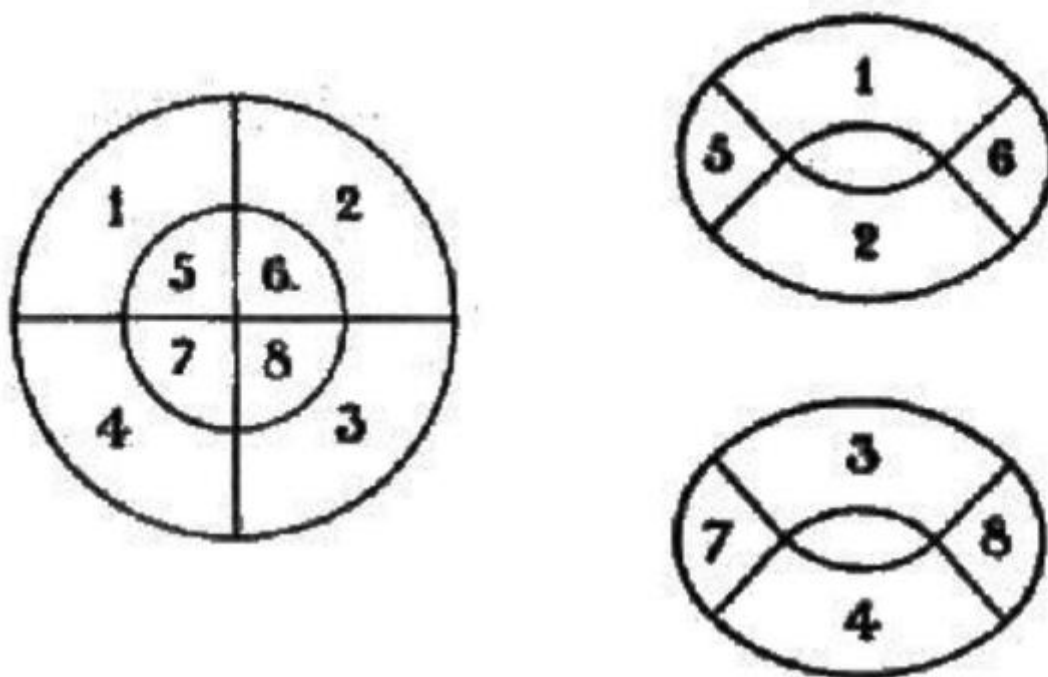


112 - Transformación de un círculo en dos óvalos

112. Transformación de un círculo en dos óvalos.

Dividido el círculo en ocho partes, mediante dos diámetros perpendiculares entre sí y un círculo concéntrico de radio mitad (figura 73), se dispondrán aquéllas cuatro a cuatro en la forma indicada en la parte inferior de la misma figura.



Breu descripció del material

Peces realitzades amb impressió 3D (amb la col·laboració del CESIRE de l'àmbit matemàtic), tot i que es pot reproduir amb altres tipus de materials com cartolina, fusta... a partir del disseny fet amb GeoGebra.

Continguts que es poden tractar

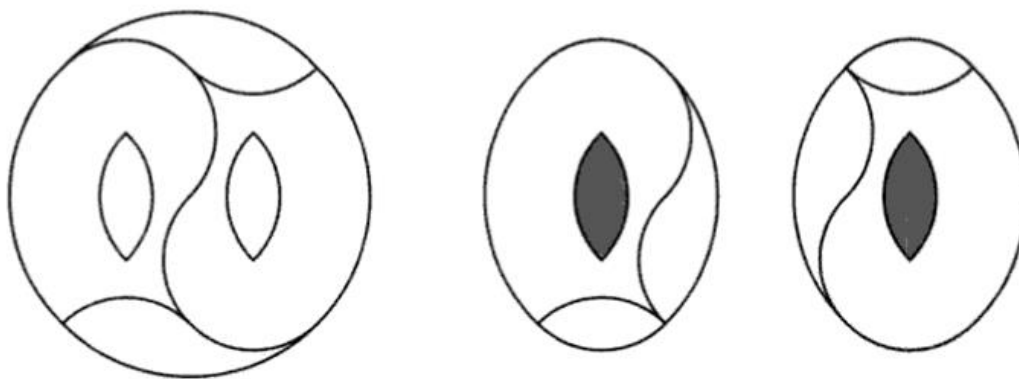
- Descomposició i recomposició de figures de 2 dimensions
- Cercles i ovals. Càlcul de perímetres i àrees
- Corbes tècniques: Volutes o "falses espirals" de 2 i 4 centres.
- Moviments en el pla

Proposta d'aplicació didàctica

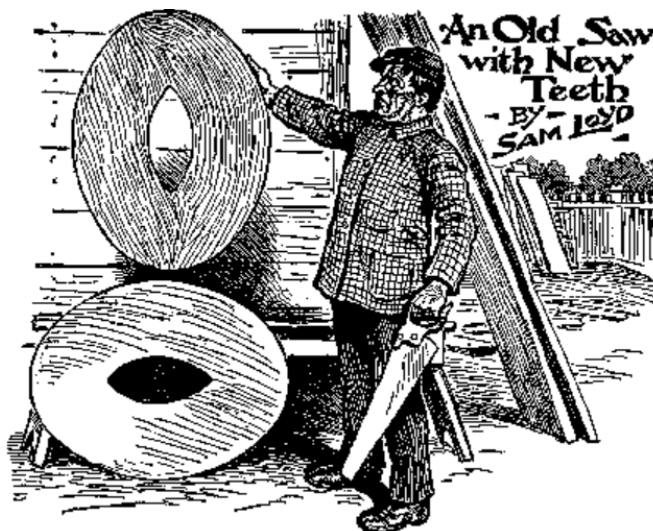
L'activitat 112 ens proposa dur a terme una descomposició d'un cercle en vuit parts per recompondre-les en dos ovals amb una porció central buida. Aquesta activitat està ubicada dintre del llibre *Ciència recreativa* de Josep Estalella dintre d'una sèrie titulada *Divisiones condicionales* (activitats de la 109 a la 112) dedicades a la divisió de figures geomètriques.

Fem una mica d'història primer? Al llibre *Dissections: Plane & Fancy* (2003) Greg Frederickson dedica el capítol 15 titulat *Curves Ahead* a les disseccions de figures amb cares corbes, i explica que la primera referència que es té d'aquesta mateixa dissecció que proposa Estalella és del professor anglès John Jackson, en el seu llibre *Rational Amusement for Winter Evenings* (1821).

Sam Loyd proposa el 1901 a la *Puzzle column* de l'edició del diumenge del *Philadelphia Inquirer* una proposta de descomposició equivalent però en 6 peces.



Més endavant, al 1914, en el seu llibre *Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks & Conundrums* proposa com a repte descompondre dos ovals foradats en el mínim nombre de parts per tal d'aconseguir un cercle.



Imatge extreta de: <http://www.ageofpuzzles.com/History/TwoOvalsToTable/TwoOvalsToTable.htm>

Henry Dudeney al 1927 publica a la *Monthly puzzle column* del *The Strand Magazine* una solució de 4 peces que atribueix al mateix Sam Loyd.

Així que una primera proposta de treball podria ser la construcció d'aquestes disseccions amb GeoGebra per després construir-les físicament.



Arxiu 3D de la descomposició de Dudeney/Loyd: <https://www.tinkercad.com/things/6oK4knPvhJl>

Un dels avantatges que té treballar amb material manipulatiu és el poder experimentar i descobrir si existeixen altres configuracions, com per exemple en aquest cas on veiem que també podem crear una altra figura utilitzant tres de les peces proposades:



Normalment l'oval és una figura que no es treballa excessivament des de l'àmbit de les matemàtiques i en canvi sí des del dibuix tècnic. Per altra banda, els ovals s'utilitzen molt en el disseny industrial, arquitectònic i comercial.

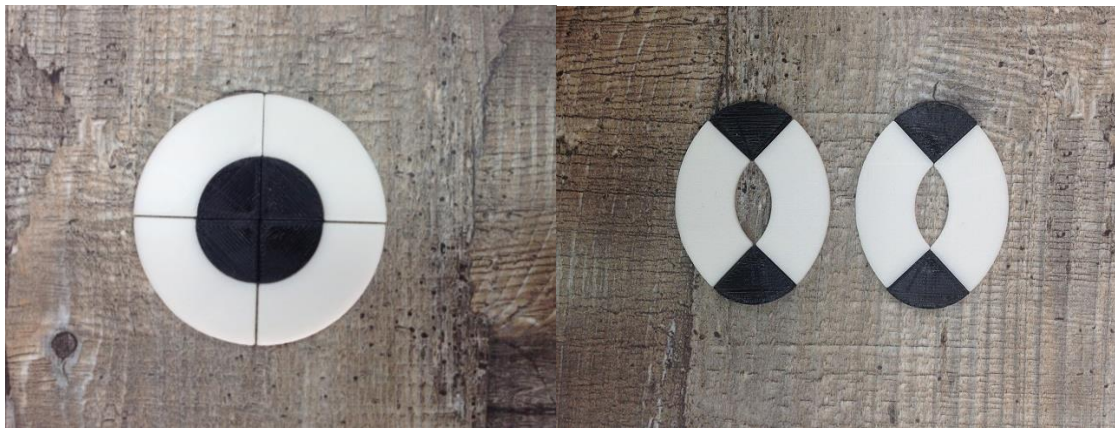
L'oval es situa dintre de les corbes tècniques, que es configuren mitjançant arcs de circumferència, que són tangents entre sí, i poden donar corbes tancades com ovals i ovoides, o obertes com les espirals i les volutes (espirals que tenen per centres els vèrtexs d'un polígon regular) .

Així, un oval es defineix com una corba plana i tancada, simètrica respecte a dos eixos perpendiculars i formada per quatre arcs de circumferència (tangents entre sí) iguals dos a dos.

Entre els tipus d'ovals més coneguts podem destacar:

- Ovals de Cassini: Donats dos punts F_1 i F_2 els ovals de Cassini es defineixen com els llocs geomètrics de tots els punts P del pla per als quals el producte de les distàncies $|PF_1|$ i $|PF_2|$ té un valor constant.
- Ovals de Descartes: Donats dos punts F_1 i F_2 , els ovals de Descartes es defineixen com els llocs geomètrics de tots els punts P del pla per als quals $|PF_1| + m|PF_2|$ té un valor constant a , sent m i a valors reals arbitraris.

Però tornem a la proposta del Josep Estalella. La idea inicial és dividir el cercle en 8 parts mitjançant dos diàmetres perpendiculars i un cercle concèntric de radi la meitat del cercle inicial i recompondre-les com a dos ovals amb un forat al mig.



Arxiu 3D: <https://www.tinkercad.com/things/jonG4cwQqQp>

A partir d'aquesta construcció ens venen diferents preguntes al cap que ens permetran explorar altres opcions. Per exemple, que passarà si ampliem el nombre de cercles concèntrics equidistants que proposa Josep Estalella? Per començar a experimentar hem dividit el cercle inicial amb dos diàmetres perpendiculars i 3 cercles concèntrics equidistants de manera que hem obtingut 16 peces:



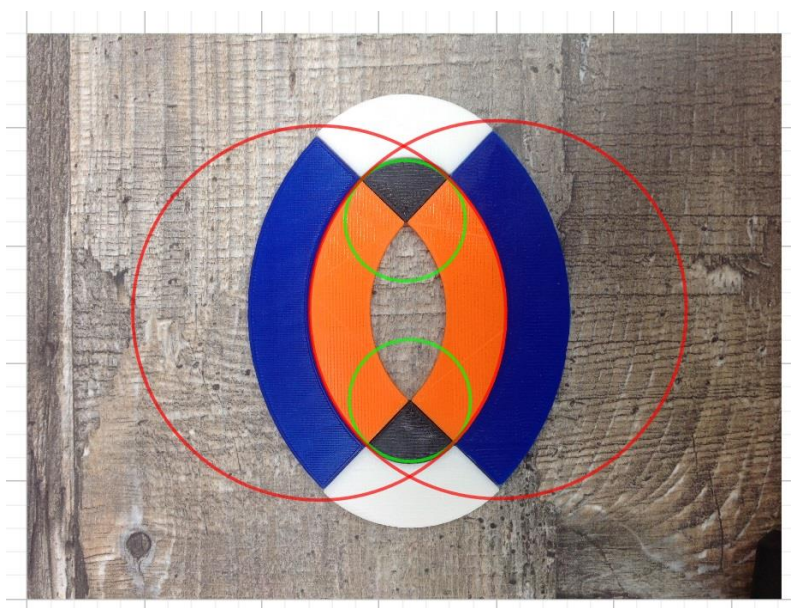
Arxiu 3D: <https://www.tinkercad.com/things/8nR6n1bvhqP>

Agafant com a punt de sortida la proposta d'ovals d'Estalella intentarem construir tots els ovals possibles:



Tot experimentant amb les diferents peces es comprova que podem generar altres ovals utilitzant 4 peces, agafant sempre dues parelles de 2 peces iguals. Per tant, tindrem tants ovals diferents com combinacions sense repetició de quatre elements agafats en grups de 2. I això ens dona els 6 ovals que apareixen en les imatges anteriors.

Podem confirmar que es tracta d'ovals utilitzant les construccions i el GeoGebra i obtenint les 4 circumferències tangents que generen els diferents arcs. Es faria de manera anàloga amb la resta d'ovals.



En aquest cas, és fàcil trobar quin és el nombre d'ovals diferents que podem obtenir a partir de les divisions que fem del cercle amb els dos diàmetres perpendiculars i diferents cercles concèntrics:

Cercles concèntrics	Nombre de peces diferents generades	Nombre de peces totals generades	Tipus d'ovals diferents que podem generar
1	2	8	1
2	3	12	3
3	4	16	6
...	...	...	...

n	n+1	4(n+1)	$C_2^{n+1} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{(n+1)n}{2}$
---	-----	--------	--

Ho podem visualitzar a través del Triangle de Tartaglia, on si ens fixem el nombre de tipus d'ovals diferents que podem generar coincideix amb els nombres triangulars:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
...

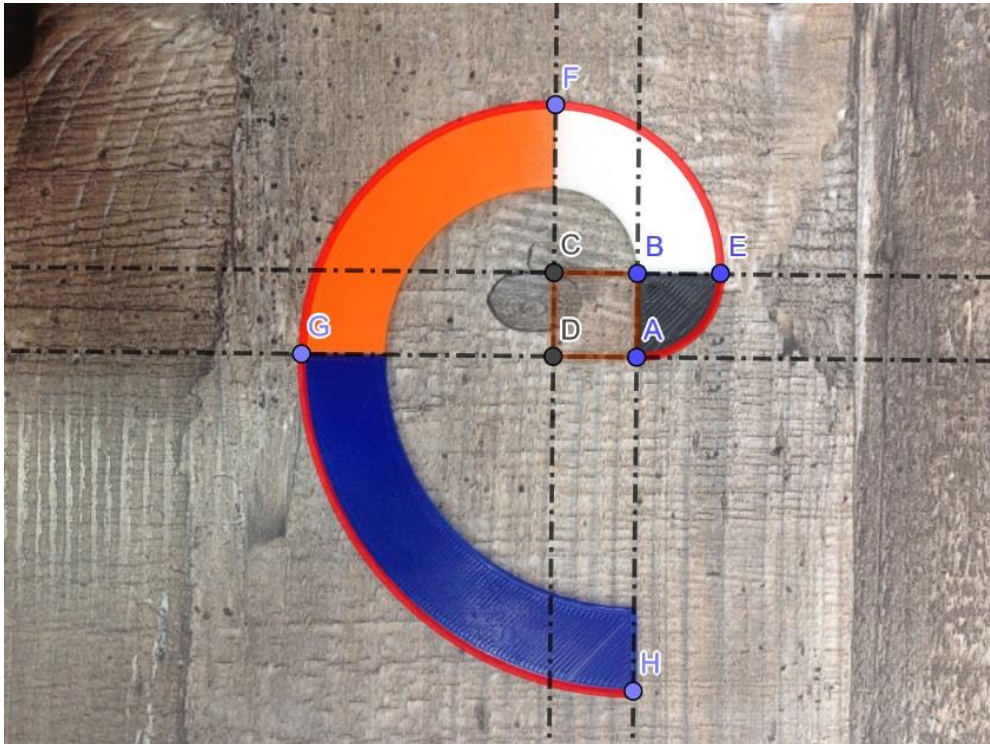
També podríem ampliar l'activitat dintre del bloc de mesura calculant el perímetre i l'àrea de cadascuna de les peces generades.

Però seguim fent-nos preguntes. Podem construir altres corbes amb aquestes peces? Si provem amb construccions utilitzant les 4 peces diferents ens apareixen espirals. Primer construïm l'espiral utilitzant una peça de cada tipus i després amb dues peces de cada tipus. A continuació us mostrem les espirals obtingudes:



La pregunta que ens sorgeix ara és: De quins tipus d'espirals es tracta? Com estem treballant amb les mateixes peces que hem construït els ovals no seria estrany que ens sortissin volutes.

Efectivament, la primera espiral és una espiral de quatre centres o evolvent del quadrat, on els centres de rotació per construir els diferents arcs que componen l'espiral s'organitzen en forma de quadrat de costat igual al de la peça inicial. Els centres es van utilitzant de forma correlativa per generar els diferents arcs de l'espiral.



Iniciem la construcció fent un arc de 90° de centre B i origen en el punt A. A continuació generem l'arc de 90° de centre C i origen en el punt E. A continuació l'arc de 90° de centre D i origen en el punt F... i així successivament.

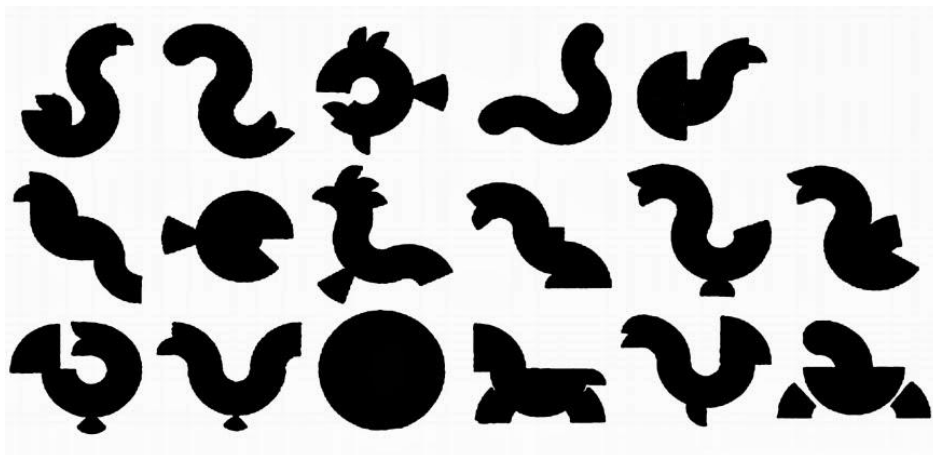
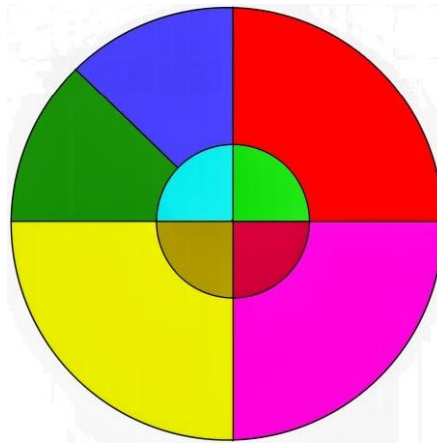
En la segona espiral, on utilitzem 2 peces de cada tipus, es configura una espiral de 2 centres o evolvent d'un segment, on els centres són els vèrtexs d'un segment igual al costat de la peça inicial i es van alternant com a centres dels diferents arcs que configuren l'espiral.



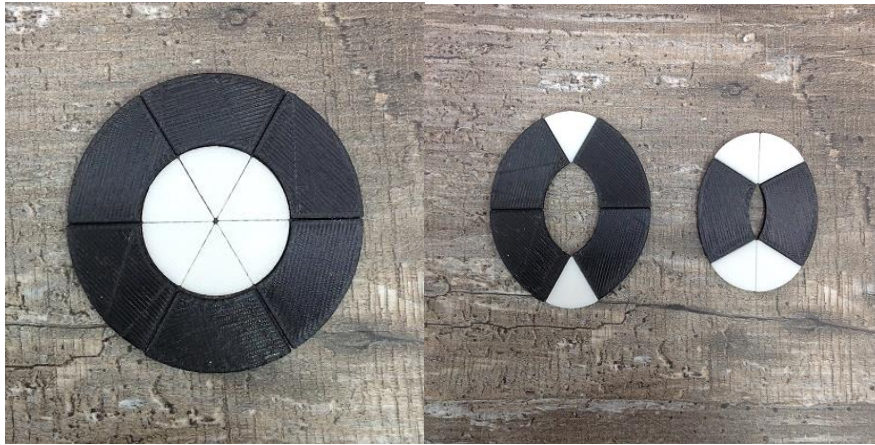
Així iniciem la construcció fent un arc de 180° de centre A i origen en el punt B. A continuació generem l'arc de 180° de centre B i origen en el punt C. A continuació generem l'arc de 180° de centre A i origen en el punt D,... i així successivament.

Podem trobar un lligam clar amb aquestes evolvents i la que ens apareix a l'activitat [116 – Trazado de una espiral](#), on tenim l'evolvent d'un cercle.

Per acabar, i com a curiositat, hem trobat un Tangram circular molt semblant a la construcció inicial que ens proposa l'Estalella, amb l'única diferència que una de les peces més grans està dividida en dues parts iguals.



Però tornem a la proposta del Josep Estalella. Recordem que la proposta inicial és dividir el cercle inicial en 8 parts mitjançant dos diàmetres perpendiculars i un cercle concèntric de radi la meitat del cercle inicial i recompondre-les com a dos ovals amb un forat al mig. Què passarà si enlloc de dividir el cercle amb dos diàmetres n'utilitzem més? Fem una primera prova dividint el cercle amb 3 diàmetres formant angles de 120° entre ells i una corona circular.



En aquest cas també ens donen dos ovals, però podríem dir que són complementaris. El primer es genera amb 4 peces negres i 2 blanques i el segon amb 2 peces negres i 4 blanques.

Per tant, igual que hem fet en la primera proposta, augmentem el nombre de cercles concèntrics equidistants a 3 i ens posem a experimentar:



Arxiu 3D: <https://www.tinkercad.com/things/15GPMmTztSE>

Agafant com a punt de sortida la proposta d'ovals d'Estalella emprada en la primera part de l'activitat, però ara utilitzant 6 peces cada vegada, intentarem construir tots els ovals possibles:



Com hem vist en la primera construcció també podem fer els ovals complementaris:



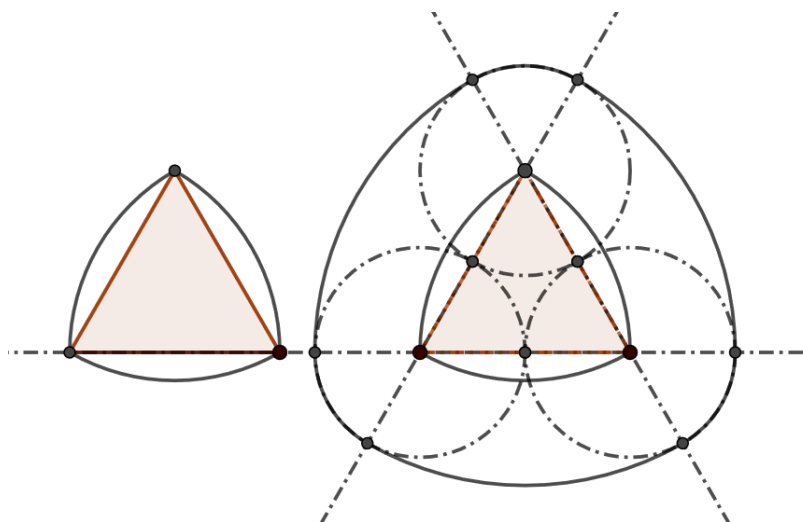
S'observa que tots els ovals tenen dos eixos de simetria.

Però, podem fer altres combinacions només agafant 2 tipus de peces cada vegada? Provem amb 3 peces de cada tipus:



Si ens hi fixem bé, no ens recorda algun tipus de corba coneguda? I tant! El forat que queda al mig de cada peça és un triangle de Reuleaux, i les peces formen triangles de Reuleaux ampliats. Recordem que un triangle de Reuleaux es un corba d'amplada constant. I els triangles de Reuleaux ampliats també tenen amplada constant. Per altra banda, els triangles de Reuleaux presenten un centre de gir d'ordre 3, és a dir, coincideix cada gir de 120° .

Ho podem observar a continuació mitjançant la construcció feta amb GeoGebra:



En aquest cas també podem trobar quin és el nombre d'ovals diferents que podem obtenir a partir de les divisions que fem del cercle amb tres diàmetres que formen un angle de 120° entre ells i diferents cercles concèntrics. Però a més podem calcular el nombre de triangles de Reuleaux diferents:

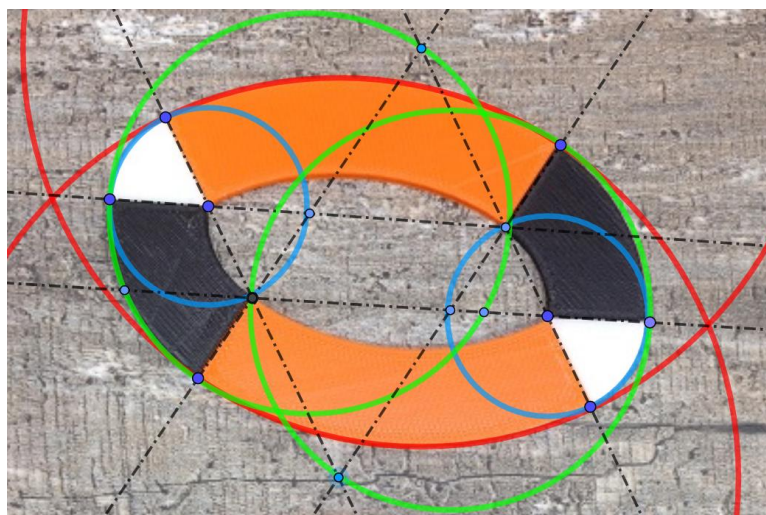
Cercles concèntrics	Nombre de peces diferents generades	Nombre de peces totals generades	Ovals diferents que podem generar	Triangles de Reuleaux diferents que podem generar
1	2	12	$2 \cdot 1 = 2$	1
2	3	18	$2 \cdot 3 = 6$	3
3	4	24	$2 \cdot 6 = 12$	6
...	...	...	...	...
n	n+1	$4(n+1)$	$V_2^{n+1} = (n+1)n$	$C_2^{n+1} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{(n+1)n}{2}$

Continuem fent-nos preguntes: podem construir altres corbes amb aquestes peces? De moment hem utilitzat sempre dues peces diferents a totes les construccions. Podem provar utilitzant 3 peces diferents. Quin tipus de corbes ens sortiran?

Iniciem les proves agafant 2 peces de tres tipus diferents. En principi seria equivalent a treure 1 tipus peça de cada vegada, per tant ens haurien de sortir 4 composicions diferents:



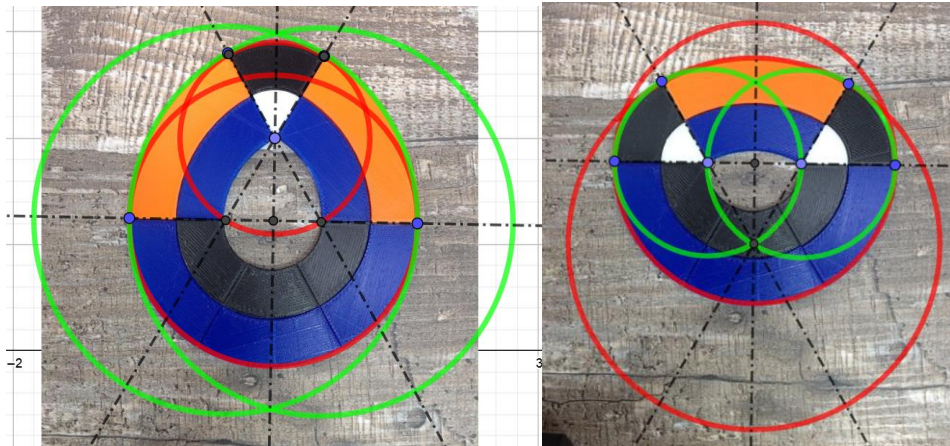
Totes aquestes figures presenten per construcció una simetria central, i 6 arcs iguals dos a dos.



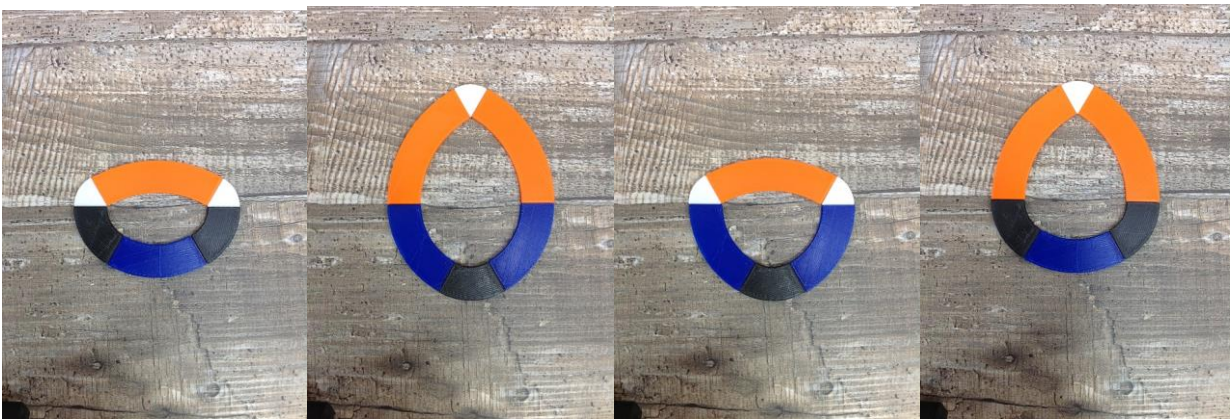
A continuació el que farem es agafar 3 peces d'un tipus, 2 d'un segon tipus i la darrera d'un tercer tipus, sempre que puguem fer una corba tancada:



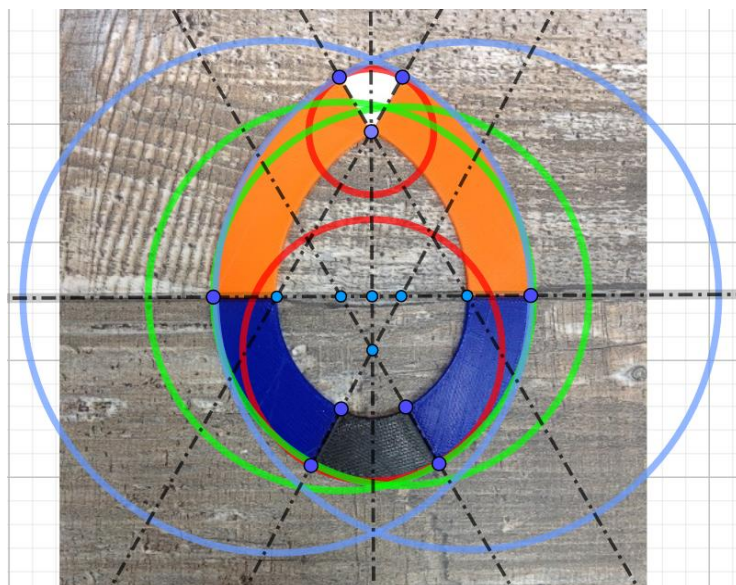
En aquest cas les diferents combinacions ens donen ovoides, que presenten un únic eix de simetria. Un ovoide es defineix com una corba plana i tancada, simètrica respecte a un eix, formada per quatre arcs de circumferència (tangents entre si) on dos són iguals i altres dos no.



I què passarà si agafem peces dels 4 tipus? En aquestes primeres construccions tenim 2 peces de dos tipus diferents i 1 peça dels altres dos, sempre que formin una corba tancada:



També tenim una mena d'ovoides, amb únic eix de simetria però amb 6 arcs enlloc de 4, tenint dues parelles d'arcs iguals i 2 de diferents.

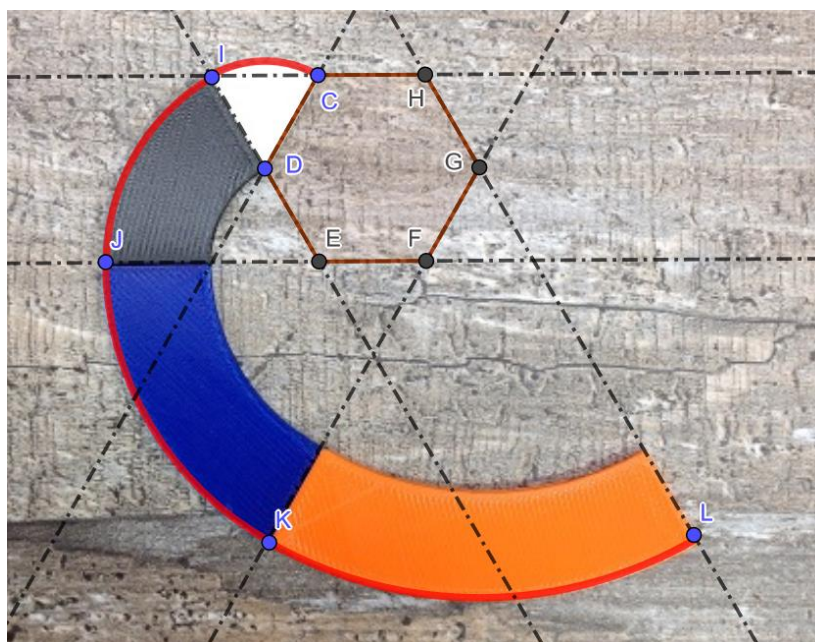


Per finalitzar, mirarem si també ens apareixen espirals, agafant el mateix nombre de peces de cada tipus, tal com hem fet en la primera part de l'activitat, ja siguin una, dues o tres peces de cada:



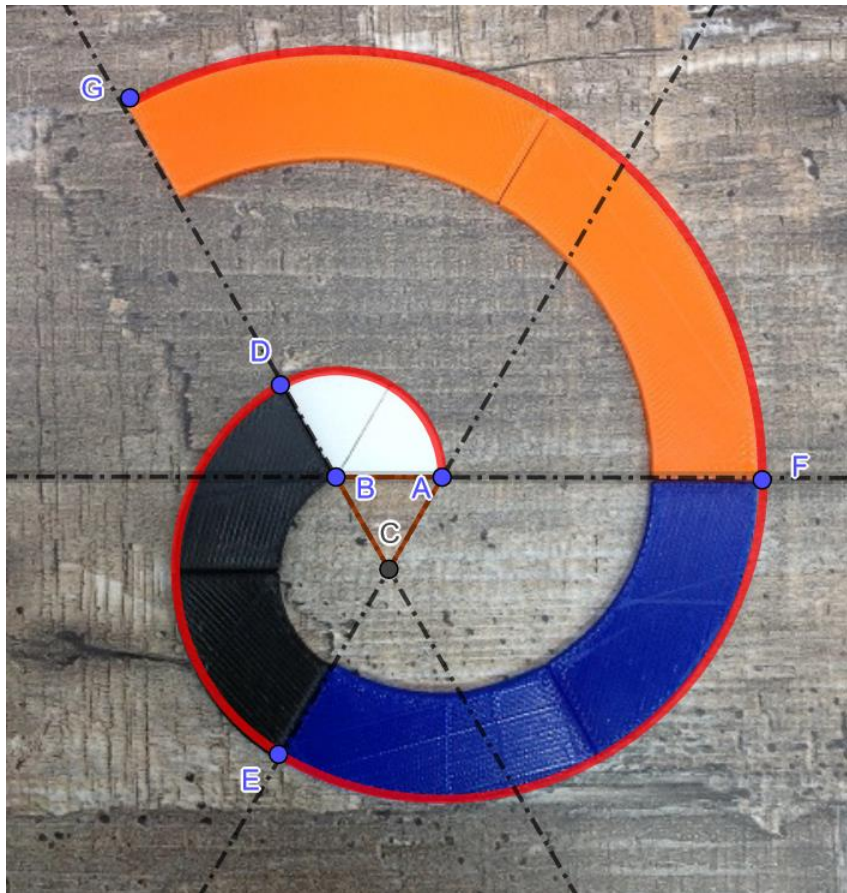
Evolutent d'un hexàgon regular Evolutent d'un triangle equilàter Evolutent d'un segment

La primera és una espiral de sis centres o evolutent d'un hexàgon regular, on els centres de rotació per construir els diferents arcs que componen l'espiral s'organitzen en forma d'hexàgon regular de costat igual al de la peça inicial. Els vèrtexs del polígon es van utilitzant de forma correlativa per generar els diferents arcs de l'espiral.



Així iniciem la construcció fent un arc de 60° de centre D i origen en el punt C. A continuació generem l'arc de 60° de centre E i origen en el punt I. A continuació generem l'arc de 60° de centre F i origen en el punt J... i així successivament.

En el segon cas, creada amb dues peces de cada tipus, es tracta d'una espiral de tres centres o evolvent d'un triangle equilàter:



La construcció es fa de la mateixa manera que en el cas anterior, iniciant la construcció fent un arc de 120° de centre B i origen en el punt A.

En el tercer cas, que hem construït amb 3 peces de cada tipus, es tracta d'una espiral de dos centres o evolvent d'un segment, que ja hem construït en la primera part de l'activitat.

De moment hem arribat fins aquí però seguirem fent-nos preguntes: Què passaria si...?

Bibliografia:

- Estalella, Josep. *Ciencia recreativa*. Editorial Gustavo Gili, 1918. Barcelona
- Frederickson, Greg. Capítol 15: Curves Ahead. *Dissection: Plane & Fancy*. Cambridge University Press, 2002.

Enllaç a materials dissenyats per Impressió 3D:

Repositori del Grup Cúbic: <https://www.tinkercad.com/users/4NJTckgVfid-grup-cubic>

Enllaços d'interès

Web [Age of Puzzles](#) de. Serhiy Grabarchuk. [Two Oval Stools to a Table](#).
Darrera consulta: 24/11/2018