

Mathematisches Labor

Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit

Spielanleitungen



Klett

Primera edició

15 4 3 2 1 | 1976 75 74 73 72

Totes les imatges d'aquesta edició es poden utilitzar una al costat de l'altra a l'aula.
L'últim número indica l'any d'aquesta impressió.

© Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1972.

La còpia i transmissió de seccions individuals de text, dibuixos o imatges, també amb finalitats docents, només està permesa per la llei de drets d'autor si així s'ha acordat prèviament amb l'editor. En casos individuals, s'ha de prendre una decisió sobre el pagament d'una taxa per l'ús de la propietat intel·lectual d'una altra persona. Això s'aplica a la reproducció per qualsevol mitjà, inclòs l'emmagatzematge i qualsevol transferència a paper, transparència, pel·lícula, cinta, disc i altres suports.

Fotos: Vollmer Studio, Winnenden, Schloßstraße 11

Dibuixos: Roni Druckner, Stuttgart, Herzogstrasse 2

Impressió: Union-Druckerei, Stuttgart, Cottastraße 13

ISBN3-12-168260-1

Laboratori de Matemàtiques

Combinatòria i probabilitat

Spielanleitungen

**Suggestiments per a l'ús del
laboratori de matemàtiques**

Ernst Klett Stuttgart

Per a què serveix el laboratori?

Es pot jugar sol, en parelles, de tres en tres. . .

Fer proves, experimentar.

Per trobar, comprendre i resoldre problemes.

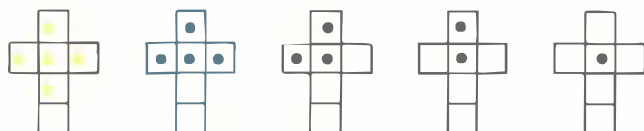
Les tasques del càlcul de probabilitats s'aprenen mentre es juga, així com les tasques d'altres àrees.



Cadascú ha de provar per si mateix el que pot fer amb aquest laboratori sense ajuda externa.

No només s'han d'entendre els jocs proposats, sinó que segur que el descobriment independent de jocs interessants aportarà molta alegria.

Els elements del laboratori



Quin número apareixerà quan tireu el dau? Sortirà un punt o no?

Amb alguns daus, el resultat es pot predir amb una certesa raonable, amb d'altres el resultat gairebé mai no coincideix amb l'estimació.

Quant de temps has de llançar fins que l'estimació i el resultat coincideixin?

Quina és la suma dels números quan tires diversos daus? Quines sumes es produeixen amb freqüència i quines rarament? Es poden pintar un conjunt de cubs de colors naturals (sense relleu) segons els requisits dels vostres propis experiments.



A quin color s'aturarà el punter de la ruleta o a quin número?

Algunes ruletes es comporten de la mateixa manera que alguns daus. Quina ruleta correspon a quin dau?



Podeu construir diferents torres a partir dels cubs connectats. Quantes torres diferents hi ha que contenen exactament els tres colors: vermell, blau i groc?



Tot això són torres?

Quantes possibilitats hi ha si construïm torres a partir de només dos cubs i tornem a utilitzar tres colors? Què passa si un color pot aparèixer dues vegades en una torre?

Per contra, també podeu construir torres a partir de tres cubs que només contenen dos colors. Quantes opcions hi ha ara?

Podem dur a terme experiments similars enfilant perles a cadenes.



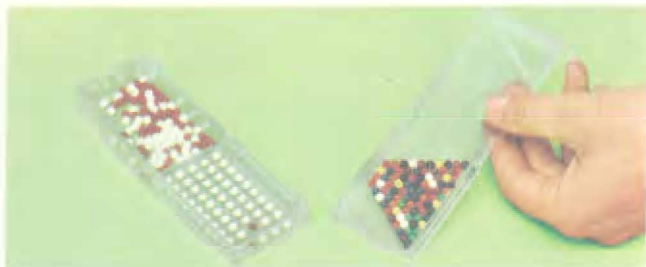
Aquestes cadenes són iguals o diferents? Considerarem dues cadenes iguals si les pots posar una sobre l'altra perquè coincideixin tots els colors.



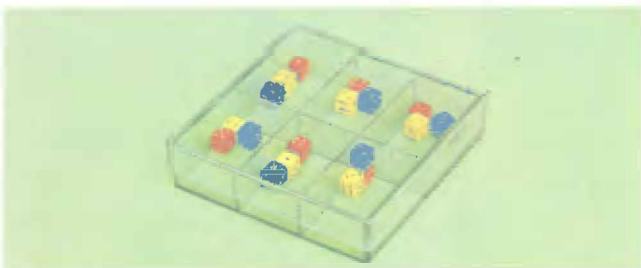
Sacsegem la caixa amb 6 boles (s'eliminen els envans) i la subjectem perquè les boles en moviment (al camp gran) s'alineïn al costat de les fixes.

A la imatge, cap bola coincideix de color. Quines són les opcions: 1, 2, 3, 4, 5, 6 boles poden coincidir de color? Quines possibilitats es donen amb més freqüència, quines amb menys freqüència?

També podem fer el mateix experiment amb menys colors inserint particions a la caixa.



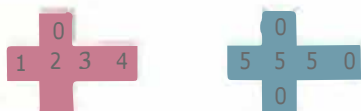
A les caixes de mostres podem posar diferents nombres de perles de diferents colors (població total). Cada subconjunt d'aquesta població s'anomena mostra. Si manteniú la caixa de la dreta tal com es mostra a la imatge, les perles s'alineen molt bé: hi ha una perla a la cantonada inferior, dues a la part superior, etc. Comptem des de la part inferior una fila alhora i cada fila contem d'esquerra a dreta. D'aquesta manera, es poden prendre mostres de qualsevol mida. A la caixa de mostres que es mostra a la figura de l'esquerra, sempre tenim mostres fixes de mida 50.



Cada vegada que sacsegem aquesta caixa, fem 6 intents. Quina és la suma dels nombres de cada quadre? En quantes caselles apareixen les mateixes sumes? En quantes caixes el dau blau mostra el mateix nombre? Estableix tu mateix més problemes i intenta resoldre'ls!



Les xarxes dels cubs d'aquest quadre tenen aquest aspecte:



Si l'àrea buida apareix a la part superior del cub vermell, l'experiment s'ha de repetir. Si sacseja la caixa una vegada, és el mateix experiment que llançar l'icosaedre tres vegades o fer girar la ruleta amb els números 0 - 9 tres vegades. - Em pregunto per què?

L'ús de dígit aleatoris

Fa uns 20 anys es va llançar un "bon" dau decimal un milió de vegades, el resultat es va resumir en un llibre. Quatre pàgines d'aquests números aleatoris s'inclouen al laboratori, en 12 còpies de cadascuna. Quines són les propietats d'aquests nombres aleatoris?

a) La probabilitat que qualsevol dígit aparegui en una posició donada és $1/10$.

b) Si es llegeixen els dígit aleatoris en blocs de dos dígit cadascun (per exemple, 43, 35, ...), aleshores la probabilitat d'un determinat bloc en un punt determinat és

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

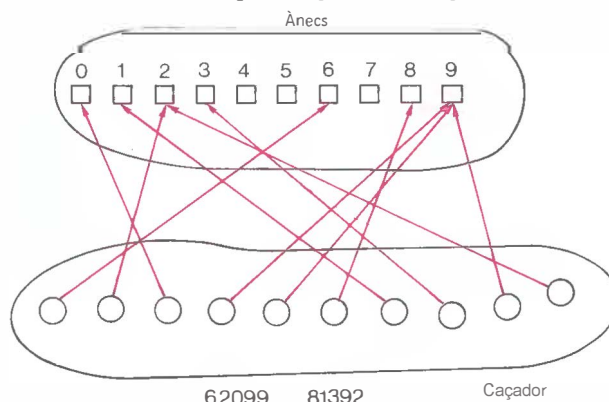
c) La probabilitat d'una xifra parell (senar) ascendeix a $\frac{1}{2}$.

La taula de dígit aleatoris es pot utilitzar per simular experiments aleatoris.

Per simular una bona moneda, es pot utilitzar el mapa següent:

dígit parell cara, dígit senar creu.

Per simular un bon dau, podeu ignorar els dígit 0, 7, 8, 9.



Deu caçadors, tots perfectes tiradors, van a caçar ànecs. S'amaguen a la vora d'un petit estany. Aviat 10 ànecs aterran a l'estany. Els caçadors disparen simultàniament, però cadascun tria la seva víctima a l'atzar. Quants ànecs sobreviuen si això es repeteix moltes vegades?

Es pot simular aquest experiment amb dígit aleatoris? A cada alumne se li lliura un full de nombres aleatoris. El primer alumne agafa el bloc dels 10 primers dígit de la primera línia, el segon alumne utilitza la segona línia, etc.

Al bloc de deu observem els dígit que falten, p. per exemple, el bloc de números considerat de la 1a línia del full I és: 62099 81392 és a dir els ànecs 4, 5, 7 sobreviuen.

Si tenim uns 10 alumnes i fem servir el full I dels nombres aleatoris, el nombre d'ànecs supervivents és: 3, 4, 5, 4, 3, 2, 5, 3, 3, 3.

La mitjana és de 3,5.

Volem comprovar que aquesta també és la mitjana esperada. Per fer-ho, escollim qualsevol ànec, diguem l'ànec 5. Quina és la probabilitat que aquest ànec sobrevisqui? Sobrevisqui exactament quan cap caçador apunta a aquest ànec. La probabilitat que això passi és $(0,9)^{10} = 0,349$. Cadascun dels 10 ànecs sobreviscu amb una probabilitat de 0,349. Per tant, hi ha de mitjana 3,49 ànecs supervivents.

Instruccions del joc

Observacions preliminars:

1. Les regles dels 13 jocs d'estratègia següents estan formulades de manera que tots els jocs es puguin jugar amb els elements del laboratori. Tanmateix, el professor no s'ha de sentir limitat per aquests materials, ha de deixar volar la seva imaginació; per exemple, a l'hipòdrom, sovint és millor jugar amb cotxes petits que amb peces de joc, o per al guanyador una copa de premi és més interessant que només un nombre màxim de punts guanyadors.

2. A les descripcions del joc, primer s'esmenta el material necessari; se segueix amb les regles del joc, després es mostren les possibles variacions del joc en qüestió. Es conclou amb les notes per al professor.

2.1. De vegades, les regles del joc es referiran al Jugador 1 i Jugador 2. Aleshores, el Jugador 2 és el jugador que se suposa que ha d'obtenir un avantatge sobre l'altre. Totes les regles del joc estan formulades de manera que les possibilitats de guanyar siguin iguals per a tots els jugadors o una mica més altes per al segon.

2.2. A les notes, es van adoptar deliberadament diferents enfocaments per tal de proporcionar el màxim de suggeriments possibles mantenint l'abast reduït. De vegades hi ha suggeriments per a la discussió amb els alumnes.

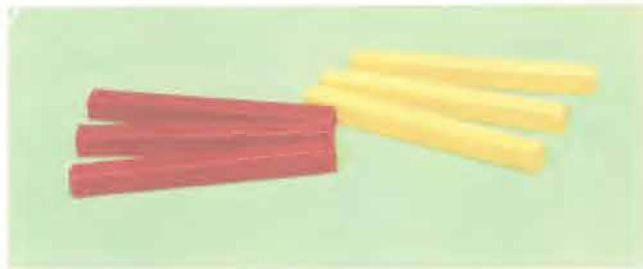
De vegades es donen algorismes econòmics per a l'anàlisi del joc. En altres casos, es discuteix el fons teòric.

1. Qui construeix més torres?

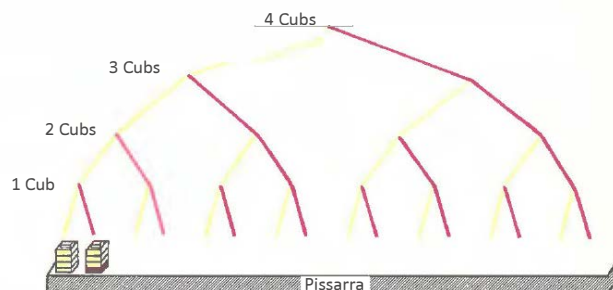
(La classe es dividirà en grups de quatre o cinc)

Material:

Per a cada grup 30 cubs vermells i 30 grocs:



El següent arbre està dibuixat a la pissarra:



Regles del joc:

S'han de construir totes les torres diferents possibles a partir de quatre cubs encaixables (en dos colors) i assignar-les a les branques de l'arbre.

A la senyal d'inici, cada grup comença a construir torres de quatre nivells.

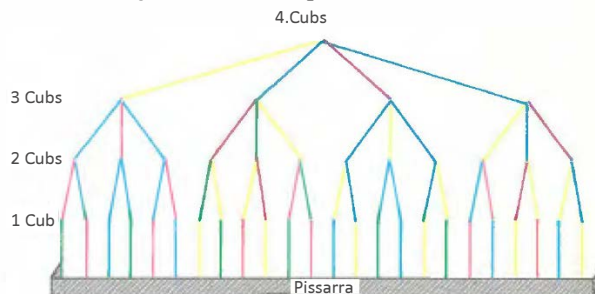
Quan un grup acaba una torre, un nen del grup l'aixeca i tots els grups deixen de treballar.

L'alumne amb la torre completada va a la pissarra, s'enfila a la torre de dalt a baix a través de l'arbre i la disposa al lloc correcte de la prestatgeria de la pissarra. Si no hi ha cap torre en aquest lloc, el grup obté un punt.

El guanyador és el grup amb més punts guanyadors quan tots els extrems de l'arbre estan ocupats.

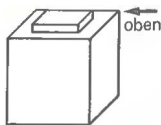
Variant:

Cada grup té 30 cubs encaixables vermells, 30 blaus, 30 verds i 30 grocs, que ara s'utilitzaran per construir torres de quatre nivells. Tanmateix, cada color s'ha d'utilitzar exactament una vegada a cada torre. Aquesta vegada es dibuixa el següent arbre a la pissarra:

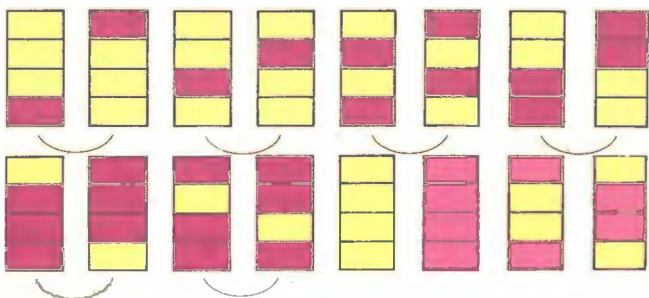


Observacions:

1. Amb les torres s'ha de distingir clarament entre "a dalt" i "a sota". La manera més senzilla de fer-ho és alinear la superfície del cub encaixable amb el mugró per connectar-lo "amunt".



Si no es diferencia entre "a dalt" i "a sota", dues torres diferents es poden convertir en el mateix cub girant-les, i el nombre de cubs diferents queda limitat:

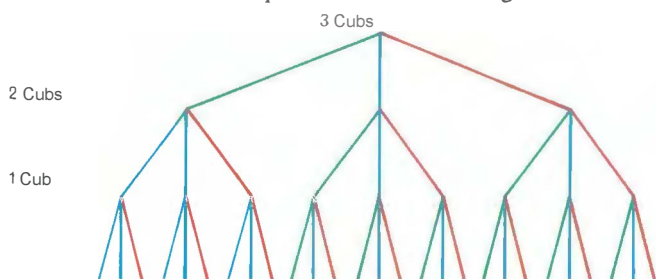


La figura mostra totes les torres possibles de 4 nivells en dos colors. Les torres connectades són les mateixes si no es distingeixen entre la part superior i la inferior. Aleshores només tindreu 10 torres en lloc de les 16 diferents habituals.

2. Per descomptat, també podeu utilitzar més colors o fer que les torres siguin més altes o més baixes. En el primer cas (un color pot aparèixer més d'una vegada en una torre), el següent s'aplica al nombre a de diferents torres:

$$a = f^s \quad \text{amb} \quad f = \text{nombre de colors diferents} \\ s = \text{nombre de nivells de torres}$$

Per exemple, obteniu 27 torres diferents amb 3 colors i 3 nivells. Aquest és l'arbre obtingut:



La fórmula per determinar les diferents torres és fàcil d'entendre: l'arbre té f punts de ramificació, i cada punt de ramificació té s branques.

En el segon cas (cada color apareix exactament una vegada a cada torre) s'aplica al nombre b de torres:

$$b = f(f-1)(f-2) \cdots (f-s+1)$$

amb $f =$ Nombre de colors diferents

$s =$ Nombre de nivells de les torres, on $f \geq s$, ja que cada color només es pot utilitzar una vegada.

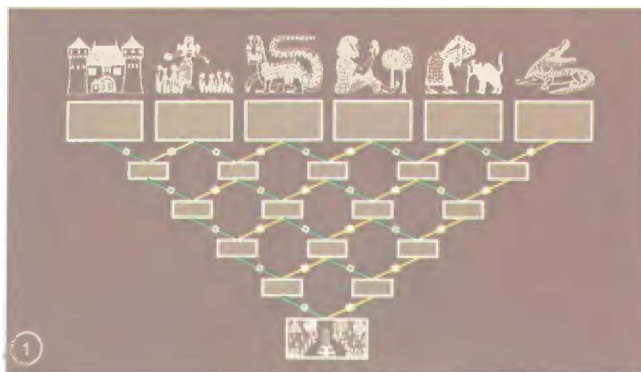
Per exemple, per a torres de 3 nivells amb daus de 6 colors: $b = 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Aquesta fórmula també es pot entendre fàcilment utilitzant l'arbre: f branques surten del graó superior. En la següent etapa, $(f-1)$ les ramificacions es ramifiquen de cada punt de ramificació. Finalment, al nivell més baix, $(f-s+1)$ es ramifica de cada punt de ramificació.

2. La ciutat fantasma (de 4 a 5 jugadors)

Material:

Tauler de joc 1:



1 dau amb un punt verd a tres cares i les 3 restants blanques.



5 peons de diferents colors



80 fitxes d'un color.

Regles del joc:

Cada jugador comença el seu viatge per la ciutat al parc. Ha de travessar la ciutat encantada i mai pot fer marxa enrere. A cada intersecció ha de tirar el dau i triar la seva direcció de viatge tal com indica el dau. (Si hi ha un punt verd a la superfície del dau, va cap a l'esquerra, en cas contrari cap a la dreta).

Els daus es llancen alternativament; no importa qui comenci.

La ciutat fantasma està governada per 6 éssers:

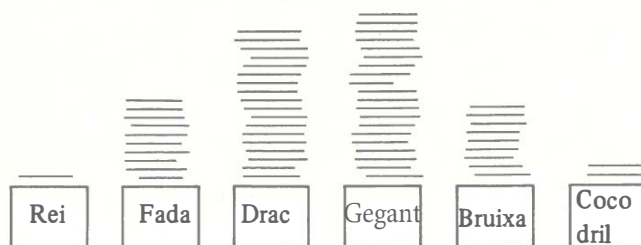
1. A la plaça un cocodril devora tota la gent que hi arriba.
2. En una altra plaça, la bruixa fa malifetes i posa a la presó tots els nouvinguts.
3. Un gegant obliga a tots els que arriben a fer treballs d'esclaus en una mina de carbó.
4. Un drac vigila en un lloc amagat per rostir al seu forn qualsevol que passi.
5. Una mica fora d'aquests éssers malvats, una fada habita i convida a tots els vinguts a descansar, menjar bé i passar unes vacances al seu bonic jardí.
6. En un darrer lloc habita un rei de bon cor que fa magnífics regals a tots els que hi passen.

Després de fer el seu camí per la ciutat, cada jugador col·loca una fitxa al lloc on ha aterrat. Comença una nova ronda.

Observacions:

1. El joc d'aquest tauler, que s'estructura segons el tauler de galton, fa visible l'estructura del triangle de Pascal
2. Si jugues a aquest joc a la classe en diversos grups el millor és marcar els 6 llocs de destinació a la pissarra i cada alumne dibuixa una línia horitzontal al lloc on arriba.

A continuació, els resultats de l'histograma següent:



Els histogrames també es poden construir a partir de cubs connectats

L'histograma és una ocasió per discutir les diferents freqüències

Això porta immediatament a la qüestió del nombre de rutes a les places individuals

3 El nombre de camins als llocs individuals ens dona el triangle de Pascal:

		1			
	1	1			
	1	2	1		
	1	3	3	1	
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

3. Igual o desigual? (per a 2 jugadors)

Material:

- 1 Perla Blanca i diferents

perles vermelles (màxim 10):



- 1 gobelet de daus



Regles del joc:

El jugador 1 col·loca la perla blanca i tantes perles vermelles com vulgui (mínim 1) en un gobelet de daus. Aleshores, el jugador 2 tria 2 perles amb els ulls tancats. Abans de triar, ha d'endevinar si les dues perles seran del mateix color o diferents.



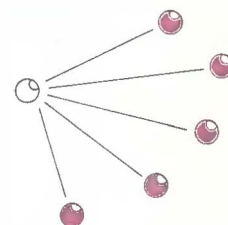
Si ho endevina, el jugador 2 guanya un punt, en cas contrari el jugador 1 guanya un punt. El guanyador decideix quantes perles vermelles van a la copa de daus per a la següent ronda, és a dir, si el jugador 2 perd, també ha d'endevinar a la partida següent; si guanya, tria les perles i el jugador 1 és ara araqui ha d'endevinar.

Variants:

1. En lloc de comptar els punts guanyadors, pots moure la pilota espai a espai cap a la porteria de l'oponent al tauler de joc 3 (vegeu la variant 4 a 9. Atrapa). Si hi ha un nombre imparell de camps de joc (el millor és triar només 5 camps de joc), la pilota es troba inicialment al mig del terreny de joc. Si el jugador 2 guanya, la pilota es mou un espai cap a la porteria del jugador 1; Si el jugador 2 perd, la pilota es mou cap a la seva pròpia porteria. Continua en conseqüència.

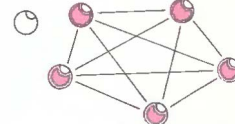
2. També pots variar el joc donant dos perles blanques o qualsevol altre número de perles de diversos colors.

Anotació: Si poseu una perla blanca i n vermelles a la tassa de daus, hi ha n possibilitats de dibuixar dues perles de colors diferents, com a exemple,



considerem el cas que hi ha 1 perla blanca i 5 de vermelles

D'altra banda, si voleu dibuixar dues perles del mateix color això comporta 10 possibilitats (en general amb 1 perla blanca i n de vermelles hi ha a $n(n-1)/2$ possibilitats, degut a que cada perla vermella es pot dibuixar amb cada una de les $(n-1)$ perles vermelles restants, de manera que per raons de simetria només es poden dibuixar la meitat dels casos que produeixen)



Els resultats de la taula següent per als primers casos (d'1 a 10 perles vermelles):

Perles vermelles	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Per tant, amb només 1 o 2 perles vermelles, és més probable que trieu 2 perles de diferents colors. Amb 3 perles vermelles, les possibilitats ja són iguals; i a mesura que augmenta el nombre de perles vermelles, cada cop és més probable triar dues perles del mateix color.

4. El cub deformat (per a 2 o més jugadors)

Material:

1 cub deformat



Regles del joc:

L'objectiu és endevinar quin número es produeix amb més freqüència quan el dau es llança diverses vegades, quin és el segon més freqüent, etc.

Els jugadors acorden un nombre total de llançaments al principi, per exemple 20.

Cada jugador escriu la seva conjectura com:

més freqüentment: $\rightarrow 0 \ 4 \ 1 \ 2 \ 5 \ 3 \leftarrow$ el més rar

El nombre de punts que es produeix en cada cas es registra en un recompte. Per exemple, en un joc amb 20 daus:

0 **||||**
1 **||**
2 **|||**
3 **|**
4 **|||| |||**
5 **|**

L'ordre està aquí: 4 0 2 1 **3 5**

El quadre al voltant dels números 3 i 5 significa que tots dos números es van produir amb la mateixa freqüència, és a dir els ordres

$\rightarrow 4 \ 0 \ 2 \ 1 \ 3 \ 5 \leftarrow$ i $\rightarrow 4 \ 0 \ 2 \ 1 \ 5 \ 3 \leftarrow$
són equivalents.

Maneres de determinar el guanyador:

1a possibilitat:

El guanyador és el jugador que coincideixi amb més números correctament.

2a possibilitat:

El guanyador és el jugador amb la suma més baixa de les desviacions dels llocs individuals de l'ordre llançat.

Tornem a l'exemple anterior. Es diu que els jugadors A i B han assumit les seqüències següents per a les freqüències:

A: $\rightarrow 0 \ 4 \ 1 \ 2 \ 5 \ 3 \leftarrow$

B: $\rightarrow 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \leftarrow$

A continuació, els resultats de l'avaluació següents:

1. Possibilitat:

Ordre seqüència	4 0 2 1 3 5	Coincidències
Ordre assumit } A	0 4 1 2 <u>5</u> <u>3</u>	2 (5 i 3)
B	0 1 <u>2</u> 3 4 <u>5</u>	2 (2 i 5)

és a dir el partit acaba en empat.

2. Possibilitat:

Ordre seqüència	4 0 2 1 3 5	Suma
Ordre A	0 4 1 2 5 3	
distàncies	1 1 1 1 0 0	4
Ordre B	0 1 2 3 4 5	
distàncies	1 2 0 1 4 0	8

En la segona possibilitat de recompte, el jugador A té molt més èxit que el jugador B.

Variants:

1. Cada jugador pot desafiar els seus oponents afirmant que no va tenir sort perquè el temps de joc era massa curt. D'aquesta manera, es pot experimentar en quin nombre de llançaments les fluctuacions aleatòries amb prou feines tenen un paper.

2. El professor pot especificar diferents rodes de ruleta, com ara:



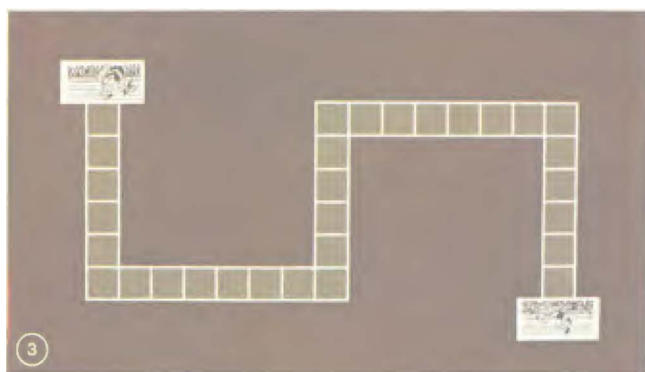
Cal decidir quina ruleta s'adapta millor; els números dels daus s'han d'introduir als camps corresponents.

3. En lloc de jugar amb un dau esbiaixat, també pots jugar amb un dau normal. A la llarga, cap comanda aquí serà excel·lent. Però també pots llançar 2 daus i demanar la suma dels números: Quina suma és més habitual? Hi ha sumes igualment comunes?

5. La cursa (de 2 a 4 jugadors)

Material:

Tauler de joc 3



(Els retols d'Inici i Final es col·loquen a l'inici i al final de l'hipòdrom de manera que es juguin els 30 camps).

4 Peons de diferents colors



1 Cub amb un punt negre en una cara, les altres cares estan buides.



Regles del joc:

Les curses es realitzen al circuit. Un jugador rere l'altre llança el dau, però abans ha de predir si el punt negre apareixerà a la superfície superior del dau o no. Si endevina correctament, pot avançar 1 espai, en cas contrari s'ha de quedar quiet. El guanyador és qui arriba primer a la porta.

Variants

1. Per evitar apostar sempre per l'esdeveniment més probable (espai en blanc a dalt), pots deixar que el jugador avanci 2 o més caselles si tria correctament el punt negre, però només 1 casella si tria correctament la superfície en blanc.

2. Per descomptat, també pots triar altres daus (per exemple els daus del laboratori que encara no s'han pintat), amb 4 zones vermelles, 1 verda i 1 blava o amb 3 zones vermelles, 2 verdes i 1 blava, per la qual cosa s'ha de predir el color correcte en cada cas. O prens 2 o 3 daus amb cares de colors diferents, per la qual cosa s'ha de predir el nombre de cares que apareixen en cada color.

Aquí podeu tornar a variar, ja que el jugador pot avançar tantes caselles com colors correctes ha predit, però al mateix temps ha de tornar enrere tants caselles com colors equivocats ha predit.

Anotació:

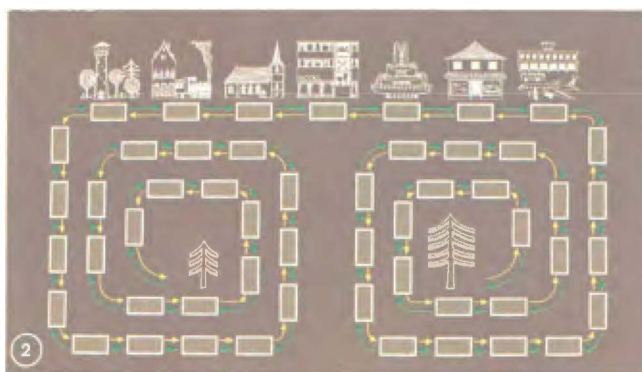
En aquest joc, els nens s'enfronten al problema de fer que el "valor esperat" per a una victòria sigui el més alt possible. Es proposen diferents estratègies:

1. Els colors es prediuen purament a l'atzar.
2. Els colors es prediuen alternativament en aproximadament la mateixa proporció que es comporten els nombres de cares de cub de colors corresponents.
3. Sempre es prediu el color que hi ha a més cares de daus.

6. El viatge casual del taxista (de 2 a 6 jugadors)

Material:

Tauler de joc 2:



1 Dau amb un punt verd a tres cares, les altres cares són blanques



6 Peons de diferents colors



Regles del joc:

El taxista només pot portar un passatger d'un lloc (per exemple, l'estació de tren) a l'altre. No escolta els desitjos dels passatgers, però quan un passatger puja, llança el dau. Si apareix un punt verd a sobre, condueix en la direcció de les fletxes verdes, en cas contrari en la direcció de les fletxes grogues. Cada jugador és el seu propi taxista. Els daus es llancen al seu torn. L'inici està a l'hotel.

El guanyador és qui arriba primer a un avet.

Observacions:

1. Des de l'hotel, les probabilitats són:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Església} \\ \text{Font} \end{array} \right\} \frac{1}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Estació de tren} \\ \text{Fleca} \end{array} \right\} \frac{1}{4} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Torre d'observació} \\ \text{Aeroport} \end{array} \right\} \frac{1}{8}$$

La probabilitat d'arribar a l'avet gran o petit és només marginal $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \approx \frac{1}{134\,000\,000}$, el que és extraordinàriament petit.

2. Si els estudiants volen abandonar el joc decepcionats, hi ha un motiu per discutir les preguntes següents:

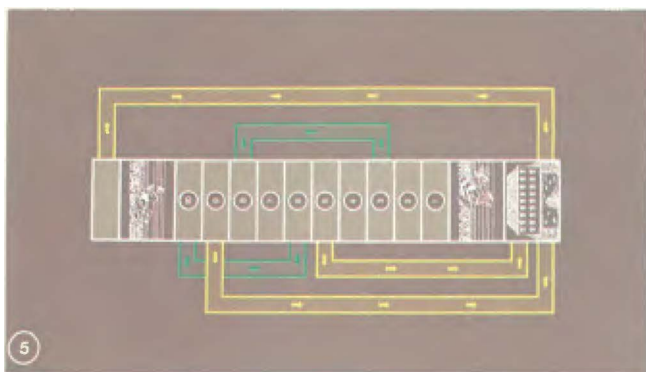
- a) Fins i tot és possible arribar a un avet?
- b) On és el taxista més sovint, davant de la fleca o davant de l'hotel?
- c) On és més probable que arribi: a l'avet gran o al petit?
- d) On és més probable que vingui: a l'aeroport o a l'estació de tren?

Per respondre a aquestes preguntes de manera experimental, cada jugador pot col·locar una fitxa al lloc on acaba d'arribar després del seu llançament. (O cada grup de joc manté un recompte de freqüències.) La distribució de fitxes és llavors una mesura de la probabilitat d'arribar a cada lloc.

7. El joc de l'escala (de 4 a 5 jugadors)

Material:

Taulell de joc 5:



1 Cub amb 3 cares amb un punt verd i 3 cares buides



5 peons de diferents colors



80 fitxes d'un color

Regles del joc:

Al començament del joc, cada jugador rep 10 fitxes. Les fitxes restants van al banc. Cada jugador col·loca la seva fitxa al camp d'Inici i es tira el dau per torns.

Si el punt verd apareix a la part superior d'un dau, el jugador pot avançar 2 espais, en cas contrari (espai blanc a la part superior) només 1 espai.

Qui arriba a la destinació (Z) rep 3 fitxes del banc. Al final d'una ronda de joc (quan tots els jugadors són a la meta o a la presó), cada jugador a la presó (G) ha de comprar la seva sortida per 1 fitxa.

Comença una nova ronda de joc. Guanya qui té més fitxes al final. Al principi, els jugadors es posen d'acord quantes rondes s'han de jugar en total. Qualsevol jugador pot saltar-se una ronda si ho desitja.

Observacions:

1. Per obtenir una visió general del possible curs del joc i per tal de valorar les possibilitats de guanyar, el millor és que el professor munti un arbre de joc juntament amb els nens.

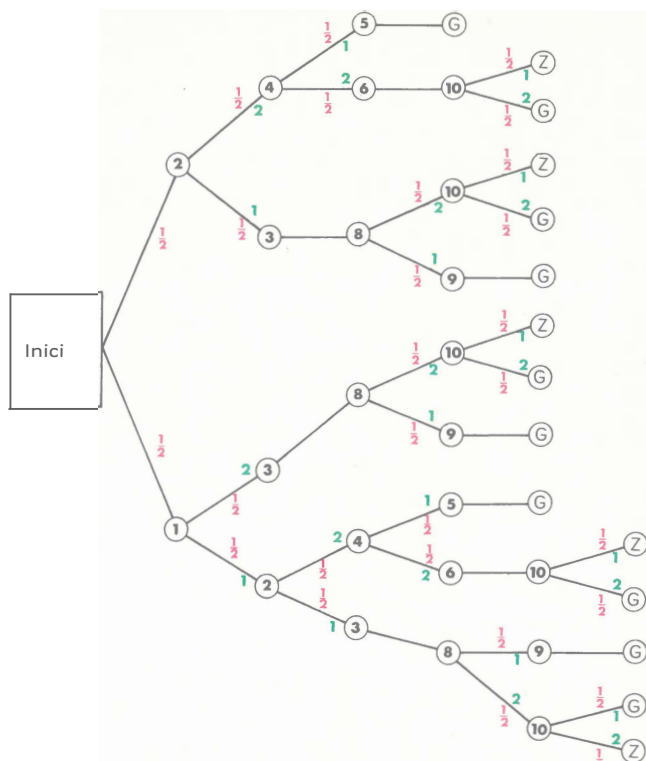
Es tira un 1 (àrea en blanc) o un 2 (àrea amb un punt verd) i la probabilitat de qualsevol esdeveniment és $\frac{1}{2}$.

Només 5 de les 15 possibilitats porten a l'objectiu. En multiplicar les probabilitats al llarg d'aquests camins i sumant-les, determinem la probabilitat d'arribar a l'objectiu:

$$\frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Després d'això, la probabilitat d'acabar a la presó és de $\frac{3}{4}$, que també podeu calcular fàcilment multiplicant els camins fins a la presó i després sumant.

Si arribes a l'objectiu, aconsegueixes 3 fitxes, a la presó has de pagar 1 fitxa. Així que el valor esperat per al joc a llarg termini és: $3 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{3}{4} = 0$



2. Es podrien debatre amb els alumnes qüestions com les següents:

- Quines seqüències de colors del cub porten a la presó? (Això es pot llegir fàcilment des de l'arbre, per exemple, blanc — blanc — verd — blanc o blanc — blanc — verd — verd — verd — verd).
- És més probable que acabi a la presó o que arribi a la destinació?
- De quantes maneres s'arriba d'un lloc (p. ex. 3) a un altre (p. ex. 8)?

En aquesta darrera pregunta, podríeu demanar als estudiants que creïn alguna cosa com la taula següent:

Lloc d'arribada

	G	S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Z
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S	10	0	1	1	3	2	2	2	0	3	2	5	5
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
Z													

En el cas d'alumnes més grans que ja han dominat les fraccions, també podeu preguntar sobre les probabilitats de transició entre dos llocs i fer-ne la taula corresponent.

8. El Joc de l'Estany

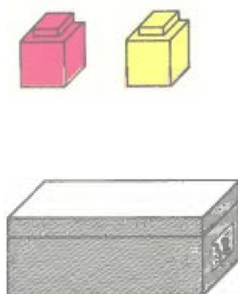
(tota la classe juga una contra l'altra en dos grups de la mateixa mida)

Material:

Tots els cubs de connectors disponibles en 2 colors, per exemple.

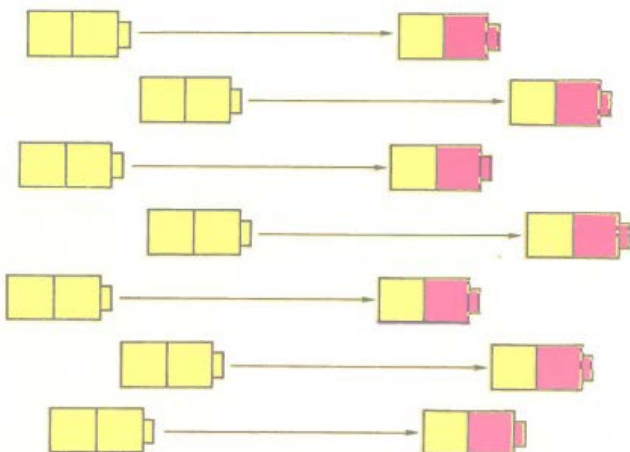
(Si no hi ha prou cubs disponibles, també podeu combinar tots els cubs clars i tots els cubs foscos en un sol color.)

1 caixa (caixa de sabates o similar) que forma l'estany de peixos.



Regles del joc:

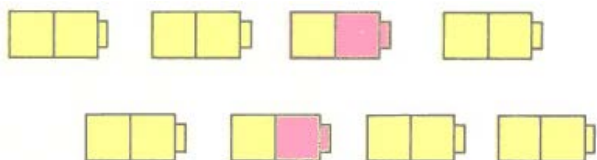
El 1r grup construeix un peix a partir de 2 cubs de color clar i posa una sèrie d'aquests peixos de color clar a l'estany; el número no es revelarà. El segon grup treu un grapat de peixos de l'estany (mostra 1) i canvia el cub de connector frontal d'aquests peixos per un cub fosc, per exemple:



El 1r grup torna a posar la mostra 1 a l'estany i barreja bé els peixos.

A continuació, el 2n grup treu una nova mostra (mostra 2). La mostra 2 pot ser més gran o més petita que la mostra 1, o pot ser de la mateixa mida.

Per exemple.:



El 2n grup pot mirar la mostra 2, i cada nen d'aquest grup ha de respondre ara la pregunta següent: 'Quants peixos creus que hi havia a l'estany?' "

Després de respondre la pregunta, els nens del grup

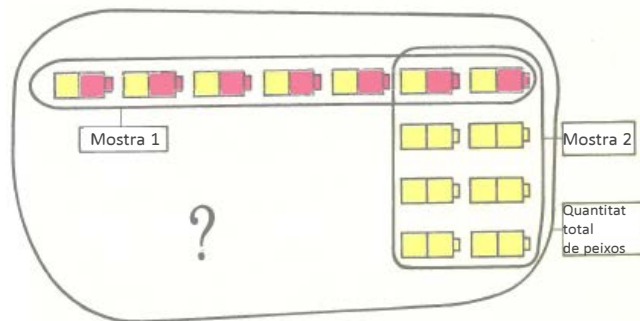
1. compten el nombre real de peixos i per a cada nen del 2n grup es troba la diferència entre el seu valor estimat i el nombre real de peixos.

La suma d'aquestes desviacions s'escriu al segon grup com a un punts menys.

2. En un nou joc, els papers del 1r i 2n grup s'intercanvien.

Notes:

1. El gràfic següent ajuda a trobar la millor estimació (vegeu l'exemple anterior):



De seguida es veu que hi ha d'haver almenys 13 peixos a l'estany. Però quina és la millor suposició?

Argumentem de la següent manera:

Es va etiquetar una quarta part dels peixos continguts a la mostra 2. És raonable suposar que llavors es marcarà una quarta part de tots els peixos. Així, $4 \cdot 7 = 28$ (a la mostra 1 hi havia 7 peixos) és la millor estimació.

2. És fàcil proposar als nens un algorisme semblant a l'esquema anterior, perquè puguin resoldre problemes d'aquest tipus molt ràpidament.

Però això no augmenta la seva capacitat per resoldre nous problemes d'un altre tipus, i els treu l'alegria de descobrir alguna cosa per ells mateixos.

Per tant, el diagrama s'ha de presentar als nens perquè el debatin en el moment adequat (ni s'ha d'esperar fins que hagin perdut l'interès pel joc) perquè ells mateixos esbrinin un algorisme.

3. Els nens poden esbrinar el nombre de peixos tocant-los. Per evitar aquests efectes indesitjables, es poden canviar les regles del joc: per exemple, els nens que han d'estimar el nombre de peixos no poden apropar-se a l'estany de peixos i les mostres són preses per un observador imparcial.

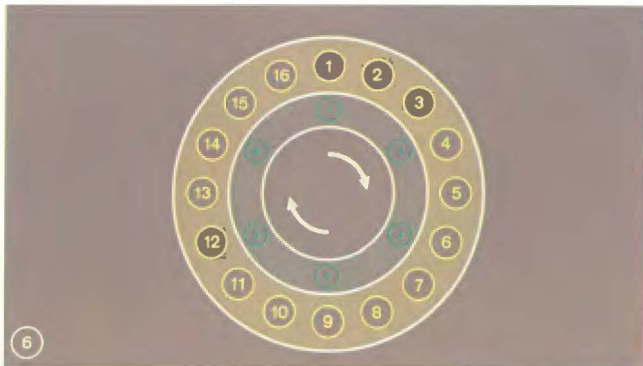
9. Atrapa (per a 2 jugadors)

Material:

- 1 Cub deformat
- 2 Peons de diferents colors



Tauler de joc 6:



Regles del joc:

El jugador 1 col·loca el dos peons al cercle exterior del tauler de joc, un al 16 i l'altre a qualsevol casella.

El jugador 2 pot triar una de les dues peces per ell mateix. El jugador la fitxa del qual està al 16 comença a tirar el dau. Els daus es llancen alternativament, i un jugador pot avançar amb la seva peça tants espais en el sentit de les agulles del rellotge (vegeu les fletxes al tauler de joc) com va sortint al dau.

Guanya el jugador la peça del qual arriba a la posició de l'altre jugador.

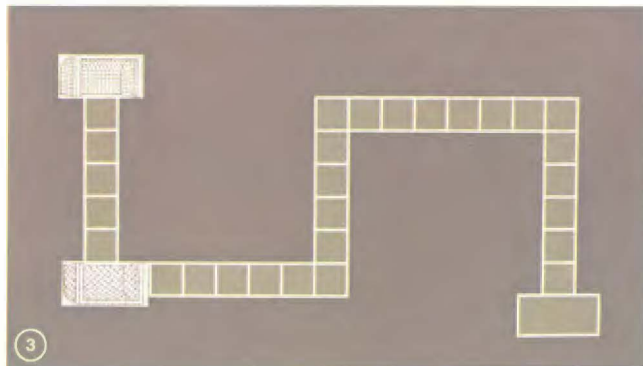
Qui guanyi la primera partida pot col·locar les peces al tauler de joc en la següent partida (una torna a 16, l'altra on vulgui). Aleshores, el perdedor decideix si comença a tirar els daus o deixa que ho faci el guanyador.

Variants:

1. Pots jugar al mateix joc amb un dau normal o amb l'icosaedre.
2. Els jugadors poden acordar que si el nombre de punts és 0, es pot tornar a tirar el dau.
3. El mateix joc es pot jugar al tauler 6 del cercle interior (és a dir, amb només 6 camps). Per descomptat, el professor també pot dibuixar ell mateix plans de joc, amb més o menys camps.

En un tauler de joc amb més caselles, pots llançar dos daus alhora i avançar tantes caselles com indiqui la suma dels daus. Si jugueu en un tauler de joc amb menys camps, en lloc del dau, trieu el disc amb un punt a un costat. Es llença el disc; si surt el punt, pots avançar un espai, en cas contrari el teu oponent pot avançar un espai.

4. Al tauler de joc 3 es pot jugar una partida semblant, on es pot triar el nombre de caselles entre les dues portes a voluntat.



En lloc de dues fitxes, aquí només s'utilitza una fitxa com a bola per als dos jugadors.

Inicialment, la pilota està al mig del camp, o el jugador 1 pot triar on col·locar-la. En aquest segon cas, el jugador 2 pot decidir si vol disparar primer, encara que en direcció al centre del camp, és a dir llavors pot avançar tants espais com indiqui el dau. Tanmateix, el jugador 2 també pot deixar que el jugador 1 faci el primer llançament.

Els daus es llancen alternativament fins que un jugador llança la pilota a la porteria de l'altre. Per exemple, es marca un gol quan la pilota està a dues caselles de la porteria i el jugador que juga contra aquesta porteria tira un nombre superior o igual a 2.

En el cas d'un nombre reduït de camps, s'aplica el que s'ha dit a l'apartat 3, és a dir, és millor jugar amb un disc amb un punt a un costat que amb el dau.

5. Un joc similar es pot jugar amb cubs encaixables.

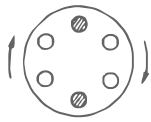
S'especifica una sèrie de cubs encaixables. El jugador 1 crea dues piles de cubs. El jugador amb la pila més petita comença a tirar els daus. El jugador 2 decideix quina pila vol i, per tant, si vol començar a tirar o si prefereix deixar-ho al jugador 1. Els dos jugadors llancen els daus alternativament. Cada jugador rep tants cubs del seu oponent com mostri el nombre del seu dau. Guanya qui té tots els cubs.

Observacions:

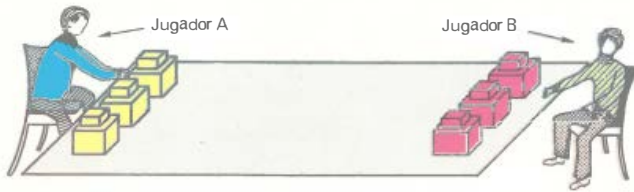
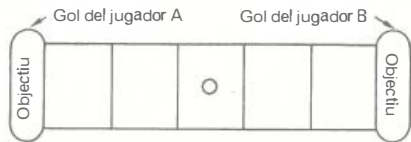
1. El joc "Atrapa" i les seves variants són jocs que inicialment semblen independents els uns dels altres, però darrere dels tres jocs hi ha el mateix model matemàtic. Variacions en el generador de números aleatoris utilitzat o el nombre de camps de joc (o el nombre de cubs encaixables de la variant 5) volen ajudar els nens a entendre la idea comuna i alhora volen potenciar la seva capacitat per fer prediccions en l'àmbit del càlcul de probabilitats.

2. Per a un cas senzill, els jocs s'han d'analitzar aquí:

Comença davant del jugador B

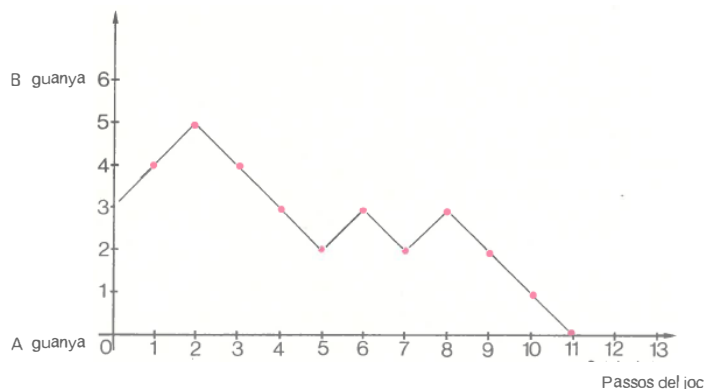


Comença davant del jugador A



El joc es juga amb un disc amb un punt a un costat. Si el jugador A llança el disc i surt el punt, A avança una casella (tira la pilota una casella cap a la porteria de B i aconsegueix un cub encaixable de B); si el disc té la cara en blanc cap amunt, B avança un pas (la pilota avança una casella cap a la porteria d'A i A ha de passar un cub encaixable a B).

Gràficament, el transcurs de cadascun d'aquests jocs es pot analitzar de la següent manera:



La corba mostra un possible curs del joc on el jugador A guanya després d'11 passos.

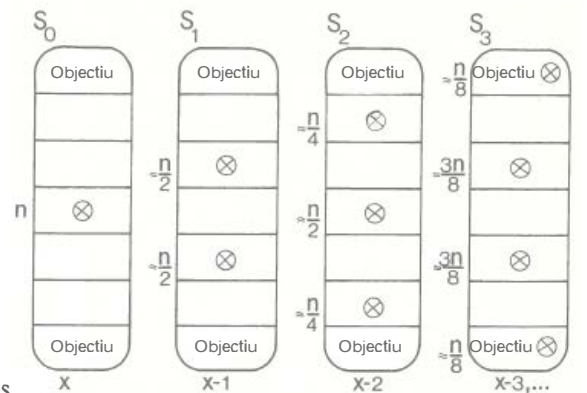
Cadascun d'aquests jocs es pot completar després de 3 passos per a qualsevol jugador afortunat, però amb quina freqüència realment s'acaba després de 3 passos?

Comencem amb l'anàlisi del joc de gol: mirem n jocs enllà.

La pilota es troba en cadascun dels n jocs a l'inici del partit al mig camp. Al 1r pas del joc la pilota es llança un espai cap a la porteria de B aproximadament la meitat del temps i un espai cap a la porteria d'A l'altra meitat del temps.

El mateix passa amb el $2n$ pas de joc, etc. Designació

Anomenem els passos del joc S_0 (inici del joc), S_1 , S_2 , ... , la situació es pot representar gràficament de la següent manera:



Temps de joc esperat

Ara compareu la situació després d'un pas de joc i després de tres passos, és a dir, S_1 i S_3 : a S_3 podem esperar que $\frac{1}{4}$ tots els jocs han acabat. Així que a partir d'ara la durada esperada és 0. Per a la resta $\frac{3}{4}$ de tots els jocs, la situació és exactament la mateixa que per a tots els jocs de S_1 , la seva durada esperada és $x - 1$. Per tant, podem establir:

$$n(x - 3) = \frac{3}{4}n(x - 1)$$

$$4x - 12 = 3x - 3$$

$$x = 9$$

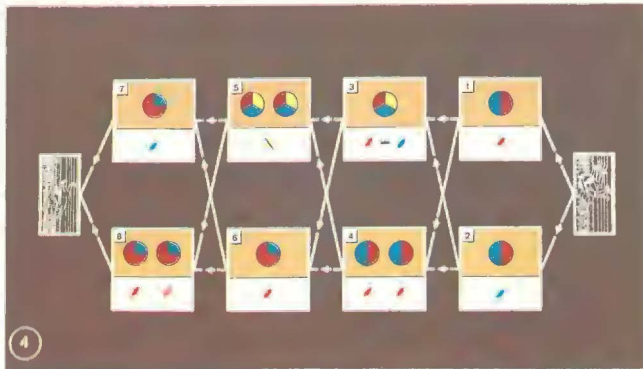
Per tant, el temps de joc previst és de 9 passos.

L'equivalència dels tres jocs pot ser il·lustrada fàcilment pel lector mitjançant un diagrama d'arbre.

10. Qui és més ràpid? (de 2 a 4 jugadors)

Material:

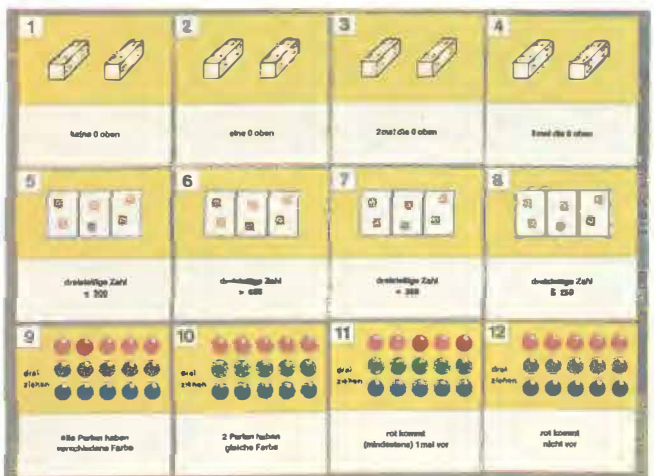
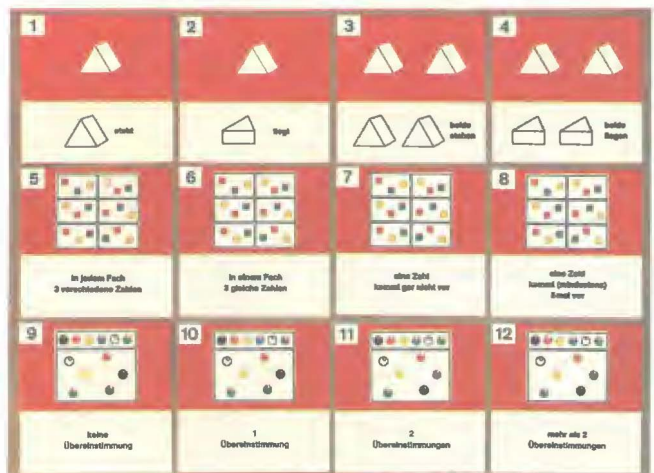
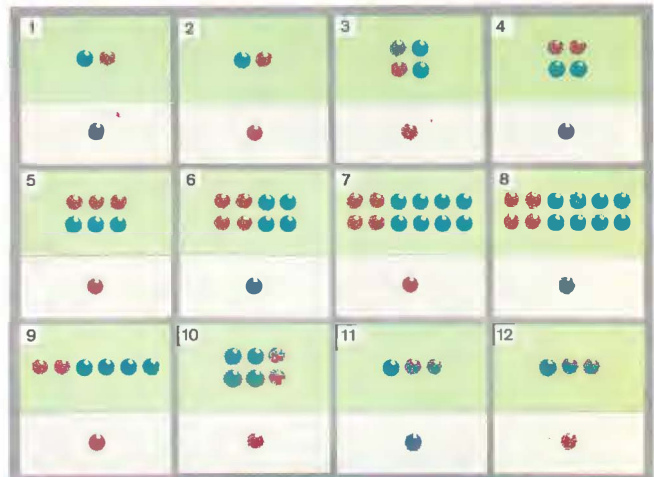
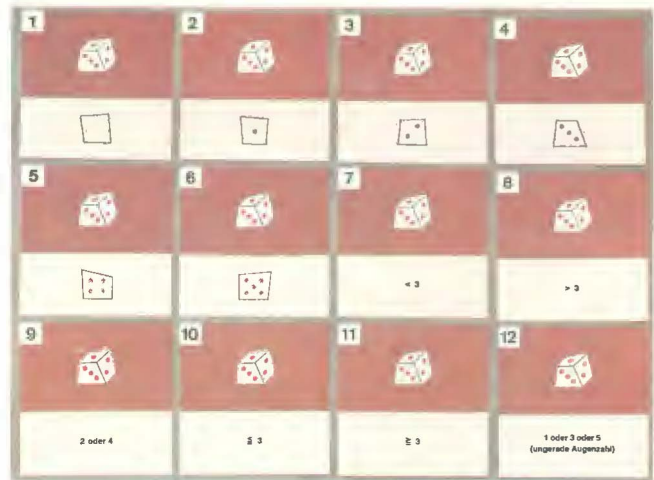
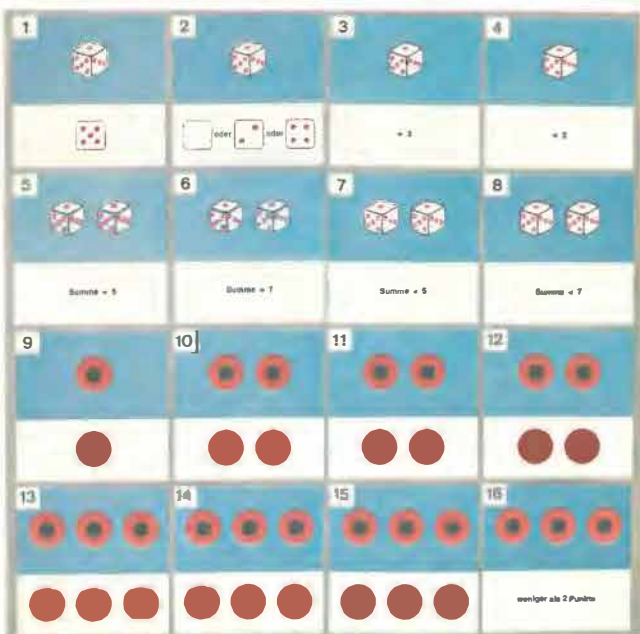
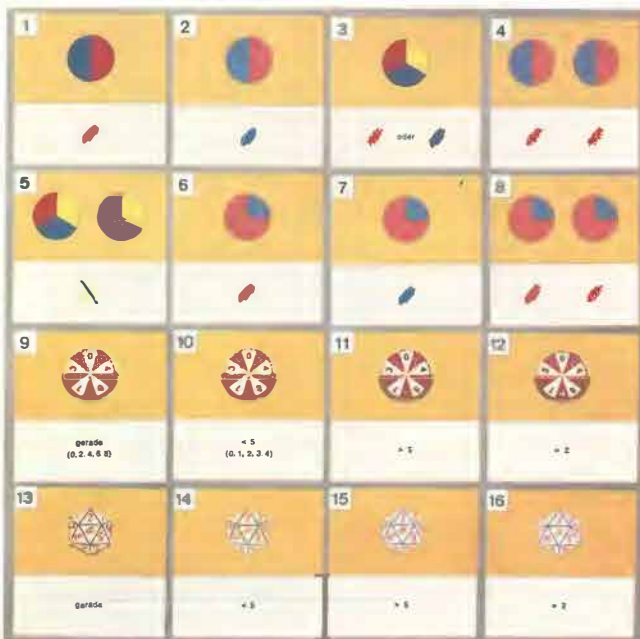
Tauler de joc 4:



4 Peons de diferents colors



Cartes de joc:



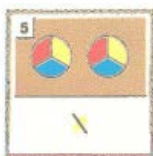
Regles del joc:

Al principi, les cartes es col·loquen als espais del tauler de joc. Això es pot fer de diferents maneres:

1. Aleatori: es barregen les cartes (no necessàriament cal agafar cartes de totes les sèries) i després els espais del tauler de joc s'omplen per ordre; per exemple, primer la fila superior de principi a fi, després la segona fila.
2. Un jugador prepara el tauler de joc. Intenta que sigui el més divertit possible, per exemple, incloent casos especialment complicats.
3. El primer jugador tria les dues primeres cartes i les col·loca al tauler, el segon jugador tria les dues següents, i així successivament.

Les cartes de les caselles individuals indiquen què s'ha de fer per poder avançar una casella al tauler de joc. Cada carta es divideix en dos camps: la meitat superior mostra quin element aleatori s'ha d'utilitzar i la meitat inferior mostra el resultat desitjat.

Exemple:



6 perles, 3 vermelles i 3 blaves, s'agiten en un gobelet. Es tria una perla amb els ulls tancats. Això hauria de ser vermell. Els jugadors primer acorden un ordre. El primer jugador col·loca el seu peó des del principi en un dels camps següents en la direcció de la fletxa. Pot escollir si ocupa el quadrat superior o inferior. A continuació, realitza l'intent prescrit per a ell a la carta que es troba a l'espai ocupat. Si l'intent té el resultat requerit a la meitat inferior de la targeta, el jugador pot avançar un espai en la direcció de la fletxa. En cas contrari, es queda on és i és el torn del següent jugador.

El segon jugador tria un terreny de joc de la mateixa manera que el primer jugador (no necessàriament el mateix), i el joc continua com el primer jugador. Quan torna a ser el torn del primer jugador, fa un nou intent si ha tingut èxit en l'anterior, en cas contrari torna a repetir l'últim intent.

El guanyador és el jugador que arriba primer a la meta.

Observacions:

1. En aquest joc és molt important sospesar les probabilitats de guanyar abans de cada pas. Les cartes del laboratori són només exemples. Pretenen animar a tothom a inventar les seves pròpies cartes (vegeu la sèrie grisa sense imprimir).
2. Els colors de la meitat superior de les cartes distingeixen diferents sèries. Les sèries es poden barrejar entre si. Algunes sèries ja contenen intents de tipus completament diferents.

11. Les tres vespes. L'escarabat al cub. (per a tota la classe)

Observació preliminar:

Aquests no són jocs competitius com els anteriors. L'objectiu és més aviat la discussió amb tota la classe sobre la simulació d'experiments, l'ús de nombres aleatoris i l'equivalència d'experiments aleatoris que inicialment semblen diferents.

El material i les situacions de joc es descriuen per separat per a ambdós jocs; les notes dels jocs es combinen a causa de l'equivalència d'ambdós jocs.

Les tres vespes

Material (per a cada alumne):

1 cub

3 discs de cartró que serveixen de vespes

Dibuix de dues sales en què es troben les vespes

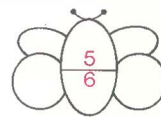
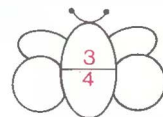
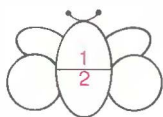


Situació de joc:

S'explica la següent història:

A l'habitació de l'esquerra hi ha tres vespes. La porta de l'habitació del costat està oberta. Una vespa vola per la porta oberta cada minut. L'atzar decideix quina vespa canvia l'habitació. Volem esbrinar quant de temps triguem de mitjana fins que totes les vespes estiguin a l'habitació adequada. Després ja podem tancar la porta i ens hem desfet de totes les vespes.

Per fer-ho, col·loquem les tres vespes a l'habitació de l'esquerra, i a cadascuna de les seves esquenes escrivim dos dels 6 números en un dau:



Ara tirem el dau i posem a l'altra habitació la vespa que té el número que ha sortit a l'esquena. Això continua fins que totes les vespes estan a l'habitació correcta. Anotem els números al dau. Una sèrie és, per exemple, 5, 6, 3, 1, 5.

La comparació de la sèrie de daus de tots els nens ens dona el temps mitjà fins que totes les vespes estan a l'habitació adequada.

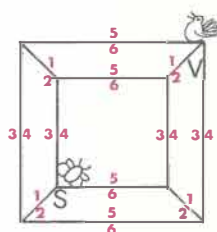
L'escarabat al cub

Materials (per a cada alumne):

1 cub

1 peó

Dibuix d'un cub plegat en el pla



Situació de joc.

S'explica la següent història:

Un escarabat s'arrossega per les arestes d'un cub de filferro. Comença al vèrtex S. Necessita 1 minut per fer recórrer una arista. A cada vèrtex tria aleatòriament una de les tres arestes o vores que s'estenen des del vèrtex. Quan arribi al vèrtex V, se'l menjarà un ocell que està allà. Volem determinar la vida útil de diversos escarabats.

Cada jugador col·loca una fitxa a la cantonada S. Una seqüència de llançaments decideix per quines arestes es mou l'escarabat.

Per exemple, la seqüència de dígits

4 1 3 2 1 6 2 2 1 4 2

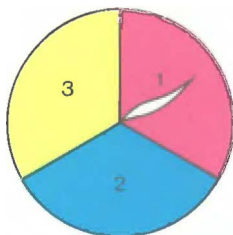
correspon al cicle de vida d'un escarabat que viu 11 minuts. Per determinar la vida mitjana d'un escarabat, es comparen els resultats de tots els estudiants.

Observacions:

1. El joc de las vespes i el joc de l'escarabat plantegen el mateix problema.

Ho pots dir introduint les designacions adequades: designem les dues habitacions amb 0 i 1 i les tres vespes amb 1, 2, 3. Després pots utilitzar un bloc de tres de zeros i uns per indicar en quina habitació es troba cada vespa. Per exemple, 010 significa que la primera vespa està en 0, la segona en 1 i la tercera de nou en 0.

Comenceu amb el bloc 000 i feu una sèrie de girs amb la ruleta tripartida: la caiguda de la ruleta indica quin dígit del bloc triple de zeros i uns s'ha de canviar. La ruleta es gira fins que als dígits s'arriba al bloc 111.



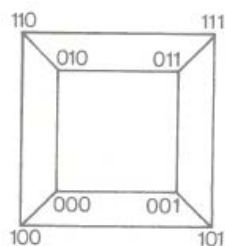
Per exemple, la sèrie 111 12 3 313 a la ruleta es tradueix en: 000 → 100 → 000 → 100 → 000 → 010 → 011 → 010 → 110

→ 111.

És a dir al cap de nou minuts totes les vespes són a l'habitació 1. Al costat d'això, mireu la migració de l'escarabat cub.

Aquí teniu els vèrtexs del cub amb blocs numèrics de zeros i uns designats.

Cadascun connectat per una arista on els vèrtexs del cub es diferencien exactament en un dígit.



L'escarabat comença a les 000, la ruleta es gira com a dalt i l'escarabat va a la cantonada amb un 1 al primer, segon o tercer lloc en conseqüència. Després va a la cantonada on el dígit del lloc indicat per la ruleta difereix de la seva posició actual. Quan l'escarabat arriba al 111, el joc s'acaba.

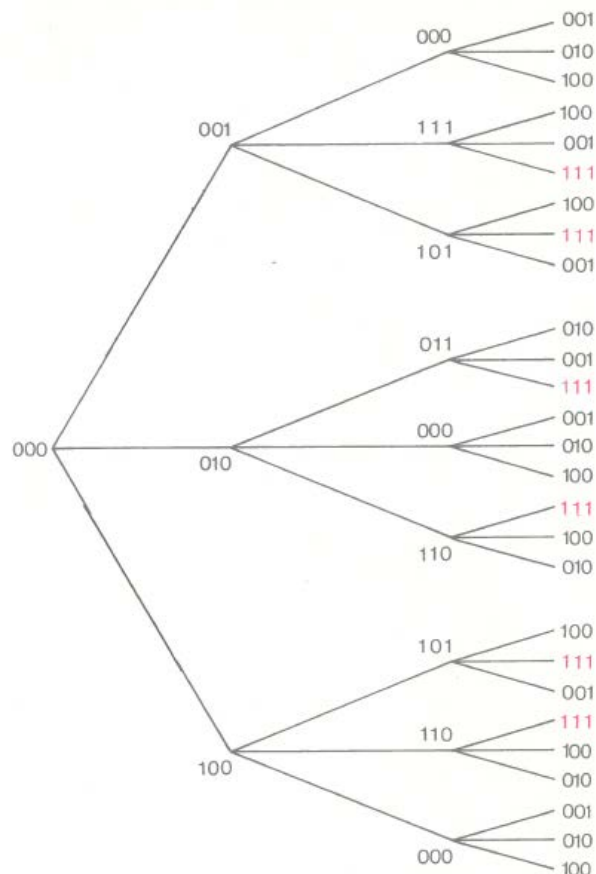
Això mostra una correspondència total entre els dos jocs.

2. Tingueu en compte que la seqüència ha de tenir sempre un nombre senar de dígits. (Si 3 vespes han de canviar d'habitació, anada i tornada sense resultat

afegeix sempre un nombre parell de dígits al teclat numèric.)

3. La mitjana teòrica és de 10 minuts.

Per il·lustrar el seu càlcul, dibuixem un arbre indicant les possibles estacions intermèdies:



Al cap de tres minuts com a molt aviat, totes les vespes poden estar a l'habitació adequada (l'escarabat serà menjat per l'ocell). Si fem l'experiment n vegades, la mitjana estarà dins $\frac{2}{9}n$ casos.

Calculem amb un temps d'espera mitjà (lifetime) de x minuts. Aleshores podeu veure-ho a través del diagrama d'arbre que per als inacabats $7n/9$ caigudes al cap de 3 minuts (vida prevista $x - 3$ minuts) que el mateix s'aplica que després d'1 minut per als n casos. Així que podem equiparar:

$$7n/9(x - 1) = (x - 3)$$

$$x = 10$$

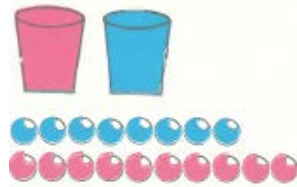
Vegeu també la nota 2 del joc 9.

4. En lloc d'una sèrie llarga de llançaments amb els daus o girs de la ruleta (per obtenir un bon valor mitjà), també es poden utilitzar aquí números aleatoris: per exemple, per determinar la vida útil, comenceu en una nova fila de la taula amb els nombres aleatoris i continua la línia fins que l'escarabat és menjat per l'ocell. Els dígits 0, 7, 8, 9 s'ignoren o, per exemple, agafeu aquests blocs: 1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9 junts en una tirada i només s'ignora el 0.

12. El Casino I (per 3 jugadors)

Material:

- 2 Gobelets (de diferents colors)
- 8 Perles blaves
- 10 Perles vermelles
- 50 Fitxes



Regles del joc:

Un jugador és banquer. Té el banc de 50 fitxes i anota els moviments dels altres dos jugadors. Els altres dos jugadors reben cadascun 10 fitxes com a capital inicial. Hi ha 4 perles blaves i 5 vermelles a cada copa de daus.

Els alumnes, per torns, treuen una perla d'una de les tasses de daus amb els ulls tancats i han d'intentar endevinar el color correctament.

Cada jugador és lliure de decidir de quina tassa de daus vol treure la perla, però després l'ha de tornar a posar a l'altra tassa de daus (és a dir, de la qual no l'ha tret).

Qui prediu correctament el color de la perla rep 1 fitxa del banc; si no ho endevineu, pagueu al banc 1 fitxa. El guanyador és qui arribi primer a 25 fitxes.

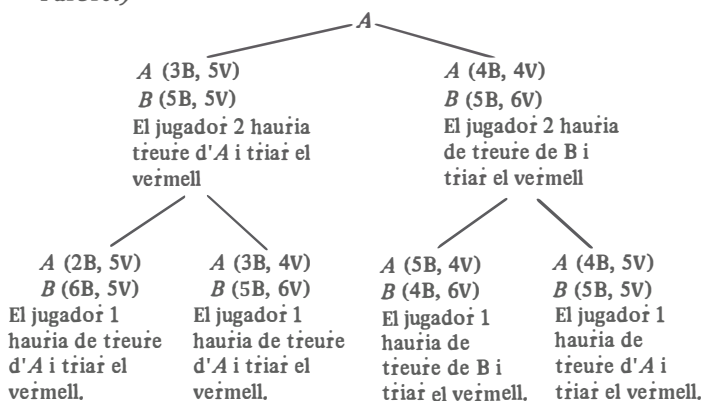
Observacions:

1. El joc consisteix a familiaritzar els alumnes amb les distribucions de probabilitat en constant canvi. Per poder parlar-ne, el banquer també hauria de mantenir un registre dels moviments individuals.

Si els dos gobelets estan etiquetats amb A i B, el registre pot ser així:

Joc	Jugador 1			Jugador 2		
	Tria Urna	Prediu	Treu	Tria Urna	Prediu	Treu
1	A	V	V			
2				B	B	V
3	B	V	B			

2. La manera més fàcil d'esbrinar la millor estratègia de joc és mirar un arbre. (Comencem amb l'urna A; si el primer jugador tria l'urna B, simplement intercanvieu A i B a tot arreu de l'arbre.)

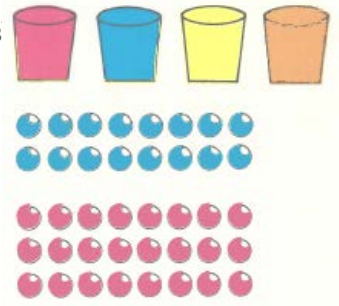


En conseqüència, es pot continuar aquest arbre de l'estratègia respectiva més favorable.

13. El Casino II (per 5 jugadors)

Material:

- 4 Gobelets de daus (Urnes)
- 16 Perles blaves
- 24 Perles vermelles
- 80 Fitxes



Regles del joc:

Un jugador és banquer. El banc gestiona els diners, les 80 fitxes.

Els altres jugadors reben cadascun una copa de daus amb 4 perles blaves i 6 vermelles. Cada jugador també rep 10 fitxes de capital inicial. Cada jugador al seu torn treu una perla de la seva copa de daus amb els ulls tancats (també pot passar si vol); si treu una perla blava, paga 2 fitxes al banc, si en treu una de vermella, rep 2 fitxes. Quan ja no es volen moure més jugadors, el joc s'acaba i comença una nova ronda. Al començament del joc, els jugadors es posen d'acord quantes rondes volen jugar en total.

Anotació:

Pel que sembla, tothom hauria de començar a jugar primer i seguir jugant sempre que la probabilitat del vermell sigui més gran que el blau.

Si un jugador té al seu gobelet el mateix nombre de perles blaves que perles vermelles, hauria de parar. Però si li agrada arriscar, seguirà jugant. Si té sort i treu una altra perla vermella, hauria de parar després d'aquest joc.

