28} = C_4^{28} = \binom{28}{4} = \frac{28!}{4!24!} = 20475 \text{ maneres}$$

Com podem veure tenim moltes i moltes maneres diferents de triar les peces que emprarem, sense tenir en compte de moment la posterior posició de cada peça dintre dels quadrats i la seva orientació.

Potser podem restringir una mica la situació i decidir que només deixarem fora fitxes dobles.

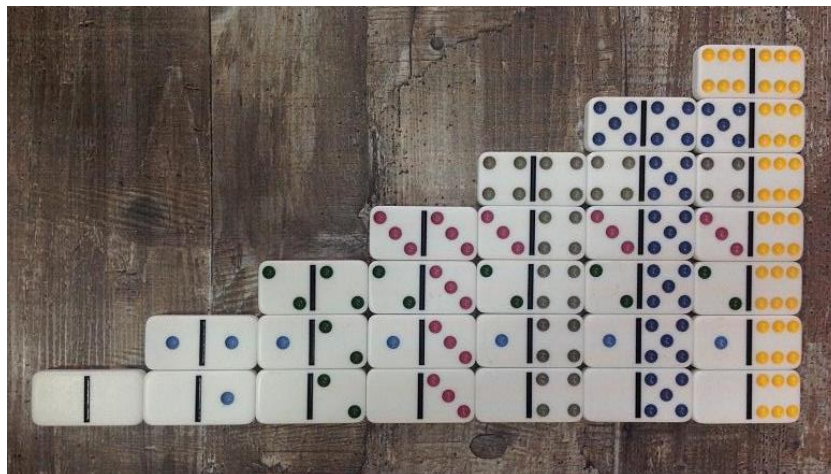


Per tant ara es tracta de triar 4 fitxes entre les 7 fitxes dobles del dòmino. Com abans, es tracta d'una combinació sense repetició de 7 elements agafats en grups de 4:

$$C_4^7 = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = 35 \text{ maneres}$$

Pregunta 2: Podríem emplenar els quadrats sense peces repetides de manera que la suma dels punts dels quadrats de costats 3 i 4 unitats fos igual a la suma de punts del quadrat de costat 5 unitats?

Una primera acció per d'abordar la situació ens porta a calcular quants punts sumen totes les peces d'un dòmino de 6 punts:



Si ens fixem en la imatge cada valor apareix 8 vegades el que ens dona un total de:

$$8 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 8 \cdot 21 = 168 \text{ punts}$$

Casualment coincideix amb que 6 punts per 28 peces també ens dona 168 punts? Podem intentar raonar quina és la causa?

Si restringim el problema a treure 4 peces dobles, podem mirar quants de punts ens poden quedar després d'haver tret cadascuna de les 35 possibles combinacions de 4 fitxes dobles.

Suma de les peces que traiem	Combinacions de 4 peces dobles que podem treure	Punts restants
12	00,11,22,33	156
14	00,11,22,44	154
16	00,11,22,55 00,11,33,44	152
18	00,11,22,66 00,11,33,55 00,22,33,44	150
20	00,11,33,66 00,11,44,55 00,22,33,55 11,22,33,44	148
22	00,22,33,66 00,11,44,66 00,22,44,55 11,22,33,55	146
24	00,11,55,66 00,22,44,66 11,22,33,66 00,33,44,55 11,22,44,55	144
26	00,22,55,66 00,33,44,66 11,22,44,66 11,33,44,55	142
28	00,33,55,66 11,22,55,66 11,33,44,66 22,33,44,55	140
30	00,44,55,66 11,33,55,66 22,33,44,66	138
32	11,44,55,66 22,33,55,66	136
34	22,44,55,66	134
36	33,44,55,66	132

Però es podrà fer sempre, és a dir, sempre podem trobar una partició disjunta de les 24 peces que compleixi que la suma de punts de les fitxes del quadrat sobre la hipotenusa sigui igual a la suma de punts de les fitxes dels quadrats sobre els catets?

Estudiarem el cas particular 00,22,44,66:



Si traiem aquestes 4 peces, que sumen 24 punts, ens quedaran 144 punts per repartir i per tant haurem de fer 3 subconjunts de peces que anomenarem Q_3 , Q_4 i Q_5 per emplenar els tres quadrats (amb 4, 8 i 12 peces respectivament) de manera que compleixin que $SQ_3 + SQ_4 = SQ_5$

Aquesta condició en la distribució ens comporta que la suma de punts total ha de ser parell per poder fer dos subconjunts de 12 peces que sumin el mateix nombre de punts. Un d'aquests subconjunts serà el Q_5 i l'altre el podem subdividir en altres dos subconjunts de 4 i 8 peces respectivament que ens donaran el Q_3 i Q_4 .

Caldrà buscar una manera fàcil de repartir les peces de manera que ens assegurí aquesta condició. Un exemple de distribució podria ser:



$$SQ_3 = 18, SQ_4 = 54 \text{ i } SQ_5 = 72$$

Finalment només cal col·locar-los dintre dels quadrats corresponents. Es pot estirar més aquesta primera fase mirant altres possibles distribucions que donin les mateixes sumes o també calcular de quantes maneres diferents podem col·locar aquestes peces:



La situació és més interessant si demanem, com en el joc de dòmino, que cada part de les fitxes estiguin com a mínim en contacte amb una fitxa del mateix valor.



Pregunta 3: Podríem emplenar els quadrats sense peces repetides de manera que la suma de punts de cada quadrat conformi una terna pitagòrica?

Per abordar aquesta situació primer hauríem de veure si hi ha ternes pitagòriques tals que la suma dels seus elements coincideixi amb alguna de les sumes possibles al treure 4 dobles, és a dir, entre 132 i 156 punts.

Aprofitarem part la feina feta a l'apartat 2.

Tindrem en compte tant ternes pitagòriques primitives (amb termes coprimers entre ells) com múltiples d'aquestes que també són ternes pitagòriques.

Sigui a, b i $c \in \mathbb{N}$ tals que $a^2 = b^2 + c^2$ és una terna pitagòrica, llavors $\forall k \in \mathbb{N}$ ka, kb i kc també formen una terna pitagòrica.

$$(ka)^2 = k^2 a^2 = k^2 (b^2 + c^2) = k^2 b^2 + k^2 c^2 = (kb)^2 + (kc)^2$$

Fent una revisió de diferents ternes pitagòriques ens surten les següents opcions:

Terna Pitagòrica	Suma	Combinacions de 4 peces dobles que podem treure
33,44,55 = 11(3,4,5)	132	33,44,55,66
36,48,60 = 12(3,4,5)	144	00,11,55,66 00,22,44,66 11,22,33,66 00,33,44,55 11,22,44,55
39,52,65 = 13(3,4,5)	156	00,11,22,33
25,60,65 = 5(5,12,13)	150	00,11,22,66 00,11,33,55 00,22,33,44
40,42,58 = 2(20,21,29)	140	00,33,55,66 11,22,55,66 11,33,44,66 22,33,44,55
11,60,61	132	33,44,55,66
16,63,65	144	00,11,55,66 00,22,44,66 11,22,33,66 00,33,44,55 11,22,44,55
33,56,65	154	00,11,22,44

Però es podrà fer sempre, és a dir, sempre podem trobar una partició disjunta de les 24 peces de 4, 8 i 12 peces de manera que la suma de punts de cada part coincideixi amb una terna pitagòrica?

Tornarem a estudiar el cas particular 00,22,44,66:



Altra vegada haurem de fer 3 subconjunts de peces que anomenarem Q_3 , Q_4 i Q_5 per emplenar els tres quadrats (amb 4, 8 i 12 peces respectivament) de manera que compleixin que

$$SQ_3^2 + SQ_4^2 = SQ_5^2$$

En aquests cas tenim dues ternes pitagòriques que la suma dels seus termes dóna 144, que és exactament el que queda després de treure aquestes quatre fitxes dobles: 36,48,60 (terna múltiple de 3,4,5) i 16,63,65 (terna primitiva).

En el cas de la terna 36,48 i 60 un exemple de distribució podria ser:



$$SQ_3 = 36, SQ_4 = 48 \text{ i } SQ_5 = 60$$

Col·loquem les fitxes dintre dels quadrats corresponents:



La situació és més interessant si demanem la condició de contacte entre peces:



Podem comprovar que podem fer exactament el mateix procediment en el cas de la terna 16, 63 i 65. Un exemple de distribució podria ser:



$$SQ_3 = 16, SQ_4 = 63 \text{ i } SQ_5 = 65$$

Ara només cal col·locar-los dintre dels quadrats corresponents:



Altra vegada la situació és més interessant si demanem la condició de contacte entre peces:



Hem provat el mateix procés traient les peces 00,11,22,33 (on la suma de punts és de 156 i la terna pitagòrica associada és la 39,52,65) i 33,44,55,66 (on la suma de punts és 132 i hi ha dues ternes pitagòriques associades 33,44,55 i 11,60,61)

En el primer cas hem pogut aconseguir les dues distribucions respectant la condició de contacte entre peces.

En el segon hem aconseguit la distribució de sumes i la de la terna pitagòrica 11,60,61 respectant la condició de contacte entre peces però no hem pogut obtenir una distribució per a la terna pitagòrica 33,44,55.

Per tant hem trobat un cas on sota aquestes condicions no podem trobar una solució.

Com altres possibles ampliacions de l'activitat podríem abordar les següents qüestions:

- Valorar casos on no tan sols traiem fitxes dobles
- Fer recomptes de possibilitats en situacions concretes
- Buscar condicions d'existència de solucions en els diferents casos
- ...

Bibliografia:

- Estalella, Josep. *Ciencia recreativa*. Editorial Gustavo Gili, 1918. Barcelona