

3 daus, 2 daus

Els alumnes tiren tres daus i a cada tirada retiren el dau de puntuació més alta i sumen la dels altres dos.



Exemple 1: Retirem el dau que marca 4 i la suma resulta $3+1=4$.



Exemple 2: Retirem un dels daus que marca 4 i la suma resulta $4+1=5$.

Tenim resultats anàlegs o no als que tindrem calculant la suma dels punts obtinguts en llançar només dos daus?

Experimentació:

Conjectures i formes d'abordatge a l'aula:

Generem preguntes:

Extret de : Manual de La Caixa de Varga

Recompte de casos

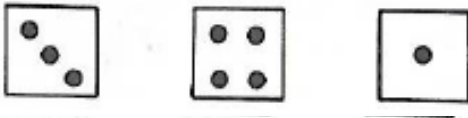
Valor de la suma	Freqüència absoluta	Freqüència relativa
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
TOTAL		

Segona part del taller: aprofundiment (25 minuts)

Resituació del problema.

Recordem l'enunciat

Els alumnes tiren tres daus i a cada tirada retiren el dau de puntuació més alta i sumen la dels altres dos.



Exemple 1: Retirem el dau que marca 4 i la suma resulta $3+1=4$.



Exemple 2: Retirem un dels daus que marca 4 i la suma resulta $4+1=5$.

Tenim resultats anàlegs o no als que tindrem calculant la suma dels punts obtinguts en llançar només dos daus?

Com ha anat l'experimentació realitzada a la primera part?

Quines conjectures hem fet?

Quines preguntes se'ns han plantejat i han quedat "aparcades"?

Quina suma serà la més probable que surti?

Serà el 7 el valor que aparegui amb més freqüència?

Què passarà si eliminem el valor menor en lloc del més gran? I si eliminem el valor central i ens quedem amb els valors extrems?

L'abordatge del problema des d'un punt de vista matemàtic es pot fer pensant que hem llançat dos daus i com influeix el resultat de la suma en funció del valor obtingut al tercer llançament i dels dos valors obtinguts anteriorment. Als apartats següents ens serà útil aquest plantejament.

En un primer intent, podríem fer un recompte a la brava. A la primera fila indicarem el valor de la suma ($S = n$) i, a les següents files indicarem el valor dels dos primers daus (36 casos possibles). A cada cel·la, indiquem el nombre de casos favorables en funció del valor del tercer donat. Per exemple, si en els dos primers llançaments obtenim un 2 i un 4, quants casos se'n poden donar? Si surt un 1, el valor de la suma serà 3, si surt un 2, el valor de la suma serà 4, si surt un 3, el valor de la suma serà 5 i, en qualsevol altre cas, el valor de la suma serà 6. Podem observar aquest recompte a la fila ombrejada de color blau.

	S=2	S=3	S=4	S=5	S=6	S=7	S=8	S=9	S=10	S=11	S=12
1-1	6										
1-2	1	5									
1-3	1	1	4								
1-4	1	1	1	3							
1-5	1	1	1	1	2						
1-6	1	1	1	1	1	1					
2-1	1	5									
2-2		1	5								
2-3		1	1	4							
2-4		1	1	1	3						
2-5		1	1	1	1	2					
2-6		1	1	1	1	1	1				
3-1	1	1	4								
3-2		1	1	4							
3-3			1	1	4						
3-4			1	1	1	3					
3-5			1	1	1	1	2				
3-6			1	1	1	1	1	1			
4-1	1	1	1	3							
4-2		1	1	1	3						
4-3			1	1	1	3					

4-4				1	1	1	3				
4-5				1	1	1	1	2			
4-6				1	1	1	1	1	1		
5-1	1	1	1	1	2						
5-2		1	1	1	1	2					
5-3			1	1	1	1	2				
5-4				1	1	1	1	2			
5-5					1	1	1	1	2		
5-6					1	1	1	1	1	1	
6-1	1	1	1	1	1	1					
6-2		1	1	1	1	1	1				
6-3			1	1	1	1	1	1			
6-4				1	1	1	1	1	1		
6-5					1	1	1	1	1	1	
6-6						1	1	1	1	1	1
TOTAL	16	27	34	36	34	27	19	12	7	3	1

A la lectura, s'observen alguns patrons i regularitats que ens poden convidar a fer noves investigacions (es veuran en apartats posteriors) o fer els recomptes dels casos favorables d'una manera diferent. Alguns alumnes, veient aquestes regularitats s'estalvien algunes files de la matriu anterior utilitzant la simetria de casos (hi ha els mateixos casos favorables a la situació 1-3 que a la 3-1, per exemple):

	S=2	S=3	S=4	S=5	S=6	S=7	S=8	S=9	S=10	S=11	S=12
1-1	6										
1-2	2	10									
1-3	2	2	8								
1-4	2	2	2	6							
1-5	2	2	2	2	4						
1-6	2	2	2	2	2	2					
2-2		1	5								

2-3		2	2	8							
2-4		2	2	2	6						
2-5		2	2	2	2	4					
2-6		2	2	2	2	2	2				
3-3			2	2	8						
3-4			2	2	2	6					
3-5			2	2	2	2	4				
3-6			2	2	2	2	2	2			
4-4				1	1	1	3				
4-5				2	2	2	2	4			
4-6				2	2	2	2	2	2		
5-5					1	1	1	1	2		
5-6					2	2	2	2	2	2	
6-6						1	1	1	1	1	1
TOTAL	16	27	34	36	34	27	19	12	7	3	1

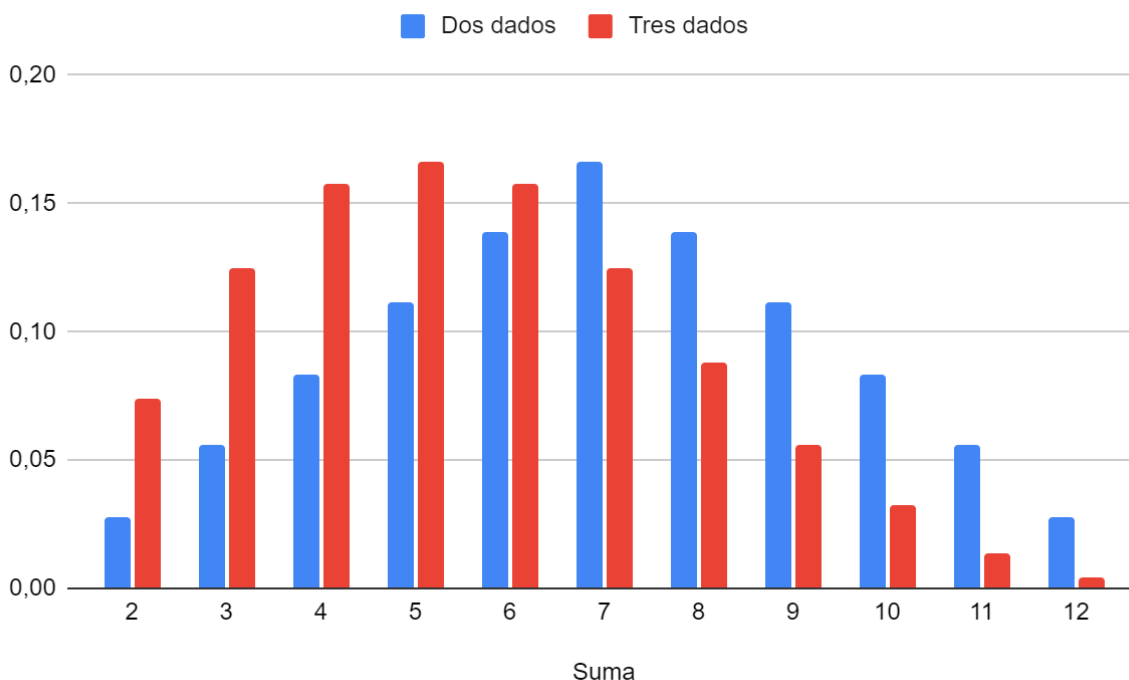
Quines similituds o diferències s'observen entre la distribució de la suma de dos daus o la suma dels dos daus de menor puntuació si llancem tres daus? Abans, vegem la taula de doble entrada on es poden observar els casos favorables per a cada valor de la suma de dos daus:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Observem les diferències en les dues situacions descrites anteriorment:

	Tirant els daus	Llançant tres daus
P(S=2)	$\frac{1}{36} \approx 0,0278$	$\frac{16}{216} \approx 0,0741$
P(S=3)	$\frac{2}{36} \approx 0,0556$	$\frac{27}{216} \approx 0,1250$
P(S=4)	$\frac{3}{36} \approx 0,0833$	$\frac{34}{216} \approx 0,1574$
P(S=5)	$\frac{4}{36} \approx 0,1111$	$\frac{36}{216} \approx 0,1667$
P(S=6)	$\frac{5}{36} \approx 0,1389$	$\frac{34}{216} \approx 0,1574$
P(S=7)	$\frac{6}{36} \approx 0,1667$	$\frac{27}{216} \approx 0,1250$
P(S=8)	$\frac{5}{36} \approx 0,1389$	$\frac{19}{216} \approx 0,0880$
P(S=9)	$\frac{4}{36} \approx 0,1111$	$\frac{12}{216} \approx 0,0556$
P(S=10)	$\frac{3}{36} \approx 0,0833$	$\frac{7}{216} \approx 0,0324$
P(S=11)	$\frac{2}{36} \approx 0,0556$	$\frac{3}{216} \approx 0,0139$
P(S=12)	$\frac{1}{36} \approx 0,0278$	$\frac{1}{216} \approx 0,0046$

Noteu que en el primer dels casos, es dona una simetria al voltant del cas S=7 (valor amb més probabilitat). En el segon cas, sembla que es dona una simetria al voltant del cas S=5, però que es trenca en casos una mica més allunyats. Acabem de resoldre la primera de les nostres preguntes: la distribució es veu alterada amb el canvi de regles i el valor de la suma més probable, a la segona alternativa disminueix fins al cas S=5. Vegem-ho en una representació gràfica:



Una altra dada significativa que es pot observar de forma molt clara al gràfic anterior és que el valor més gran de les probabilitats en ambdós casos és el mateix; en el cas de dos daus $P(S=7) = 6/36$ i en el cas de tres daus, $P(S=10.5) = 36/216$.

Un cop resolta la nostra primera pregunta, podem estudiar què passa si, en lloc d'eliminar el dau de més puntuació, passem a eliminar el de menor puntuació. Es donarà una distribució simètrica a l'estudiada en el cas anterior?

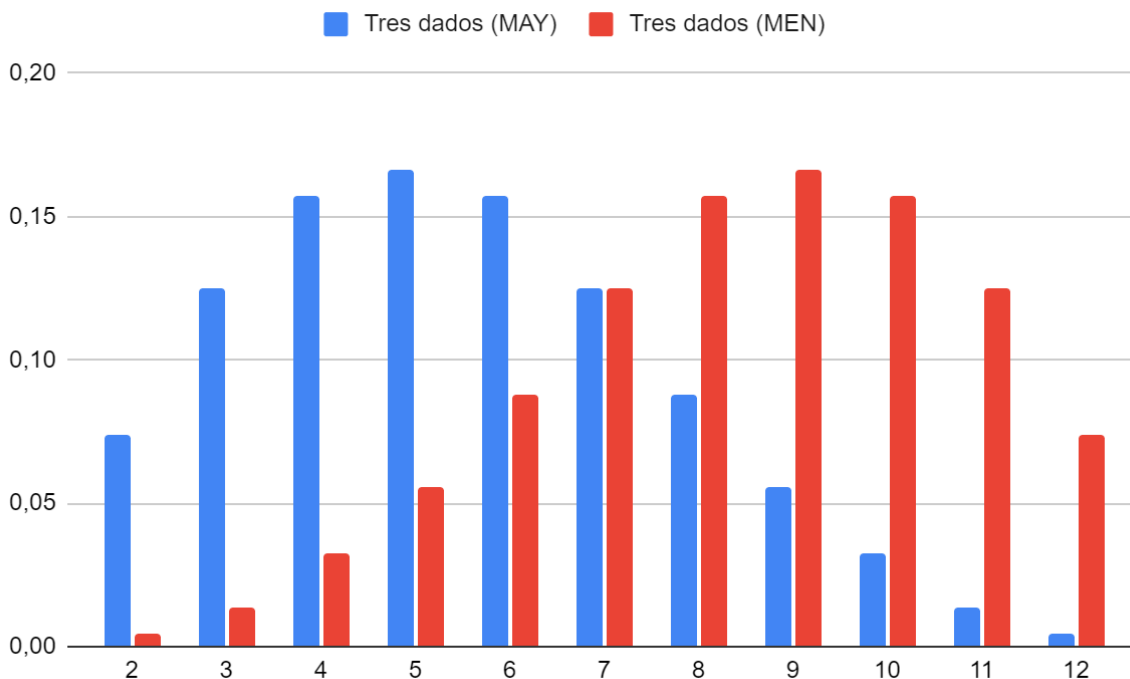
	S=2	S=3	S=4	S=5	S=6	S=7	S=8	S=9	S=10	S=11	S=12
1-1	1	1	1	1	1	1					
1-2		2	2	2	2	2	2				
1-3			2	2	2	2	2	2			
1-4				2	2	2	2	2	2		
1-5					2	2	2	2	2	2	
1-6						2	2	2	2	2	2
2-2			2	1	1	1	1				
2-3				4	2	2	2	2			
2-4					4	2	2	2	2		
2-5						4	2	2	2	2	

2-6							4	2	2	2	2
3-3					3	1	1	1			
3-4						6	2	2	2		
3-5							6	2	2	2	
3-6								6	2	2	2
4-4							4	1	1		
4-5								8	2	2	
4-6									8	2	2
5-5									5	1	
5-6										10	2
6-6											6
TOTAL	1	3	7	12	19	27	34	36	34	27	16

	Llançant tres daus (eliminant el més gran)	Llançant tres daus (eliminant el menor)
P(S=2)	$\frac{16}{216} \approx 0,0741$	$\frac{1}{216} \approx 0,0046$
P(S=3)	$\frac{27}{216} \approx 0,1250$	$\frac{3}{216} \approx 0,0139$
P(S=4)	$\frac{34}{216} \approx 0,1574$	$\frac{7}{216} \approx 0,0324$
P(S=5)	$\frac{36}{216} \approx 0,1667$	$\frac{12}{216} \approx 0,0556$
P(S=6)	$\frac{34}{216} \approx 0,1574$	$\frac{19}{216} \approx 0,0880$
P(S=7)	$\frac{27}{216} \approx 0,1250$	$\frac{27}{216} \approx 0,1250$
P(S=8)	$\frac{19}{216} \approx 0,0880$	$\frac{34}{216} \approx 0,1574$
P(S=9)	$\frac{12}{216} \approx 0,0556$	$\frac{36}{216} \approx 0,1667$

P(S=10)	$\frac{7}{216} \approx 0,0324$	$\frac{34}{216} \approx 0,1574$
P(S=11)	$\frac{3}{216} \approx 0,0139$	$\frac{27}{216} \approx 0,1250$
P(S=12)	$\frac{1}{216} \approx 0,0046$	$\frac{16}{216} \approx 0,0741$

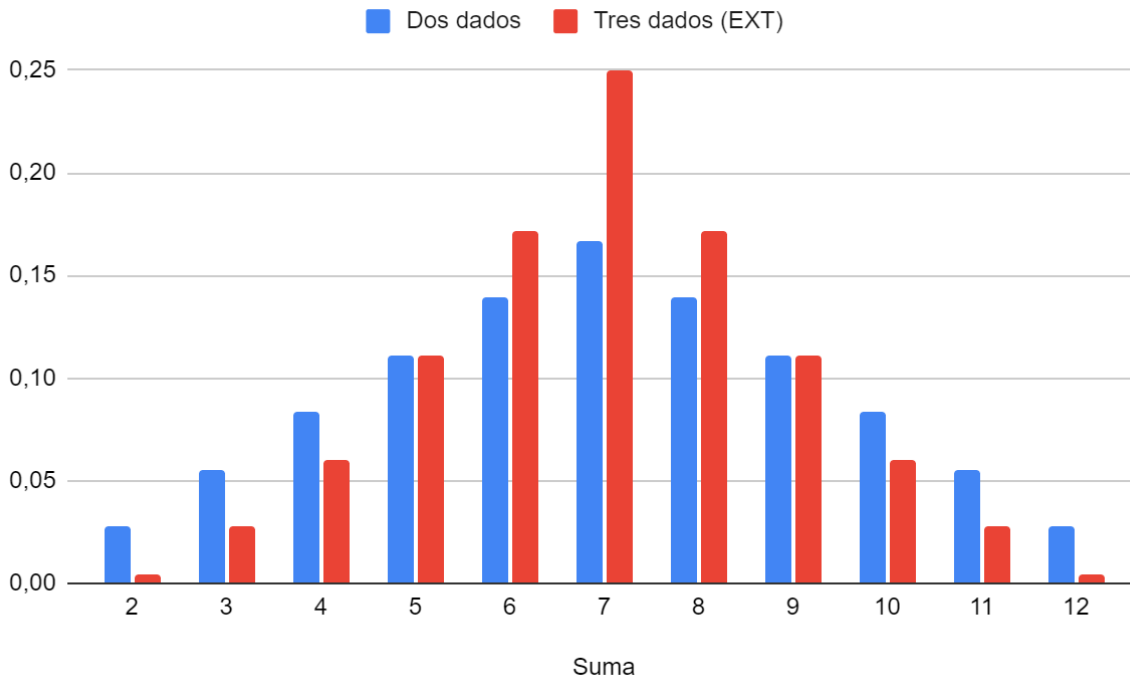
Aquí, la nostra intuïció ha apuntat en la bona direcció. Es dona una simetria en els dos casos estudiats amb eix al valor $P(S=7)$. Vegem aquesta simetria en el gràfic següent:



Per acabar aquesta primera fase de l'estudi, quina relació hi haurà entre la distribució de dos daus i la distribució que s'obté fent tres daus i eliminant el valor central? Tot apunta que es mantindrà la simetria central al voltant del valor de la suma = 7. Estudem els casos favorables per a cada situació.

	S=2	S=3	S=4	S=5	S=6	S=7	S=8	S=9	S=10	S=11	S=12
1-1	1	1	1	1	1	1					
1-2		4	2	2	2	2					
1-3			6	2	2	2					
1-4				8	2	2					
1-5					10	2					
1-6						12					
2-2		1	1	1	1	1	1				
2-3			2	4	2	2	2				
2-4				2	6	2	2				
2-5					2	8	2				
2-6						2	10				
3-3			1	1	1	1	1	1			
3-4				2	2	4	2	2			
3-5					2	2	6	2			
3-6						2	2	8			
4-4				1	1	1	1	1	1		
4-5					2	2	2	4	2		
4-6						2	2	2	6		
5-5					1	1	1	1	1	1	
5-6						2	2	2	2	4	
6-6						1	1	1	1	1	1
TOTAL	1	6	13	24	37	54	37	24	13	6	1

Un altre cop, la nostra intuïció ha funcionat. El fet d'extreure el valor central ens manté la simetria del cas dels dos daus. Tot i això, les seves distribucions són notablement diferents: els valors extrems són molt poc probables mentre que el valor central augmenta la seva probabilitat. Vegem aquesta observació al següent gràfic:



Ampliació del problema.

Un cop resoltes les preguntes inicials, potser ens vingui de gust anar una mica més enllà... Podem atacar diferents possibilitats:

- Què passa si canviem el nombre de cares dels daus que estem estudiant? I si tenim daus de dues cares? I si fossin tres cares? ...
- Què passa si augmentem el nombre de daus que llancem? Què passaria si llancem quatre daus? I cinc?
- Quin model ens donarà si llancem quatre daus i ens quedem amb els dos daus centrals?

A les properes pàgines, considerarem únicament el cas que, després de llançar n daus, ens vam quedar amb la suma dels dos majors. A el cas c (daus centrals) serà estudiat a posteriori.

- **Passem a l'acció i ataquem els dos grups de preguntes alhora en un intent de trobar un patró que modelitzi el llançament de n daus, tots ells de k cares. Serà possible trobar un patró?**

- Estudi amb daus de 2 cares

Suposem que llancem n daus amb dues cares (puntuades amb un 1 i un 2). Eliminem els $n-2$ daus amb menor puntuació i estudiem la distribució del valor de la suma dels dos més grans. Aquest valor, en tots els casos, estarà comprès entre 2 i 4. Vegem el recompte de casos favorables per als n donats:

	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10
S = 2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
S = 3	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S = 4	1	4	11	26	57	120	247	502	1013
Total	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

No és difícil observar que els termes generals de cada successió vénen donats per les expressions següents:

$$\begin{aligned}\{S2\}_n &= 1 \\ \{S3\}_n &= n \\ \{S4\}_n &= 2^n - n - 1\end{aligned}$$

De fet, si ho pensem una mica, aquestes tres fórmules són molt coherents:

- Quan $S = 2$, tots els daus han de sortir amb una puntuació de 1.
- Quan $S = 3$, tots els daus han de sortir amb una puntuació d'1 excepte un amb una puntuació de 2. Quants casos n'hi ha? n .
- I, pel cas $S = 4$, simplement hem de sumar i restar del total de casos.

Per tant, si volem estudiar la distribució de la suma dels dos daus de major quantitat si llancem, posem per exemple 20 daus, ve donada per les expressions següents:

$$\begin{aligned}P(S = 2) &= \frac{1}{2^{20}} \approx 9.53 \cdot 10^{-7} \\ P(S = 3) &= \frac{20}{2^{20}} \approx 1,91 \cdot 10^{-5} \\ P(S = 4) &= \frac{2^{20} - 20 - 1}{2^{20}} \approx 1\end{aligned}$$

- Estudi amb daus de 3 cares

Suposem que llancem n daus amb tres cares (puntuades amb un 1, un 2 i un 3). El valor de la suma, en tots els casos, estarà comprès entre 2 i 6. Aquí, el recompte de casos favorables es complica una mica. Introduïrem una notació que s'estendrà durant tot aquest bloc. Notarem [13] si la puntuació dels dos daus és un 1 i un 3 (independentment de l'ordre). Comencem a estudiar quants casos possibles tenim quan llancem dos daus:

	1	2	3
1	[11]	[12]	[13]
2	[12]	[22]	[23]
3	[13]	[23]	[33]

Ara, en llançar un tercer dau, vegem amb quins daus ens quedaríem en funció dels dos daus inicials i de la puntuació del tercer dau. A la fila superior, tenim descrits els casos possibles amb dos daus. A la primera columna, tenim els tres casos possibles a llançar el tercer dau. A la intersecció de fila i columna, recollirem els dos daus que ens quedem:

	[11]	[12]	[13]	[22]	[23]	[33]
1	[11]	[12]	[13]	[22]	[23]	[33]
2	[12]	[22]	[23]	[22]	[23]	[33]
3	[13]	[23]	[33]	[23]	[33]	[33]

Aquesta segona taula és molt important, ja que ens dona una relació de recurrència per a cada cas. Estudiem la successió de casos favorables per a cada situació en funció dels n daus de tres cares llançats.

A partir d'aquest moment, s'utilitzarà una notació una mica estranya (però que esperem que ens resulti còmoda). Per exemple, denotarem $\{23\}_n$ a la quantitat de casos favorables que es donen després de llançar daus, quedar-nos amb els dos majors i que aquests siguin un 2 i un 3.¹

Amb les relacions vistes a la darrera taula mostrada i tenint en compte tots els detalls descrits al paràgraf anterior, podem definir les següents successions recurrents:

¹ Per qüestions de comoditat, totes les successions començaran des del terme $n=2$.

$$\{[11]\}_n = 1$$

$$\{[12]\}_{n+1} = \{[11]\}_n + \{[12]\}_n$$

$$\{[13]\}_{n+1} = \{[11]\}_n + \{[13]\}_n$$

$$\{[22]\}_{n+1} = \{[12]\}_n + 2 \cdot \{[22]\}_n$$

$$\{[23]\}_{n+1} = \{[12]\}_n + \{[13]\}_n + \{[22]\}_n + 2 \cdot \{[23]\}_n$$

$$\{[33]\}_{n+1} = \{[13]\}_n + \{[23]\}_n + 3 \cdot \{[33]\}_n$$

Ens agradaria trobar l'expressió explícita de les successions descrites anteriorment de forma recurrent. Abans, però, vegem els primers termes de cada successió per a donats:

n dades	$\{11\}_n$	$\{12\}_n$	$\{13\}_n$	$\{22\}_n$	$\{23\}_n$	$\{33\}_n$
2	1	2	2	1	2	1
3	1	3	3	4	9	7
4	1	4	4	11	28	33
5	1	5	5	26	75	131
6	1	6	6	57	186	473
7	1	7	7	120	441	1611
8	1	8	8	247	1016	5281
9	1	9	9	502	2295	16867
10	1	10	10	1013	5110	52905
11	1	11	11	2036	11253	163835

Saltant-nos alguns càlculs molt pesats, podríem arribar a veure que²:

$$\{[11]\}_n = 1$$

$$\{[12]\}_{n+1} = n$$

$$\{[13]\}_{n+1} = n$$

$$\{[22]\}_{n+1} = 2^n - n - 1$$

$$\{[23]\}_{n+1} = n \cdot 2^{n-1} - n$$

$$\{[33]\}_{n+1} = 3^n - 2^n - n \cdot 2^{n-1}$$

² En qualsevol cas, es podria veure que les expressions són equivalents mitjançant demostracions per inducció.

Ara, si reprenem l'enunciat inicial, hem de calcular el nombre de casos favorables del valor de la suma dels dos daus més grans en llançar n daus. Les expressions explícites per a cada cas es resumeixen de la manera següent:

$$\begin{aligned}\{S2\}_n &= 1 \\ \{S3\}_n &= n \\ \{S4\}_n &= 2^n - 1 \\ \{S5\}_n &= n \cdot 2^{n-1} - n \\ \{S6\}_n &= 3^n - 2^n - n \cdot 2^{n-1}\end{aligned}$$

Si comparem les successions obtingudes en el cas de daus de dues cares i el cas de daus de tres cares, es poden observar algunes regularitats:

n dau de 2 cares	n dau de 3 cares
$\{S2\}_n = 1$ $\{S3\}_n = n$ $\{S4\}_n = 2^n - n - 1$	$\{S2\}_n = 1$ $\{S3\}_n = n$ $\{S4\}_n = 2^n - 1$ $\{S5\}_n = n \cdot 2^{n-1} - n$ $\{S6\}_n = 3^n - 2^n - n \cdot 2^{n-1}$

Aquestes regularitats s'estendran per a daus amb més cares? En aquest punt hauríem de procedir de forma similar al cas de daus amb 4 cares, 5 cares... Estalviarem aquests passos i mostrarem, en format taula, les successions obtingudes per als casos següents:

2 nois	3 nois	4 nois	5 nois	6 nois
$\{S2\}_n = 1$	$\{S2\}_n = 1$	$\{S2\}_n = 1$	$\{S2\}_n = 1$	$\{S2\}_n = 1$
$\{S3\}_n = n$	$\{S3\}_n = n$	$\{S3\}_n = n$	$\{S3\}_n = n$	$\{S3\}_n = n$
$\{S4\}_n = 2^n - n - 1$	$\{S4\}_n = 2^n - 1$	$\{S4\}_n = 2^n - 1$	$\{S4\}_n = 2^n - 1$	$\{S4\}_n = 2^n - 1$
	$\{S5\}_n = n \cdot 2^{n-1} - n$	$\{S5\}_n = n \cdot 2^{n-1}$	$\{S5\}_n = n \cdot 2^{n-1}$	$\{S5\}_n = n \cdot 2^{n-1}$
	$\{S6\}_n = 3^n - 2^n - n \cdot 2^{n-1}$	$\{S6\}_n = 3^n - 2^n - n$	$\{S6\}_n = 3^n - 2^n$	$\{S6\}_n = 3^n - 2^n$
		$\{S7\}_n = n \cdot (3^{n-1} - 2^{n-1})$	$\{S7\}_n = n \cdot 3^{n-1} - n$	$\{S7\}_n = n \cdot 3^{n-1}$
		$\{S8\}_n = 4^n - 3^n - n \cdot 3^{n-1}$	$\{S8\}_n = 4^n - 3^n - n \cdot 2^{n-1}$	$\{S8\}_n = 4^n - 3^n - n$
			$\{S9\}_n = n \cdot (4^{n-1} - 3^{n-1})$	$\{S9\}_n = n \cdot (4^{n-1} - 2^{n-1})$
			$\{S10\}_n = 5^n - 4^n - n \cdot 4^{n-1}$	$\{S10\}_n = 5^n - 4^n - n \cdot 3^{n-1}$
				$\{S11\}_n = n \cdot (5^{n-1} - 4^{n-1})$
				$\{S12\}_n = 6^n - 5^n - n \cdot 5^{n-1}$

Es deixa per al lector seguir amb la taula per a casos amb més cares. No obstant això, es poden observar patrons molt bells. És realment sorprenent veure com apareixen regularitats “de les regularitats”. I tot això, només estudiant la distribució de n daus amb k cares.

- **Resolguem la darrera de les preguntes formulades: Quina distribució ens donarà si llancem quatre daus i ens quedem amb els dos daus centrals?**

Aquesta situació ens connecta de forma molt tangencial als esports on hi ha jutges i jutgesses que puntuen les actuacions dels esportistes i dels esportistes. En esports com la natació sincronitzada, salts de trampolí o gimnàstica artística, les puntuacions extremes (les més altes i les més baixes) s'eliminen per eliminar possibles sospites i normalitzar-ne les puntuacions. Amb aquesta idea, es proposa el repte següent:

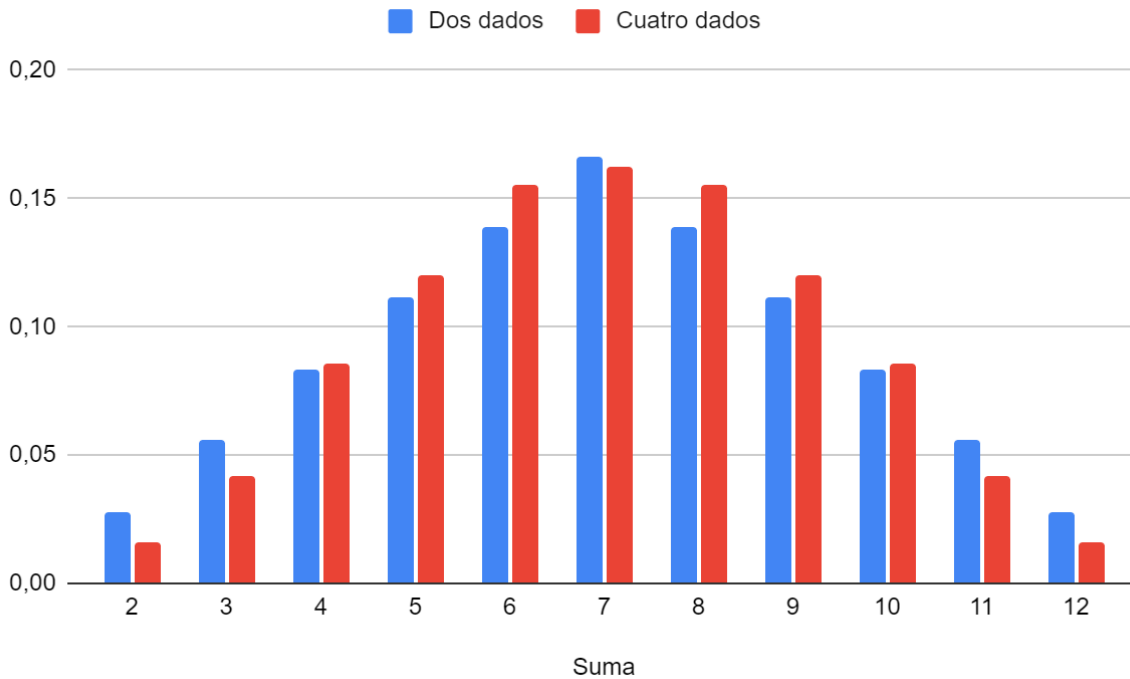
Llancem quatre daus i sumem les dues puntuacions centrals (eliminem la màxima i la mínima puntuació)

La dificultat més gran en aquesta situació es troba en com fer un recompte exhaustiu i sistemàtic dels $6^4 = 1296$ casos possibles. Una proposta de recompte és la següent:

Daus escollits	Casos quatre daus iguals	Casos tres daus iguals	Casos dues parelles de daus iguals	Casos de dos daus iguals i dos diferents	Casos amb quatre daus diferents	Total
1-1	1	$5 \cdot 4 = 20$	-	-	-	21
S = 2						21
1-2	-	-	6	$4 \cdot 12 = 48$	-	54
S = 3						54
1-3	-	-	6	$3 \cdot 12 = 36$	-	42
2-2	1	$5 \cdot 4 = 20$	-	$4 \cdot 12 = 48$	-	69
S = 4						111
1-4	-	-	6	$2 \cdot 12 = 24$	-	30
2-3	-	-	6	$4 \cdot 12 = 48$	$3 \cdot 24 = 72$	126
S = 5						156
1-5	-	-	6	12	-	18
2-4	-	-	6	$3 \cdot 12 = 36$	$2 \cdot 24 = 48$	90
3-3	1	$5 \cdot 4 = 20$	-	$6 \cdot 12 = 72$	-	93
S = 6						201

Daus escollits	Casos quatre daus iguals	Casos tres daus iguals	Casos dues parelles de daus iguals	Casos de dos daus iguals i dos diferents	Casos amb quatre daus diferents	Total
1-6	-	-	6	-	-	6
2-5	-	-	6	$2 \cdot 12 = 24$	24	54
3-4	-	-	6	$4 \cdot 12 = 48$	$4 \cdot 24 = 96$	150
S = 7						210
2-6	-	-	6	12	-	18
3-5	-	-	6	$3 \cdot 12 = 36$	$2 \cdot 24 = 48$	90
4-4	1	$5 \cdot 4 = 20$	-	$6 \cdot 12 = 72$	-	93
S = 8						
3-6	-	-	6	$2 \cdot 12 = 24$	-	30
4-5	-	-	6	$4 \cdot 12 = 48$	$3 \cdot 24 = 72$	126
S = 9						156
4-6	-	-	6	$3 \cdot 12 = 36$	-	42
5-5	1	$5 \cdot 4 = 20$	-	$4 \cdot 12 = 48$	-	69
S = 10						111
5-6	-	-	6	$4 \cdot 12 = 48$	-	54
S = 11						54
6-6	1	$5 \cdot 4 = 20$	-	-	-	21
S = 12						21

Com calia esperar, es manté la simetria respecte al resultat central $S = 7$. En aquest cas, podríem fer una comparativa entre el cas inicial (la suma de dos daus) i el cas actual:



En aquest cas, no hem estat capaços de trobar un patró per als casos $2n$ daus i sumar els dos daus centrals. Suposem que aquest patró ha de ser més difícil de trobar, ja que els valors centrals depenen tant dels valors anteriors com dels posteriors. Però, en matemàtiques, mai no es pot dir “d'aquesta aigua no beuré!”

Amic lector, estem segurs que mentre avançaves per les diferents variants que hem anat atacant, se t'hauran acudit noves variants... Agafa paper i llapis! Comença una nova aventura.

Món de les simulacions

Per a aquest problema i les seves ramificacions, el món de la programació pot arribar a fer un paper preponderant. D'una banda, tenim el món de la simulació per experimentar de manera molt més ràpida que la realitzada de forma manual. Aquest pas, però, no ha de provocar la supressió de l'experimentació amb daus. D'altra banda, també podem fer un recompte de casos possibles de forma sistemàtica per a situacions on fer-ho en paper i llapis sigui molt molest.

A continuació, recollim alguns programes fets en llenguatge Python. Tot i això, creiem que el millor programa està per fer; aquest serà el que puguin fer els nostres alumnes per poder estudiar aquells models que vulguin estudiar.

- Simulacions

Simulador que estudia la suma dels daus menors.

<https://trinket.io/python/cd725f1da9>

Simulador que estudia la suma dels daus més grans.

<https://trinket.io/python/469fd6b25f>

Simulador que estudia la suma dels daus amb major i menor puntuació.

<https://trinket.io/python/9767215200>

Simulador que estudia la suma dels daus centrals.

<https://trinket.io/python/09786c4245>

- Recompte de casos favorables

Recompte de casos favorables per a n daus i k cares sumant els dos daus menors.

<https://trinket.io/python/4fa2faed95>

Recompte sistemàtic de casos favorables des de 3 fins a n daus i k cares sumant els dos daus menors.

<https://trinket.io/python/0626b2d50c>

Recompte sistemàtic de casos favorables des de 3 fins a n daus i k cares sumant els dos daus majors.

<https://trinket.io/python/ea7e93219a>

Recompte sistemàtic de casos favorables des de 3 fins a n daus i k cares sumant el dau major i menor

<https://trinket.io/python/57f0a56b26>

Conclusions

En aquesta proposta es tracta un context aparentment ben simple: llançar diferents daus amb un nombre igual de cares i quedar-se amb la suma de dos. En funció del nombre de cares, de la quantitat de daus i del criteri d'elecció (menors, majors, extrems...) obtenim diferents models probabilístics.

Observeu que partint d'un context aparentment simple, es pot arribar a la formulació de models molt complexos. Així doncs, és un exemple fenomenal d'un problema de llindar baix, sostre alt i parets tan amples que no hem arribat a trobar-les.