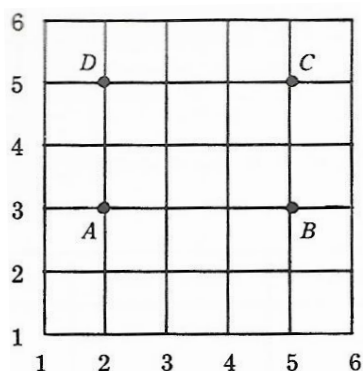


Rectangles aleatoris

A la següent quadrícula 5x5 els vèrtexs vénen determinats per parells (x,y) de nombres naturals ($1 \leq x \leq 6$ i $1 \leq y \leq 6$). Donats els punts A i C de coordenades (2,3) i (5,5) respectivament, construïm el rectangle ABCD de diagonal AC.



Considerem que la seqüència de quatre xifres 2355 d'una taula de números a l'atzar en base sis, caracteritza el rectangle ABCD. (Pot donar-se el cas d'un rectangle aixafat, seria el cas 3252, o que es redueixi a un punt, en el cas de la tira 5353).

Una urna conté 6 boles numerades 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Efectuem quatre extraccions amb reposició.

Quina és la probabilitat que aquesta seqüència de quatre xifres defineixi un quadrat?

Quina és la mitjana dels perímetres d'aquests rectangles?

Quina és la mitjana de les àrees dels rectangles?

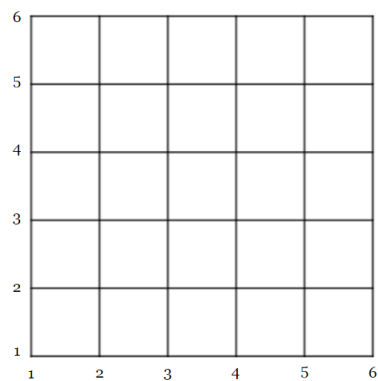
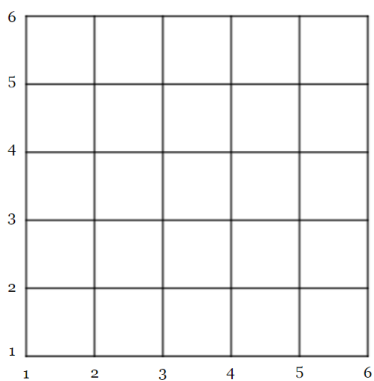
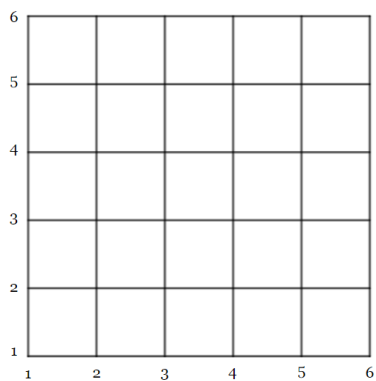
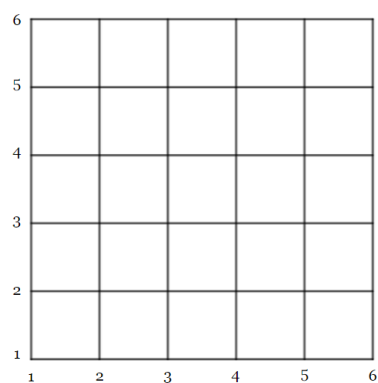
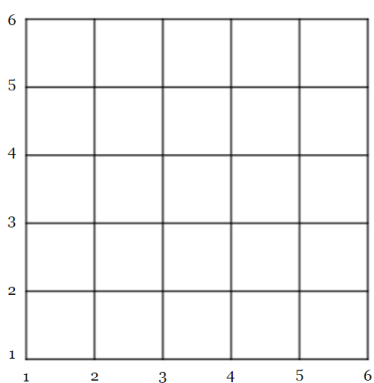
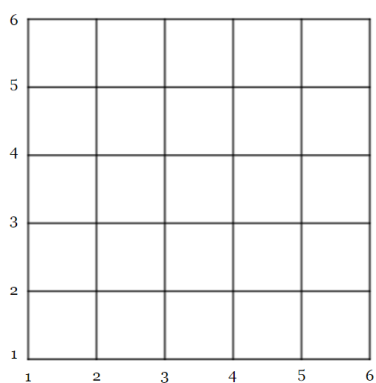
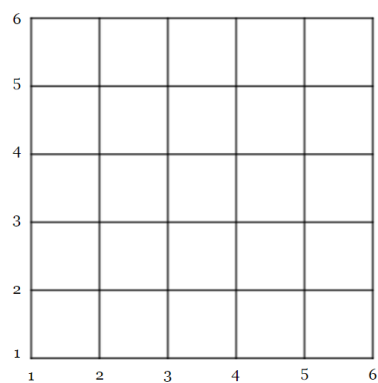
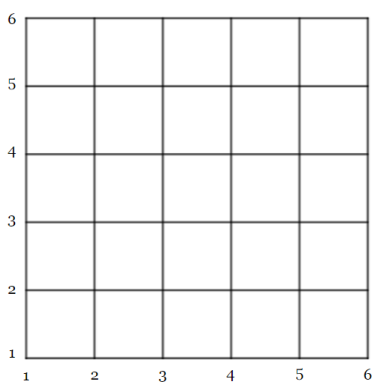
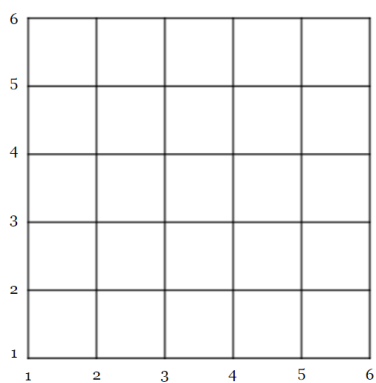
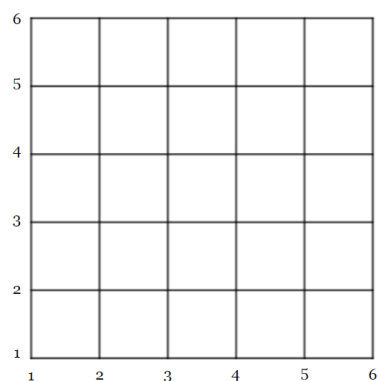
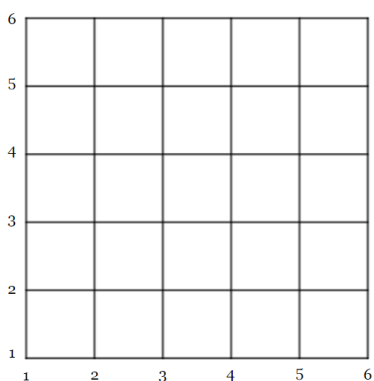
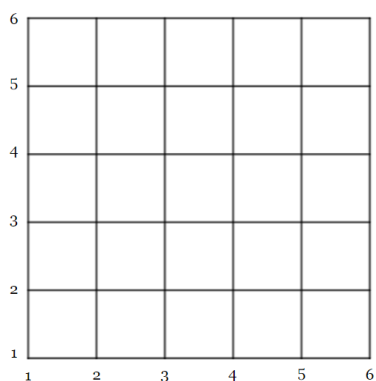
Experimentació:

Conjectures i formes d'abordatge a l'aula:

Generem preguntes:

Fragment de: GLAYMANN, M., VARGA (1975): *Les Probabilitats a l'escola*. Barcelona, Teide. ISBN 8430726993

Quadrícules

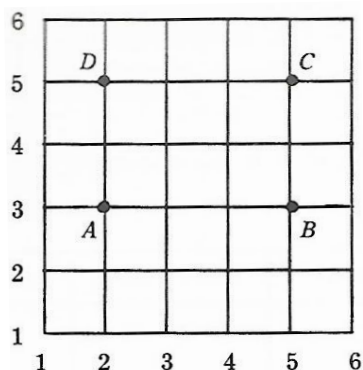


Segona part del taller: aprofundiment (25 minuts)

Resituació del problema.

Recordem l'enunciat

A la següent quadricula 5x5 els vèrtexs vénen determinats per parells (x,y) de nombres naturals ($1 \leq x \leq 6$ i $1 \leq y \leq 6$). Donats els punts A i C de coordenades (2,3) i (5,5) respectivament, construïm el rectangle ABCD de diagonal AC.



Considerem que la seqüència de quatre xifres 2355 d'una taula de números a l'atzar en base sis, caracteritza el rectangle ABCD. (Pot donar-se el cas d'un rectangle aixafat, seria el cas 3252, o que es redueixi a un punt, en el cas de la seqüència 5353).

Una urna conté 6 boles numerades 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Efectuem quatre extraccions amb reposició.

Quina és la probabilitat que aquesta seqüència de quatre xifres defineixi un quadrat?

Quina és la mitjana dels perímetres d'aquests rectangles?

Quina és la mitjana de les àrees dels rectangles?

Com ha anat l'experimentació realitzada a la primera part?

Quines conjectures hem fet?

Quines preguntes se'ns han plantejat?

Hi ha alguns rectangles especials o degenerats?

Què caracteritza un rectangle? I a un quadrat?

Com podem descobrir les distribucions per calcular les probabilitats?

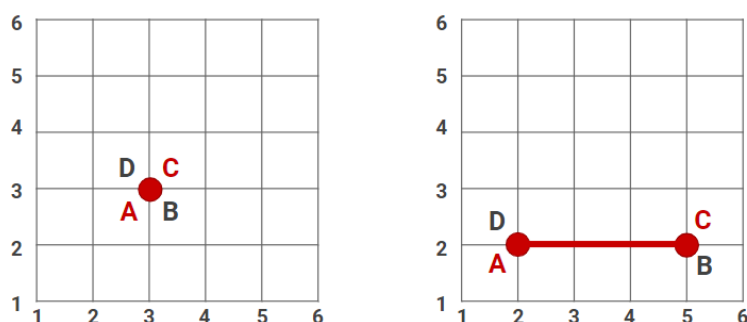
Com podem calcular la mitjana? Experimentalment? Teòricament?

L'abordatge del problema des d'un punt de vista matemàtic es pot fer pensant en la relació entre les posicions dels diferents vèrtexs i els rectangles que es poden obtenir, independentment de la posició ocupada (bases i alçades). Fent les taules de doble entrada amb els possibles valors de la seqüència de 4 xifres podem veure quins són els valors possibles per a la base i altura del rectangle.

base b		x_C					
		1	2	3	4	5	6
x_A	1	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

altura h		y_C					
		1	2	3	4	5	6
y_A	1	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

Podem observar com en funció dels vèrtexs obtinguts ens poden donar quadrats i rectangles degenerats, com per exemple en el cas $A=(2,3)$ i $C=(2,3)$ o el cas $A=(2,2)$ i $C=(5,2)$.



Mirem la distribució de la longitud de les diferents bases que podem obtenir (serà equivalent per a les altures)

base b		x_C					
		1	2	3	4	5	6
x_A	1	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

$$P(b = 0) = \frac{6}{36} = \frac{3}{18}$$

$$P(b = 1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P(b = 2) = \frac{8}{36} = \frac{4}{18}$$

$$P(b = 3) = \frac{6}{36} = \frac{3}{18}$$

$$P(b = 4) = \frac{4}{36} = \frac{2}{18}$$

$$P(b = 5) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Per tant, obtindrem quadrats quan la base i l'alçada siguin iguals:

$$P(\text{Quadrat}) = \sum_{i=0}^5 P(\text{quadrat de costat } i) = \left(\frac{3}{18}\right)^2 + \left(\frac{5}{18}\right)^2 + \left(\frac{4}{18}\right)^2 + \left(\frac{3}{18}\right)^2 + \left(\frac{2}{18}\right)^2 + \left(\frac{1}{18}\right)^2 = \\ = \frac{64}{324} \approx 0,1975$$

Per trobar la mitjana dels perímetres mirem primer quins perímetres podem obtenir a partir de les longituds de la base i l'altura dels diferents rectangles.

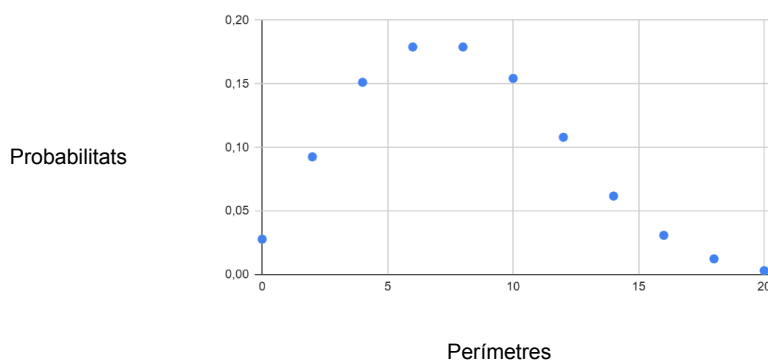
		base					
		0	1	2	3	4	5
altura	0	0	2	4	6	8	10
	1	2	4	6	8	10	12
	2	4	6	8	10	12	14
	3	6	8	10	12	14	16
	4	8	10	12	14	16	18
	5	10	12	14	16	18	20

Podem obtenir rectangles de perímetres: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 i 20.

Calcularem l'Esperança matemàtica com el valor mitjà que pot prendre la variable aleatòria perímetre i que s'obté sumant el producte dels diferents valors que la variable pot prendre per la seva probabilitat.

$$E(\text{perímetre}) = \sum P(\text{perímetre}) \cdot \text{perímetre} = P(\text{perímetre } 0) \cdot 0 + P(\text{perímetre } 2) \cdot 2 + \dots \\ + P(\text{perímetre } 18) \cdot 18 + P(\text{perímetre } 20) \cdot 20.$$

Si observem el gràfic que relaciona els perímetres i les seves probabilitats:



<i>Perímetre</i>	<i>Probabilitat</i>	<i>P(perímetre)·perímetre</i>
0	$\frac{3}{18} \cdot \frac{3}{18} = \frac{9}{324}$	$\frac{9}{324} \cdot 0 = 0$
2	$2 \cdot \frac{3}{18} \cdot \frac{5}{18} = \frac{30}{324}$	$\frac{30}{324} \cdot 2 = \frac{60}{324}$
4	$2 \cdot \frac{3}{18} \cdot \frac{4}{18} + \frac{5}{18} \cdot \frac{5}{18} = \frac{49}{324}$	$\frac{49}{324} \cdot 4 = \frac{196}{324}$
6	$2(\frac{3}{18} \cdot \frac{3}{18} + \frac{5}{18} \cdot \frac{4}{18}) = \frac{58}{324}$	$\frac{58}{324} \cdot 6 = \frac{348}{324}$
8	$2(\frac{3}{18} \cdot \frac{2}{18} + \frac{3}{18} \cdot \frac{5}{18}) + \frac{4}{18} \cdot \frac{4}{18} = \frac{58}{324}$	$\frac{58}{324} \cdot 8 = \frac{464}{324}$
10	$2(\frac{3}{18} \cdot \frac{1}{18} + \frac{2}{18} \cdot \frac{5}{18} + \frac{3}{18} \cdot \frac{4}{18}) = \frac{50}{324}$	$\frac{50}{324} \cdot 10 = \frac{500}{324}$
12	$2(\frac{5}{18} \cdot \frac{1}{18} + \frac{2}{18} \cdot \frac{4}{18}) + \frac{3}{18} \cdot \frac{3}{18} = \frac{35}{324}$	$\frac{35}{324} \cdot 12 = \frac{420}{324}$
14	$2(\frac{1}{18} \cdot \frac{4}{18} + \frac{2}{18} \cdot \frac{3}{18}) = \frac{20}{324}$	$\frac{20}{324} \cdot 14 = \frac{280}{324}$
16	$2 \cdot \frac{3}{18} \cdot \frac{1}{18} + \frac{2}{18} \cdot \frac{2}{18} = \frac{10}{324}$	$\frac{10}{324} \cdot 16 = \frac{160}{324}$
18	$2 \cdot \frac{2}{18} \cdot \frac{1}{18} = \frac{4}{324}$	$\frac{4}{324} \cdot 18 = \frac{72}{324}$
20	$\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{324}$	$\frac{1}{324} \cdot 20 = \frac{20}{324}$
	<i>Esperança matemàtica E(X)</i>	$\frac{2520}{324} \simeq 7,78$

Per trobar la mitjana de les àrees mirem primer quines àrees podem obtenir a partir de les longituds de la base i l'altura dels diferents rectangles.

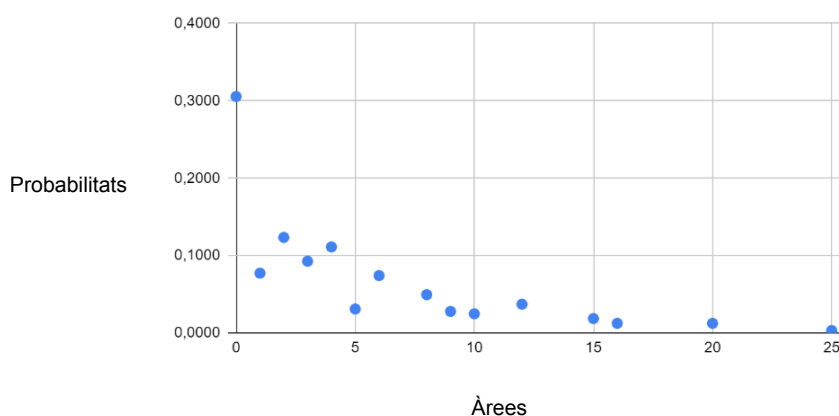
		base					
		0	1	2	3	4	5
altura	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	1	2	3	4	5
	2	0	2	4	6	8	10
	3	0	3	6	9	12	15
	4	0	4	8	12	16	20
	5	0	5	10	15	20	25

Podem obtenir rectangles d'àrees: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 20 i 25.

Calcularem l'Esperança matemàtica com el valor mitjà que pot prendre la variable aleatòria àrea i s'obté sumant el producte dels diferents valors que pot prendre la variable per la seva probabilitat.

$$E(\text{àrea}) = \sum P(\text{àrea}) \cdot \text{àrea} = P(\text{àrea } 0) \cdot 0 + P(\text{àrea } 1) \cdot 1 + \dots + P(\text{àrea } 20) \cdot 20 + P(\text{àrea } 25) \cdot 25$$

Si observem el gràfic que relaciona les àrees i les seves probabilitats:



Àrea	Probabilitat	$P(\text{àrea}) \cdot \text{àrea}$
0	$\frac{3}{18} \cdot (\frac{3}{18} + 2 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{4}{18} + 2 \cdot \frac{3}{18} + 2 \cdot \frac{2}{18} + 2 \cdot \frac{1}{18}) = \frac{99}{324}$	$\frac{99}{324} \cdot 0 = 0$
1	$\frac{5}{18} \cdot \frac{5}{18} = \frac{25}{324}$	$\frac{25}{324} \cdot 1 = \frac{25}{324}$
2	$2 \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{4}{18} = \frac{40}{324}$	$\frac{40}{324} \cdot 2 = \frac{80}{324}$
3	$2 \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{3}{18} = \frac{30}{324}$	$\frac{30}{324} \cdot 3 = \frac{90}{324}$
4	$2 \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{2}{18} + \frac{4}{18} \cdot \frac{4}{18} = \frac{36}{324}$	$\frac{36}{324} \cdot 4 = \frac{144}{324}$
5	$2 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{5}{18} = \frac{10}{324}$	$\frac{10}{324} \cdot 5 = \frac{50}{324}$
6	$2 \cdot \frac{4}{18} \cdot \frac{3}{18} = \frac{24}{324}$	$\frac{24}{324} \cdot 6 = \frac{144}{324}$
8	$2 \cdot \frac{4}{18} \cdot \frac{2}{18} = \frac{16}{324}$	$\frac{16}{324} \cdot 8 = \frac{128}{324}$
9	$\frac{3}{18} \cdot \frac{3}{18} = \frac{9}{324}$	$\frac{9}{324} \cdot 9 = \frac{81}{324}$
10	$2 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{4}{18} = \frac{8}{324}$	$\frac{8}{324} \cdot 10 = \frac{80}{324}$

12	$2 \cdot \frac{2}{18} \cdot \frac{3}{18} = \frac{12}{324}$	$\frac{12}{324} \cdot 12 = \frac{144}{324}$
15	$2 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{3}{18} = \frac{6}{324}$	$\frac{6}{324} \cdot 15 = \frac{90}{324}$
16	$\frac{2}{18} \cdot \frac{2}{18} = \frac{42}{324}$	$\frac{4}{324} \cdot 16 = \frac{64}{324}$
20	$2 \cdot \frac{2}{18} \cdot \frac{1}{18} = \frac{4}{324}$	$\frac{4}{324} \cdot 20 = \frac{80}{324}$
25	$\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{324}$	$\frac{1}{324} \cdot 25 = \frac{25}{324}$
	<i>Esperança matemàtica E(X)</i>	$\frac{1225}{324} \approx 3,78$

Una possible ampliació de l'activitat seria intentar generalitzar el càlcul d'aquestes probabilitats i mitjanes en funció del paràmetre $n \geq 1$, on n representa el valor més gran que pren la quadrícula. En el cas estudiat hem pres $n = 6$. Podem generalitzar-ho?

Cas $n = 1$

En el cas $n=1$ només podem tenir un punt on $A=(1,1)$ i $C=(1,1)$ que genera un quadrat degenerat al punt (1,1)

$P(\text{quadrat}) = 1$ amb àrea i perímetre 0.

Cas $n = 2$

		x_c	
		1	2
x_A	b	1	2
	1	0	1
	2	1	0

$$P(b = 0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(b = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{Quadrat}) = \sum_{i=0}^1 P(\text{quadrat de costat } i) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0,5$$

			base		
				0	1
altura	0	0	2		
	1	2	4		

<i>Perímetre</i>	<i>Probabilitat</i>	<i>P(perímetre)·perímetre</i>
0	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot 0 = 0$
2	$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$
4	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$
	<i>Esperança matemàtica E(X)</i>	2

		base	
		0	1
altura	0	0	0
	1	0	1

Àrea	Probabilitat	$P(\text{perímetre}) \cdot \text{perímetre}$
0	$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} \cdot 0 = 0$
1	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$
	Esperança matemàtica $E(X)$	$\frac{1}{4} = 0,25$

Cas $n = 3$

		x_c		
		1	2	3
base	b			
	1	0	1	2
x_A	2	1	0	1
	3	2	1	0

$$P(b = 0) = \frac{3}{9}$$

$$P(b = 1) = \frac{4}{9}$$

$$P(b = 2) = \frac{2}{9}$$

$$P(\text{Quadrat}) = \sum_{i=0}^2 P(\text{quadrat de costat } i) = \left(\frac{3}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{9}{81} + \frac{16}{81} + \frac{4}{81} = \frac{29}{81} \approx 0,36$$

		base		
		0	1	2
altura	0	0	2	4
	1	2	4	6
	2	4	6	8

Perímetre	Probabilitat	$P(\text{perímetre}) \cdot \text{perímetre}$
0	$\frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{9}{81}$	$\frac{9}{81} \cdot 0 = 0$
2	$2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{24}{81}$	$\frac{24}{81} \cdot 2 = \frac{48}{81}$
4	$2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{28}{81}$	$\frac{28}{81} \cdot 4 = \frac{112}{81}$
6	$2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{81}$	$\frac{16}{81} \cdot 6 = \frac{96}{81}$
8	$\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{81}$	$\frac{4}{81} \cdot 8 = \frac{32}{81}$
	Esperança matemàtica $E(X)$	$\frac{288}{81} \approx 3,56$

altura	base			Àrea	Probabilitat	$P(\text{perímetre}) \cdot \text{perímetre}$	
		0	1	2	0	$\frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{45}{81}$	$\frac{45}{81} \cdot 0 = 0$
	0	0	0	0	1	$\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$	$\frac{16}{81} \cdot 1 = \frac{16}{81}$
	1	0	1	2	2	$2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{81}$	$\frac{16}{81} \cdot 2 = \frac{32}{81}$
	2	0	2	4	4	$\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{81}$	$\frac{4}{81} \cdot 4 = \frac{16}{81}$
						Esperança matemàtica $E(X)$	$\frac{64}{81} \simeq 0,79$

Cas $n = k$

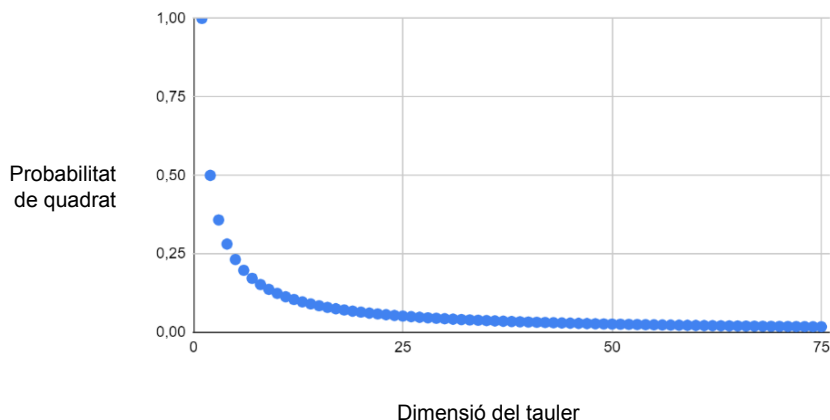
Observant la distribució de les longituds de les bases dels diferents exemples podem generalitzar:

base	Probabilidad
0	$\frac{1}{k}$
1	$\frac{2(k-1)}{k^2}$
2	$\frac{2(k-2)}{k^2}$
...	...
k-1	$\frac{2(k-(k-1))}{k^2}$

$$\begin{aligned}
 P(\text{Quadrat}) &= \sum_{i=0}^{k-1} P(\text{quadrat de costat } i) = \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{2(k-i)}{k^2}\right)^2 = \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{4}{k^2} \sum_{i=1}^{k-1} (k-i)^2\right) = \\
 &= \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{4}{k^2} \sum_{i=1}^{k-1} i^2\right) = \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{4}{k^2} \cdot \frac{(k-1)k(2k-1)}{6}\right) = \frac{2k}{k^2} \left(\frac{3k+4k^2-6k+2}{6k^2}\right) = \frac{4k^2-3k+2}{3k^3}
 \end{aligned}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(\text{quadrat})$	1	$\frac{12}{24} = 0,5$	$\frac{29}{81} \simeq 0,3586$	$\frac{9}{32} \simeq 0,286$	$\frac{29}{125} = 0,232$	$\frac{16}{81} \simeq 0,198$	$\frac{59}{343} \simeq 0,172$	$\frac{39}{256} \simeq 0,152$

Si observem el gràfic que relaciona la dimensió del tauler i les probabilitats de quadrat:

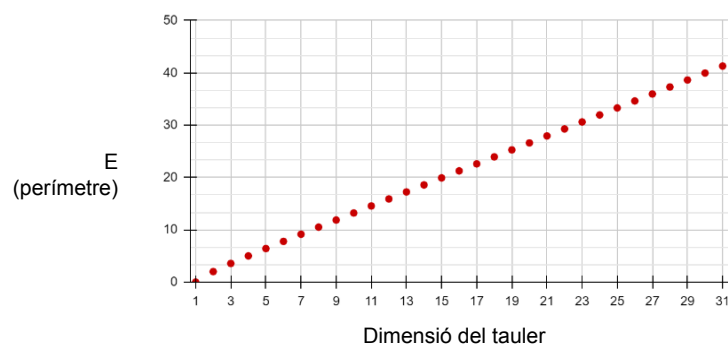


Observant la distribució de les mitges dels perímetres dels rectangles dels diferents exemples en un tauler $n \times n$ amb n natural ≥ 1 podem generalitzar:

Mesura del tauler	E (perímetre)	Mesura del tauler	E (perímetre)
$n = 1$	$\frac{0}{1^4} = 0$	$n = 7$	$\frac{21952}{7^4} \simeq 9,14$
$n = 2$	$\frac{32}{2^4} = 2$	$n = 8$	$\frac{43008}{8^4} = 10,5$
$n = 3$	$\frac{288}{3^4} \simeq 3,56$	$n = 9$	$\frac{77760}{9^4} \simeq 11,85$
$n = 4$	$\frac{1280}{4^4} = 5$	$n = 10$	$\frac{132000}{10^4} = 13,2$
$n = 5$	$\frac{4000}{5^4} \simeq 6,4$	$n = 11$	$\frac{212960}{11^4} \simeq 14,55$
$n = 6$	$\frac{10080}{6^4} \simeq 7,78$	$n = 12$	$\frac{329472}{12^4} \simeq 15,89$

$$E(\text{perímetres}) = \frac{4(k-1)k^3(k+1)}{3k^4} = \frac{4}{3} \frac{k^2-1}{k}$$

Perímetre mitjà dels rectangles



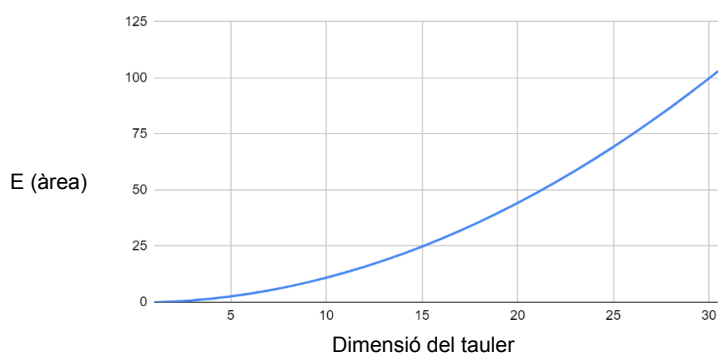
Observant la distribució de les mitjanes de les àrees dels rectangles dels diferents exemples en un tauler $n \times n$ amb $n \text{ natural} \geq 1$ podem generalitzar:

Mesura del tauler	E (àrea)	Mesura del tauler	E (àrea)
$n = 1$	$\frac{0}{1^4} = 0$	$n = 7$	$\frac{12544}{7^4} \approx 5.2245$
$n = 2$	$\frac{4}{2^4} = 0,25$	$n = 8$	$\frac{28224}{8^4} \approx 6.8906$
$n = 3$	$\frac{64}{3^4} \approx 0,7901$	$n = 9$	$\frac{57600}{9^4} \approx 8.7791$
$n = 4$	$\frac{400}{4^4} = 1.5625$	$n = 10$	$\frac{108900}{10^4} = 10,89$
$n = 5$	$\frac{1600}{5^4} = 2,56$	$n = 11$	$\frac{193600}{11^4} \approx 13.2231$
$n = 6$	$\frac{4900}{6^4} \approx 3.7809$	$n = 12$	$\frac{327184}{12^4} \approx 15.7785$

$$E(\text{àrea}) = \frac{(k-1)^2 k^2 (k+1)^2}{9k^4} = \frac{1}{9} \left(\frac{k^2-1}{k} \right)^2$$

També es pot expressar com $E(\text{àrea}) = \frac{1}{k^4} \cdot [A169801]$ (<https://oeis.org/A169801>)

Àrea mitjana dels rectangles



Món de les simulacions

El procés de simulació que hem realitzat “manualment” també pot realitzar-se per mitjans computacionals:

Simulació amb GeoGebra (Manel Martínez) - Rectangles aleatoris

<https://www.geogebra.org/m/kqstw9du>

Simulació amb Phyton (Adrià de Batlle i Marina Díaz -1r de Batxillerat) - Rectangles aleatoris

<https://trinket.io/python/1c02454236>

Simulació amb Snap (Raül Fernández) - Rectangles aleatoris

https://snap.berkeley.edu/project?username=raul&projectname=Varga_quadricula

Full de càlcul (Mario Delfa i Roger Canals - 1r Batxillerat) - Rectangles aleatoris

<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1tYoGoMlzmtmGCtQbrz8Qgt45sTg2ukHGN1euRaOdxFg/edit?usp=sharing>

Món dels models: activitats alternatives on subjau el mateix model probabilístic

En total esmentarem quatre contextos, que corresponen al mateix model probabilístic i que poden ser més adequats en funció del curs on es desenvolupi l'activitat. En alguns casos es proposen generadors aleatoris (amb diferents estats i que en fer-los funcionar s'obtenen a l'atzar un d'aquests estats) equivalents als de la proposta inicial:

- a. Bossa amb multilinks de colors
- b. Ruletes
- c. Quadrícula
- d. Camells mandrosos

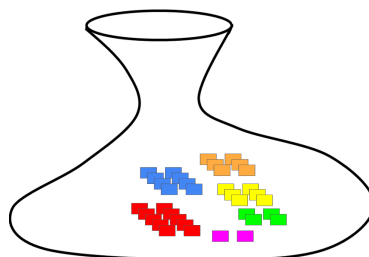
Una activitat molt interessant és que la construcció de diferents generadors aleatoris que tinguin la distribució de probabilitats equivalent a la que estem treballant sigui feta per part de l'alumnat.

a. Bossa amb multilinks de colors

Tenim una bossa amb 36 multilinks de colors amb la següent composició:

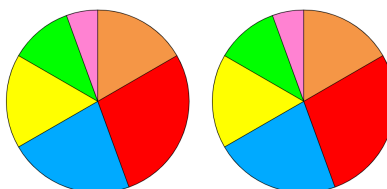
- 6 multilinks taronja
- 10 multilinks vermells
- 8 multilinks blaus
- 6 multilinks grocs
- 4 multilinks verds
- 2 multilinks magenta

Fem dues extraccions amb reposició. Quina és la probabilitat que surtin 2 multilinks del mateix color?



b. Ruleta amb sectors circulars de diferents colors

- Sector taronja de 60°
- Sector vermell de 100°
- Sector blau de 80°
- Sector groc de 60°
- Sector verd de 40°
- Sector magenta de 20°



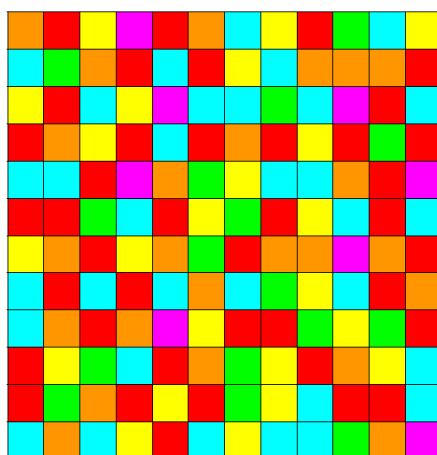
Fem dues tirades consecutives amb la ruleta. Quina és la probabilitat que surti 2 cops el mateix color?

c. Quadrícula

Tenim una quadrícula formada per 144 tesselles quadrades de 10 cm de costat, amb la distribució següent:

- 24 tesselles taronja
- 40 tesselles vermelles
- 32 tesselles blaves
- 24 tesselles grogues
- 16 tesselles verdes
- 8 tessellacions magenta

Tirem a l'atzar monedes sobre la quadrícula. Quina és la probabilitat que en llançar dues monedes ens caiguin en el mateix color?



Simulació amb GeoGebra (Manel Martínez) - Llançament de dues monedes sobre la quadrícula
<https://www.geogebra.org/m/ugrwdz5y>

d. Camells mandrosos

Tenim 6 camells numerats de l'1 al 6. Aquests camells són una mica particulars i només avancen si reben dues vegades seguides la mateixa ordre.



Tirem dos daus i perquè un camell avanci en llançar els daus ha de coincidir el seu nombre amb el dels dos daus. Quina és la probabilitat que un camell avanci?

Simulació amb GeoGebra (Manel Martínez) - Camells mandrosos
<https://www.geogebra.org/m/rsy8mz6n>