Mathematisches Labor

Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit

Spielanleitungen

Klett

Primera edición

1 5 4 3 2 1 | 1976 75 74 73 72

Todas las imágenes de esta edición se pueden utilizar una al lado de otra en e aula.
El 'último número indica el año de esta impresión.

Fotos: Vollmer Studio, Winnenden, Schloßstraße II
Dibujos: Roni Druckner, Stuttgart, Herzogstrasse 2
Impresión: Union-Druckerei, Stuttgart, Cottastraße I3
ISBN3-I2-I68260-I

Laboratorio de Matemáticas
Combinatoria y probabilidad

Spielanleitungen

Sugerencias para el uso del laboratorio de matemáticas

Ernst Klett Stuttgart

¿Para qué **sirve el laboratorio?**

Se puede jugar solo, en parejas, de tres en tres. . .

Hacer pruebas, experimentar.

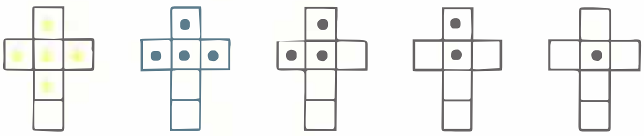
Para encontrar, comprender y resolver problemas.

Les tareas del cálculo de probabilidades se aprenden mientras se juega, así como les tareas de otras áreas.

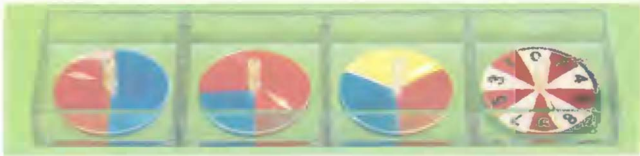
Cualquiera ha de probar por si mismo lo que puede hacer con este laboratorio sin ayuda externa.

No solo se han de entender los juegos propuestos, si no que seguro que el descubrimiento independiente de juegos interesantes aportará mucha alegría.

Los elementos del laboratorio



¿Qué número aparecerá cuando tiréis el dado? ¿Saldrá un • o no?
Con algunos dados, el resultado se puede predecir con una certeza razonable, con otros el resultado el resultado casi nunca coincide con la estimación.
¿Cuánto tiempo tienes que lanzar hasta que la estimación y el resultado coincidan?
¿Cuál es la suma de los números cuando tires diversos dados? ¿Qué sumas se producen con frecuencia y cuáles raramente? Se pueden pintar un conjunto de cubos de colores naturales (sin relieve) según los requisitos de vuestros propios experimentos.

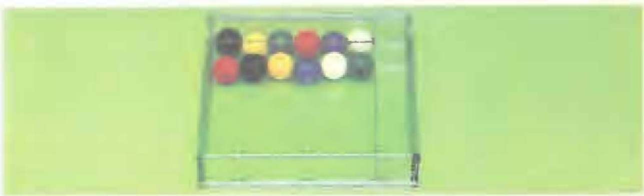


¿En qué color se parará el puntero de la ruleta o en qué número?
Algunas ruletas se comportan de la misma manera que algunos dados. ¿Qué ruleta corresponde a qué dado?

Podéis construir diferentes torres a partir de los cubos conectados. ¿Cuántas torres diferentes hay que contienen exactamente los tres colores: rojo, azul y amarillo?

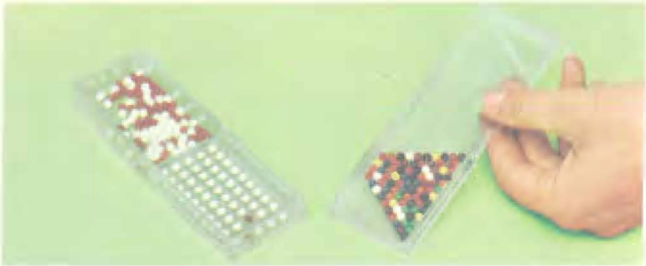
¿Todo esto son torres?
¿Cuántas posibilidades hay si construimos torres a partir de solo dos cubos y volvemos a utilizar tres colores? ¿Qué pasa si un color puede aparecer dos veces en una torre?
Por contra, también podéis construir torres a partir de tres cubos que solo contienen dos colores. ¿Cuántas opciones hay ahora?
Podéis hacer experimentos similares enfilando perlas en cadenas.

¿Estas cadenas son iguales o diferentes? Consideraremos dos cadenes iguales si las puedes poner una sobre la otra para que coincidan todos los colores.

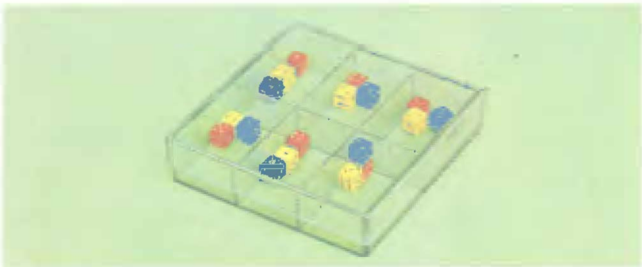


Movemos la caja con 6 bolas (se eliminan las separaciones) y la sujetamos para que las bolas en movimiento (en la zona grande) se alineen al lado de las fijas. En la imagen, ninguna bola coincide de color. ¿Cuáles son las opciones? ¿ 1, 2, 3, 4, 5, 6 bolas pueden coincidir de color?

¿Qué posibilidades se dan con más frecuencia, cuáles son menos frecuentes?
También podemos hacer el mismo experimento con menos colores añadiendo particiones a la caja.

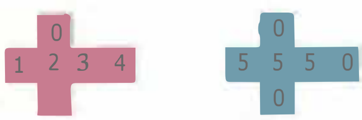


En las cajas de muestras se pueden poner diferentes números de perlas de diferentes colores (población total). Cada subconjunto de esta población se llama muestra.
Si mantenemos la caja de la derecha tal como se muestra en la imagen, las perlas se alinean muy bien: hay una perla a la esquina inferior, dos en la parte superior, etc. Contamos des de la parte inferior una fila cada vez i en cada fila contamos de izquierda a derecha. De esta manera, se pueden tomar muestras de cualquier medida. En la caja de muestras de la figura izquierda , siempre tenemos muestras fijas de medida 50.



Cada vez que movemos esta caja, hacemos 6 intentos. ¿Cuál es la suma de los números de cada compartimento? ¿En cuantas casillas aparecen las mismas sumas? ¿En cuantos compartimentos el dado azul muestra el mismo número?
¡Establece tu mismo más problemes y intenta resolverlos!

Las redes de los cubos de estos compartimentos tienen el 'siguiente aspecto:



Si la cara vacía aparece en la parte superior del cubo rojo, el experimento se ha de repetir. Si movemos la caja una vez, es el mismo experimento que tirar el icosaedro tres veces o hacer girar la ruleta con los números 0 - 9 tres vegades. Me pregunto ¿Por qué?

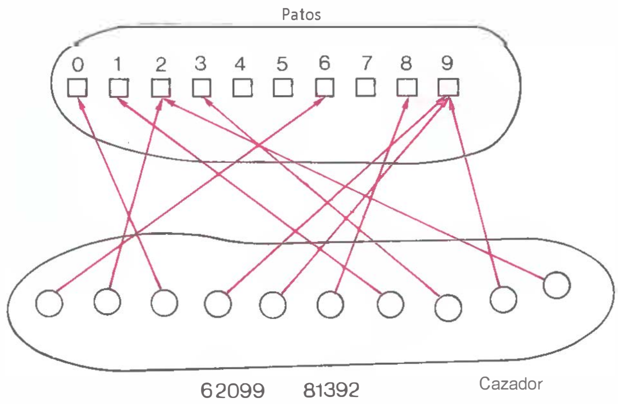
El uso de dígitos aleatorios

Hace unos 20 años se lanzó un "buen" dado decimal un millón de veces, el resultado se resumió en un libro. Cuatro páginas de estos números aleatorios se incluyen 'en el laboratori0, en 12 copias de cada una.
¿Cuáles son las propiedades de estos números aleatorios?

a) La probabilidad de que cualquier dígito aparezca en una posición dada es 1/10.
b) Si se leen los dígitos aleatorios en bloques de dos dígitos cada uno (por ejemplo, 43, 35, ...), entonces la probabilidad de un seterminado bloque en un punto determinado es

$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$ o $\frac{1}{100}$
c) La probabilidad de una cifra par (impar). asciende a $\frac{1}{2}$.

La tabla de dígitos aleatorios se puede utilizar para simular experimentos aleatorios.
Para simular una buena moneda, se puede utilizar el mapa siguiente: dígito par -> cara, dígito impar -> cruz.
Para simular un buen dado, podéis ignorar los dígitos 0, 7, 8, 9.



Diez cazadores, todos perfectos tiradores, van a cazar patos. Se esconden al lado de un pequeño estanque. Pronto 10 patos aterrizan en el estanque. Los cazadores disparan simultáneamente, pero cada uno elige a su víctima al azar.
¿Cuántos patos sobreviven si esto se repite muchas veces?
¿Se puede simular este experimento con dígitos aleatorios? A cada alumno se le proporciona un hoja de números aleatorios. El primer alumno coge el bloque de los 10 primeros dígitos de la primera línea, el segundo alumno utiliza la segunda línea, etc. En el bloque de diez observamos los dígitos que faltan, por ejemplo, el bloque de números considerado de la 1a línea de la hoja I es: 62099 81392, por lo tanto los patos 4, 5 y 7 sobreviven.
Si tenemos unos 10 alumnos y utilizamos la hoja I de los números aleatorios, el número de patos supervivientes es: 3, 4, 5, 4, 3, 2, 5, 3, 3, 3.
La media es de 3,5.
Queremos comprobar que ésta también es la media esperada.
Per hacerlo, escogemos cualquier pato, digamos el pato 5.
¿Cuál es la probabilidad que este pato sobreviva? Sobrevive exactamente cuando ningún cazador apunta a este pato. La probabilidad de que esto pase es $(0{,}9)^{10} = 0{,}349$. Cada uno de los 10 patos sobrevive con una probabilidad de 0,349. Por lo tanto, hay de media 3,49 patos supervivientes.

Instrucciones del juego

Observaciones preliminares:

1. Las reglas de los 13 juegos de estrategia siguientes estan formuladas de manera que todos los juegos se puedan jugar con los elementos del laboratorio. De todas formas, el profesor no se ha de sentir limitado por estos materiales, ha de dejar volar su imaginación; por ejemplo, en el hipódromo, muchas veces es mejor jugar con coches pequeños que con piezas de juego, o para el ganador una copa de premio es más interesante que solo un número máximo de puntos guanadores.

2. En las descripciones del juego, primero se cita el material necesario; se sigue con las reglas del juego, después se muestran las posibles variaciones del juego en cuestión. Se concloye las notas para el profesor.

2.1. En algunas ocasiones, las reglas del juego es referiran al Jugador 1 y Jugador 2. En esos casos, el Jugador 2 es el jugador que se supone que ha de obtener ventaja sobre el otro. Todas las reglas del juego estan formuladas de manera que las posibilidades de ganar sean iguales para a todos los jugadores o una mica más altas para el segundo.

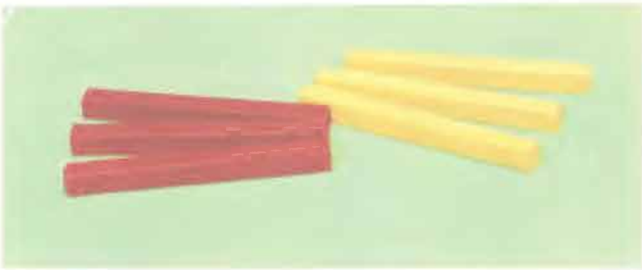
2.2. En las notas, se adoptaron deliberadamente diferentes enfoques para poder proporcionar el máximo de sugerencias posibles manteniendo el rango reducido.
A veces hay sugerencias para la discusión con los alumnos. Otras veces se dan algoritmos económicos para el análisis del juego. En otros casos, se discute el fondo teórico.

1. ¿Quién construye más torres?

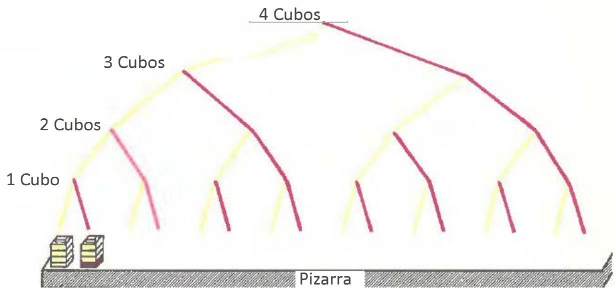
(La clase se dividirá en grupos de cuatro o cinco)

Material:

Para cada grupo 30 cubos rojos y 30 amarillos:



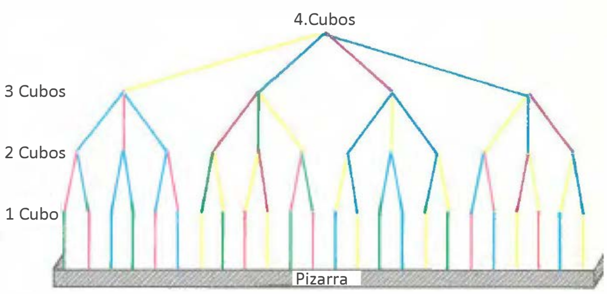
El siguiente árbol está dibujado en la pizarra:



Reglas del juego:

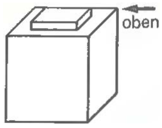
Se han de construir todas las torres diferentes posibles a partir de cuatro cubos encajables (en dos colores) y asignarlas a les ramas del árbol.
A la señal de inicio, cada grupo empieza a construir torres de cuatro niveles.
Cuando un grupo acaba una torre, un integrante del grupo lo levanta y todos los grupos dejan de trabajar.
El alumno con la torre completada va a la pizarra, sigue con la torre el camina de arriba a abajo a través del árbol y la dispone en el lugar correcto de la repisa de la pizarra. Si no hay ninguna torre en este lugar, el grupo obtiene un punto.
El ganador es el grupo con más puntos cuando todos los extremos del árbol están ocupados.

Variante:
Cada grupo tiene 30 cubos encajables rojos, 30 azules, 30 verdes y 30 amarillos, que ahora se utilizaran para construir torres de cuatro niveles. Así mismo, cada color se ha de utilizar exactamente una vez en cada torre. Esta vez se dibuja el siguiente árbol en la pizarra:

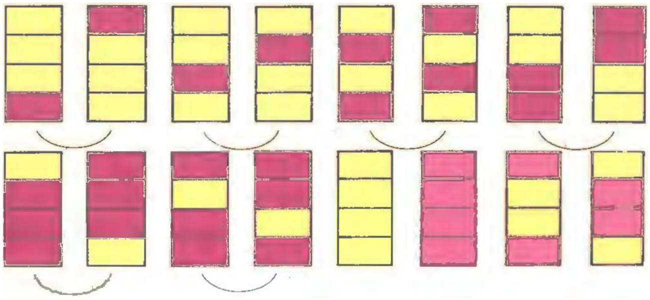


Observaciones:

1. En las torres se ha de distinguir clarament entre "arriba" y "abajo". La manera más sencilla de hacerlo es alinear la superficie del cubo encajable con el botón para conectarlo "arriba".



Si no se diferencia entre "arriba" y "abajo" del cubo, dos torres diferentes se pueden convertir en la misma girándolas, y el número de torres diferentes queda limitado:

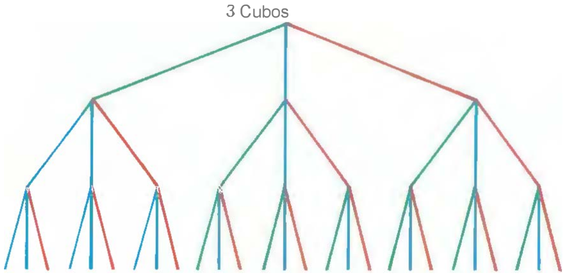


La figura muestra todas las torres posibles de 4 niveles en dos colores. Las torres conectadas son les mismas si no se distingue entre la parte superior y la inferior. Entonces solo tendréis 10 torres en lugar de las 16 habituales.

2. Por descontado, también podéis utilizar más colores o hacer que les torres sean más altas o más bajas. En el primer caso (un color puede aparecer más de una vez en una torre), el siguiente se aplica al número a de diferentes torres:

$a = f^s$ con f = número de colores diferentes
s = número de niveles de torres

Por ejemplo, obtener 27 torres diferentes con 3 colores y 3 niveles. Este es el árbol obtenido:



La fórmula para determinar las diferentes torres as fácil de entender: el árbol tiene f puntos de ramificación, y cada punto de ramificación tiene s ramas.

En el segundo caso (cada color aparece exactamente una vez en cada torre) se aplica al número b de torres:

$$b = f(f-1)(f-2) \cdot \ldots \cdot (f-s+1)$$

con f = Número de colores diferentes
s = Número de niveles de las torres, donde $f \geqq s$,

ya que cada color solo se puede utilizar una vez.

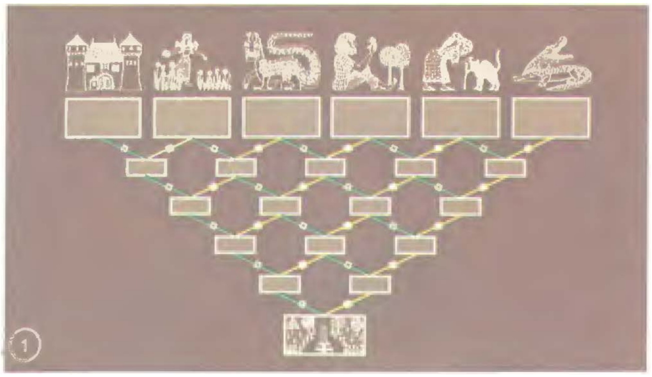
Por ejemplo, para torres de 3 niveles con dados de 6 colores: $b = 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Esta fórmula también se puede entender fácilmente utilitzando el árbol: f ramas salen del nivel superior. En la siguiente etapa, (f - 1) ramificaciones aparecen en cada punto de ramificación. Finalmente, en el nivell más bajo, (f-s + 1) se ramifican de cada punto de ramificación.

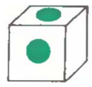
2. La ciudad fantasma (de 4 a 5 jugadores)

Material:

Tablero de juego 1:



1 dado con un punto verde en tres caras y las 3 restantes blancas.



5 peones de diferentes colores

80 fichas de un color.

Reglas del juego:

Cada jugador empieza su viaje por la ciudad en el parque. Ha de cruzar la ciudad encantada y nunca puede dar marcha atrás. En cada intersección ha de tirar el dado y elegir su dirección de viaje tal como indica el dado. (Si hay un punto verde en la superficie del dado, va hacia la izquierda, en caso contrario hacia la derecha). Los dados se lanzan alternativamente; no importa quien empieza

La ciudad fantasma está gobernada per 6 seres:

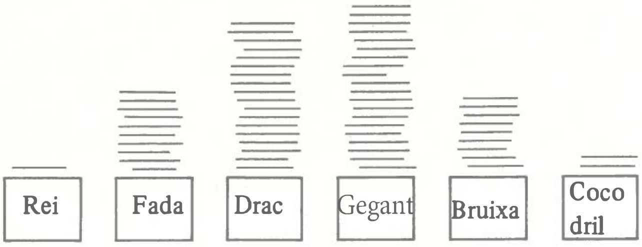
1. En la plaza un cocodrilo devora a toda la gente que hay arriba.
2. En otra plaza, la bruja sigue cometiendo fechorías y pone en la prisión a todos los recién llegados.
3. Un gigante obliga a todos los llegan a hacer trabajos de esclavos en una mina de carbón.
4. Un dragón vigila en un lugar escondido para asar en su horno a cualquiera que pase.
5. Un poco alejada de estos seres malvados, una hada habita y invita a totos los recién llegados a descansar, comer bien y pasar unas vacaciones en su bonito jardín.
6. En el último lugar habita un rey de buen corazón que hace magníficos regalos a todos los que por allí pasan.

Después de hacer su camino por la ciudad, cada jugador coloca una ficha en el lugar donde ha llegado. Comienza una nueva ronda.

Observaciones:

1. El juego de este tablero, que s'estructura según el tablero de Galton, y hace visible la estructura del triángulo de Pascal.
2. Si juegas a este juego en clase con diversos grupos lo mejor es marcar los 6 destinos en la pizarra y cada alumno dibuja una línea horizontal en el lugar donde llega.

A continuación, los resultados en el histograma siguiente:



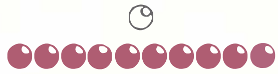
Los histogramas también se pueden construir a partir de cubos conectados
El histograma es una ocasión para discutir las diferentes frecuencias
Esto lleva inmediatamente a la pregunta del número de rutas a cada una de las plaza individuales
3 El número de caminos al cada uno de las plazas individuales nos da el triángulo de Pascal:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

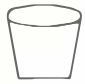
3. ¿Igual o desigual? (para 2 jugadores)

Material:

1 Perla Blanca y diferentes perla rojas (máximo 10):



1 vaso de dados



Reglas del juego:

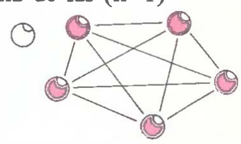
El jugador 1 coloca la perla blanca y tantas perlas rojas como desee (mínimo 1) en un vaso de dados. Entonces, el jugador 2 elige 2 perla con los ojos cerrados. Antes de elegir, ha de acertar si las dos perlas serán del mismo color o diferentes.

Si lo acierta, el jugador 2 gana un punto, en caso contrario el jugador 1 gana un punto. El ganador decide cuantas perlas rojas van a la copa de dados para la siguiente ronda, porlo tanto, si el jugador 2 pierde, ha de volver a intentar acertar en la partida siguiente; si gana, elige las perlas y el jugador 1 es ahora quien ha de acertar.

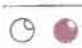
Variantes:

1. En lugar de contar los puntos ganadores, puedes mover la pelota espacio a espacio hacía la portería del oponente en el tablero de juego 3 (mirar la variante 4 a 9. Atrapa). Si hay un número impar de campos de juego (lo mejor es elegir solo 5 campos de juego), la pelota se encuentra inicialmente en el centro del terreno de juego. Si el jugador 2 gana, la pelota se mueve un espacio hacia la portería del jugador 1; Si el jugador 2 pierde, la pelota se mueve hacia su propia porteria. Continúa en consecuencia.
2. También puedes variar el juego dando dos perlas blancas o cualquier otro número de perlas de diversos colores.

Anotación: Si ponéis una perla blanca y n rojas en el vaso de dados, hay n posibilidades de dibujar dos perlas de colores diferentes, como ejemplo, consideremos el caso que hay 1 perla blanca y 5 de rojas
Por otra parte, si queréis dibujar dos perlas del mismo color esto comporta 10 posibilidades (en general con 1 perla blanca y n de rojas hay $n(n-1)/2$ posibilidades, debido a que cada perla roja se puede enlazar con cada una de las $(n-1)$ perlas rojas restantes de manera que por razones de simetría sólo se pueden contar la mitad de los casos que se producen



Los resultados de la tabla siguiente de los primeros casos (de 1 a 10 perlas rojas):

Perlas rojas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Por lo tanto, con solo 1 o 2 perlas rojas, es más probable que elijáis 2 perlas de diferentes colores. Con 3 perlas rojas, las posibilidades ya son iguales; y a medida que aumenta el número de perlas rojas, cada vez es más probable elegir dos perlas del mismo color.

4. El cubo deformado (para 2 o más jugadores)

Material:
1 cubo deformado 

Reglas del juego:
El objetivo es acertar qué número se produce con más frecuencia cuando el dado se lanza diferentes veces, cual es el segundo más frecuente, etc.
Los jugadores acuerdan un número total de lanzamientos al inicio, por ejemplo 20.
Cada jugador escribe su conjectura como:
más frecuente: → 0 4 1 2 5 3 ← el más raro.
El número de puntos que se produce en cada caso se registra en un recuento. Por ejemplo, en un juego con 20 dados:

0 ~~||||~~
1 ||
2 |||
3 |
4 ~~||||~~ |||
5 |

El orden está aquí: 4 0 2 1 $\boxed{3\ 5}$
El recuadro alrededor de los números 3 y 5 significa que los dos números se produjeron con la misma frecuencia, es decir, los órdenes
→ 4 0 2 1 3 5 ← i → 4 0 2 1 5 3 ←
son equivalentes.

Maneras de determinar al ganador:
1a posibilidad:
El es el jugador que coincida con más números correctamente.
2a posibilidad:
El ganador es el jugador con la suma más baja de las desviaciones de los lugares individuales del' orden tirado.
Volvamos al ejemplo anterior. Se dice que los jugadores A y B han asumido las secuencias siguientes para las frecuencias:

A: → 0 4 1 2 5 3 ←
B: → 0 1 2 3 4 5 ←

A continuación, los resultados de la evaluación siguiente:
1a. Possibilitat:

Orden			
Orden secuencia		4 0 2 1 $\boxed{3\ 5}$	Coincidencías
Orden asumido	*A*	0 4 1 2 5 3	2 (5 i 3)
	B	0 1 2 3 4 5	2 (2 i 5)

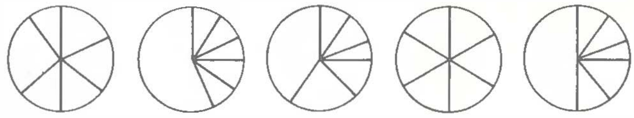
por lo tanto el partido termina en empate.

2a. Posibilidad:

Ordne seqcuencia	4 0 2 1 $\boxed{3\ 5}$	Suma
Ordene *A*	0 4 1 2 5 3	
distancias	1 1 1 1 0 0	4
Orden *B*	0 1 2 3 4 5	
distancias	1 2 0 1 4 0	8

En la segunda posibilidad de recuento, el jugador A tiene mucho más éxito que el jugador B.

Variantes:
1. Cada jugador puede desafiar a sus oponentes afirmando que no tuvo suerte porque el tiempo de juego era demasiao corto. De esta manera, se puede experimentar en qué número de lanzamientos les fluctuaciones aleatorias no tienen ningún papelr.
2. El profesor puede especificar diferentes ruedas de ruleta, como:

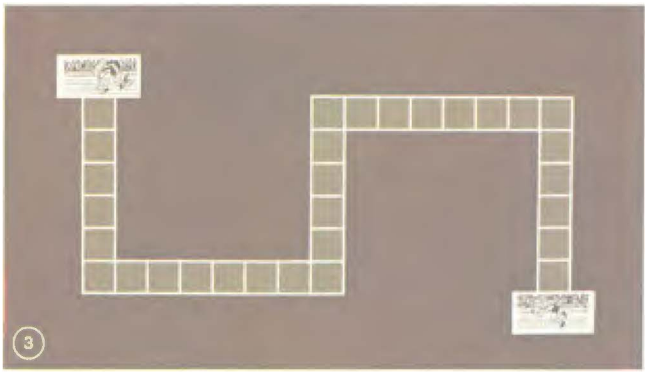


Es necesario decidir qué ruleta se adapta mejor; los números de los dados se han de introducir en los campos correspondientes.
3. En lugar de jugar con un dado sesgado, también puedes jugar con un dado normal. A la larga, ninguna comanda aquí será excelente. Pero también puedes lanzar 2 dados y pedir la suma de los números: ¿Qué suma es más habitual? ¿Hay sumas igualmente comunes?

5. La carrera (de **2** a 4 jugadores)

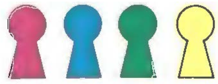
Material:

Tablero de juego 3

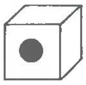


(Los rótulos de Inicio y Final se ponen en el inicio y final del hipódromo de manera que se jueguen los 30 campos).

4 Peones de diferentes colores



1 Dado con un punto negro en una cara, las otras caras estan vacías.



Reglas del juego:

Las carreras se realizan en el circuito. Un jugador detrás de otro lanza el dado, però antes ha de predecir si el punto negro aparecerá en la superficie superior del dado o no. Si acierta puede avanzar **1** espacio, en caso contrario se ha de quedar quieto. El ganador es quien llega primero a la puerta.

Variantes

1. Para evitar apostar siempre por el suceso más probable (espacio en blanco arriba), puedes dejar que el jugador avance **2** o más casillas si elige correctamente el punt negro, pero solo **1** casilla si elige correctamente la superficie en blanco.

2. Per supuesto, también puedes elegir otros dados (por ejemplo los dados del laboratorio que aún no se han pintado), con **4** zonas rojas, **1** verde i **1** azul o con 3 zonas rojas, **2** verdes y **1** azul, para lo que se ha de predecir el color correcto en cada casa. O tomas **2** o 3 dados con caras de colores diferentes, para lo que se ha de predecir el número de caras que aparecen de cada color.
Aquí podéis volver a variar, ya que el jugador puede avanzar tantas casillas como colores correctos ha predicho, pero al mismo tiempo ha de volver haciía atrás tantas casillas como colores equivocados ha predicho.

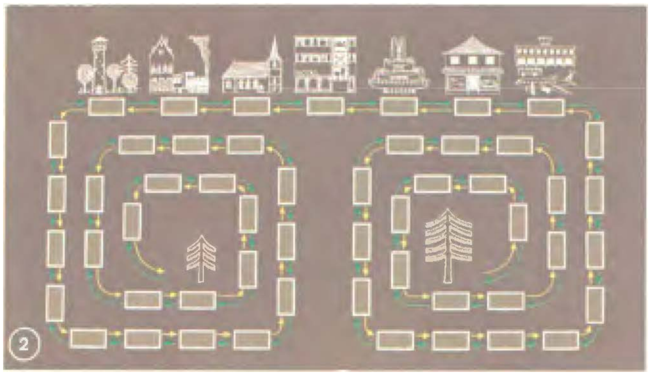
Anotación:
En este juego, los niños se enfrentan al problema de hacer que el "valor esperado" para una victoria sea el más alto posible. Se proponen diferentes estrategias:

1. Los colores se predicen puramente al azar.
2. Los colores se predicen alternativamente en aproximadamente la misma proporción que se comporten los números de caras del cubo de colores correspondientes.
3. Siempre se predice el color que hay en más caras de los dados.

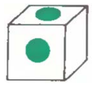
6. El viaje casual del taxista (de **2** a 6 jugadores)

Material:

Tablero de juego 2:



1 Dado con un punto verde en tres caras, les otras caras son blancas



6 Peones de diferentes colores

Reglas del juego:

El taxista solo puede llevar un pasajero de un lugar (por ejemplo, la estación de tren) a otro. No escucha los deseos de los pasajeros, pero cuando un pasajero sube, lanza el dado. Si aparece un punto verde en la parte superior, conduce en la dirección de las flechas verdes, en caso contrario en la dirección de las flechas amarillas. Cada jugador es su propio taxista. Los dados se lanzan en su turno. El inicio está en el hotel.

El ganador es quien llega primero a un abeto. Observaciones:

1. Desde el hotel, las probabilidades son:

Iglesia, Fuente $\frac{1}{2}$; Estación de tren, Panaderia $\frac{1}{4}$; Torre de observación, Aeropuerto $\frac{1}{8}$

La probabilidad de llegar al abeto grande o pequeño es solo marginal $(\frac{1}{2})^{27} \approx \frac{1}{134\,000\,000}$, lo que es extraordinariamente pequeño.

2. Si los estudiantes quieren abandonar el juego decepcionados, hay un motivo para discutir las preguntas seguientes:

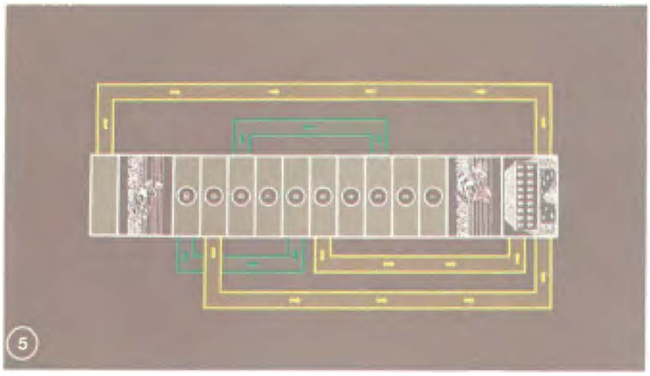
a) ¿Es posible llegar a un abeto?
b) ¿Dónde está el taxista más frecuentemente, delante de la panadería o delante del hotel?
c) ¿Dónde es más probable que llegue: al abeto grande o al pequeño?
d) ¿De dónde es más probable que venga, del aeropuerto o de la estación de tren?

Para responder a estas preguntas de manera experimental, cada jugador puede colocar una ficha en el lugar al cual acaba de llegar después de su lanzamiento. (O cada grupo de juego mantiene un recuento de frecuencias.) La distribución de fichas es entonces una medida de la probabilidad de llegar a cada lugar.

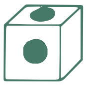
7. **El juego de la escalera** (de 4 a 5 jugadores)

Material:

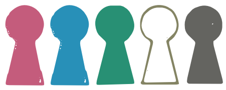
Tablero de juego 5:



1 Cubo con 3 caras con un punto verde y 3 caras vacías



5 peones de diferentes colores



80 fichas de un color

Reglas del juego:

Al inicio del juego, cada jugador recibe 10 fichas. Las fichas restantes van al banco. Cada jugador coloca su ficha en el campo de Inicio y se tira el dado por turnos.
Si el punto verde aparece en la cara superior de un dado, el jugador puede avanzar 2 espacios, en caso contrario (cara blanca en la parte superior) solo 1 espacio.
Quien llega a la destinación (Z) recibe 3 fichas del banco. Al final de una ronda de juego (cuando todos los jugadores están en la meta o en la prisión), cada jugador ha de comprar su salida por 1 ficha.

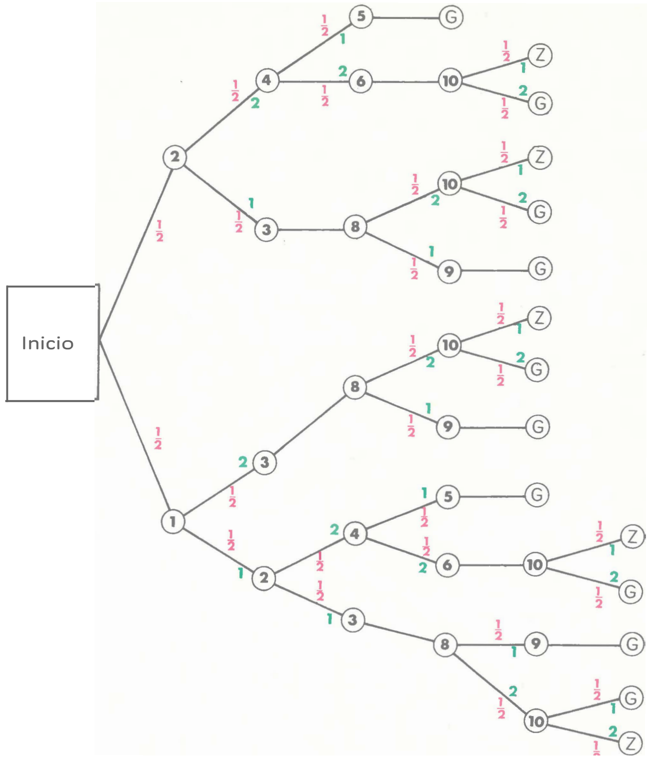
Empieza una nueva nueva ronda de juego. Gana quien tiene más fichas al final. Al principio, los jugadores se ponen de acuerdo en cuántas rondes se han de jugar en total.
Cualquier jugador puede saltarse una ronda si lo desea.

Observaciones:

1. Para obtener una visión general del posible curso del juego i para poder valorar les posibilidades de ganar, lo mejor es que el profesor monte un árbol de juego conjuntamente con los niños. Se tira un 1 (área en blanco) o un 2 (área con un punto verde) y la probabilidad de cualquier suceso es ✓.
Solo 5 de las 15 posibilidades llevan al objectivo. Al multiplicar las probabilidades a lo largo de estos caminos y sumándolas, determinamosla probabilidad de llegar al objetivo:

$$\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}.$$

Después de esto, la probabilidad de acabar en la prisión es de $\frac{3}{4}$, que también podéis calcular fácilmente multiplicando los caminos hasta la prisión y después sumando.
Si llegas al objetivo, consigues 3 fichas, en la prisión has de pagar 1 ficha. Así que el valor esperado para el juego a largo termino es: $3 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{3}{4} = 0$



2. Se podrían debatir con los alumnos cuestiones como las siguientes:
a) ¿Qué secuencias de colores del cubo llevan a la prisión? (Esto se puede leer fácilmente desde el árbol, por ejemplo, blanco — blanco — verde — blanco o blanco — blanco — verde —verde — verde — verde).
b) ¿Es más probable que acabe en la prisión o que llegue a la destinación?
c) ¿De cuántas maneras se puede llegar de un lugar (p. ej. 3) a otro (p. ej. 8)?
En esta última pregunta, se podría pedir a los estudiantes que construyan alguna cosa como la tabla siguiente:

Lugar de llegada

Lugar de salida	G	S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Z
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S	10	0	1	1	3	2	2	2	0	3	2	5	5
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
Z													

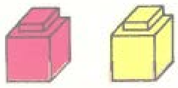
En el caso de alumnos más mayores que ya dominan las fracciones, también podéis preguntar sobre las probabilidades de transición entre dos lugares y hacer la tabla correspondiente.

8. El Juego del Estanque

(toda la clase juega una contra la otra en dos grupos de la misma medida)

Material:

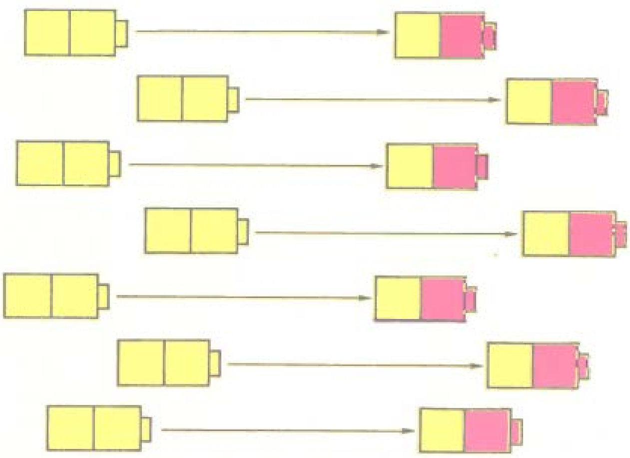
Todos los cubos de conectores disponibles en 2 colores, por ejemplo: (Si no hay bastantes cubos disponibles, también podéis combinar todos los cubos claros y todos los cubos oscuros en un solo color.)



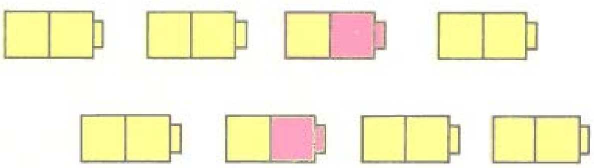
1 caja (caja de zapatos o similar) que forma el estanque de peces.

Reglas del juego:

El 1r grupo construye un pez a partir de 2 cubos de color claro y pone una serie de estos peces de color claro en el estanque; el número no se revelará. El segundo grupo saca un puñado de peces del estanque (muestra 1) y cambia el cubo de conector frontal de estos peces por un cub oscuro, per ejemplo:



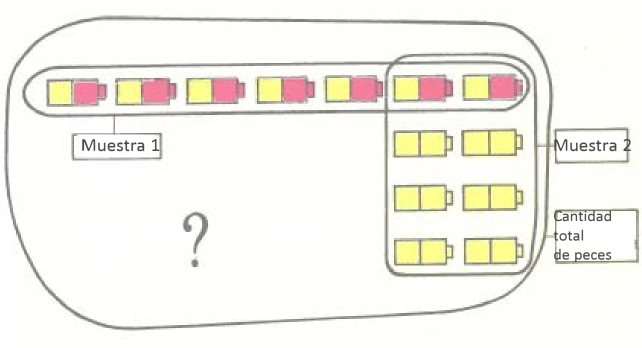
El 1r grupo vuelve a poner la muestra 1 en el estanque y mezcla los peces.
A continuación, el 2o grupo saca una nueva muestra (muestra 2). La muestra 2 puede ser más grande o más pequeña que la muestra 1, o puede ser de la misma medida.
Por ejemplo:



El 2o grupo puede mirar la muestra 2, y cada niño de este grupo ha de responder ahora a la pregunta siguiente:
'¿Cuántos peces crees que había en el estanque? "
Después de responder la pregunta, los niños del grupo 1

1. Cuentan el nombre real de peces y para cada niño del 2o grupo se encuentra la diferencia entre su valor estimado y el número real de peces.
La suma de estas desviaciones se escribe en el segundo grupo como un punto menos.
2. En un nuevo juego, los papeles 1r i 2o grupo se intercanvian.

Notas:
1. El gráfico siguiente ayuda a encontrar la mejor estimación (ver el ejemplo anterior):



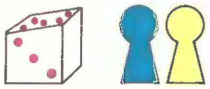
Rápidamente se ve que ha de haber almenos 13 peces en el estanque. ¿Pero cuál es la mejor suposición?
Argumentemos de la seguiente manera:
Se etiquetaron una cuarta parte de los peces contenidos en la muestra 2. Es razonable suponer que entonces se marcará una cuarta parte de todos los peces. Así, $4 \cdot 7 = 28$ (en la muestra 1 había 7 peces) es la mejor estimación.
2. Es fácil proponer a los niños un algoritmo semejante al esquema anterior, para que puedan resolver problemas de este tipo muy rápidamente.
Pero esto no aumenta su capacidad para resolver nuevos problemas de otros tipos, y se les saca la alegría de descubrir alguna cosa por ellos mismos.
Por lo tanto, el diagrama se ha de presentar a los niños para que lo debatan en el momento adecuado (no se ha de esperar hasta que hayan perdido el interés por el juego) para que ellos mismos descubran un algoritmo.
3. Los niños pueden descubrir el número de peces tocándolos. Para evitar estos efectos no deseados, se pueden cambiar las reglas del juego: por ejemplo, los niños que han de estimar el número de peces no pueden acercarse la estanque de peces y las muestars son tomadas por un observador imparcial.

9. Atrapa (para 2 jugadores)

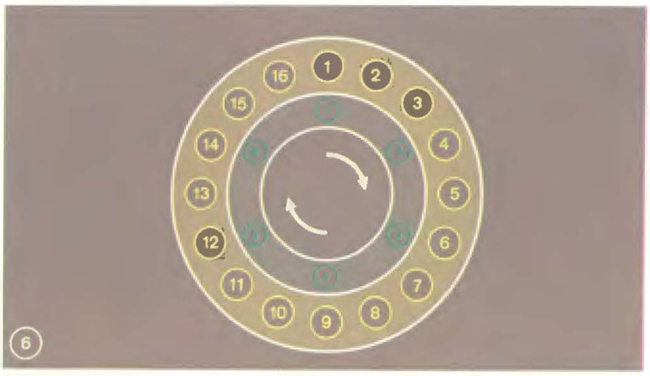
Material:

1 Cubo deformado

2 Peones de diferentes colors



Tablero de juego 6:



Reglas del juego:

El jugador 1 coloca los dos peones en el círculo exterior del tablero de juego, uno en el 16 y el otro en cualquier casilla.

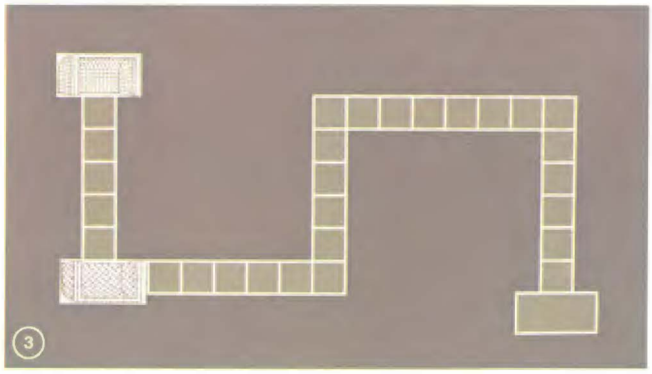
El jugador **2** puede elegir uno de los dos peones por el mismo. Empieza tirando el dado el jugador el peón del cual está en el 16. Los dados se lanzan alternativamente, y un jugador puede avanzar tantos espacios en el sentido de la agujas del reloj (ver las flechas en el tablero de juego) como va saliendo en el dado.

Gana el jugador el peón del cual llega a la posición del otro jugador.

Quien gana la primera partida puede colocar las piezas en el tablero de juego en la siguiente partida (una vuelve al 16, la otro donde quiera). Entonces, el perdedor decide si empieza a tirar los dados o deja que lo haga el ganador.

Variantes:

1. Puedes jugar al mismo juego con una dado normal o con el icosaedro.
2. Los jugadores pueden acordar que si el número de puntos es 0, se puede volver a tirar el dado.
3. El mismo juego se puede jugar en el círculo interior del tablero 6 (con solo 6 campos). Por supuesto, el profesor también puede dibujar el mismo plan de juego, con más o menos campos.
En un tablero de juego con más casillas, puedes lanzar dos dados a la vez y avanzar tantas casillas como indique la suma de los dados. Si jugáis en un tablero de juego con menos campos, en lugar del dado, elegid uno de los discos con un punto en un lado. Se lanza el disco; si sale el punto, puedes avanzar un espacio, en caso contrario tu oponete puede avanzar un espacio.
4. En el tablero de juego **3** se puede jugar una partida semejante, donde se puede elegir el número de casillas entre las dos puertas a voluntad.



En lugar de dos fichas, aquí solo se utiliza una ficha como bola para los dos jugadores.
Inicialmente, la pelota está en el medio del campo,o el jugador 1 puede elegir donde colocarla.
En este segundo caso, el jugador **2** puede decidir si quiere disparar primero, aunque en dirección al centro del campo, entonces puede avanzar tantos espacios como indique el dado. Así mismo, el jugador **2** también puede dejar que el jugador 1 haga el primer lanzamiento.
Los dados se lanzan alternativamente hasta que un jugador lanza la pelota a la portería del otro. Por ejemplo, se marca un gol cuando la pelota está a dos casillas de la portería y el jugador que juega contra esta portería tira un número superior o igual a **2**.
En el caso de un número reducido de campos, se aplica lo que se ha dicho en el apartado **3**, es mejor jugar con un disco con un punto en una cara que con un dado.

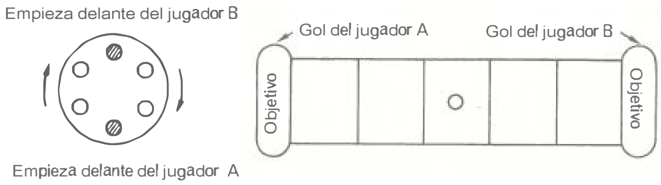
5. Un juego similar se puede jugar con cubos encajables.

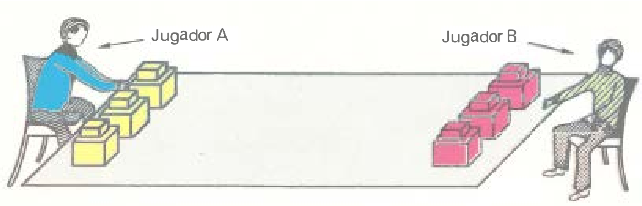
Se especifica una serie de cubos encajables. El jugador 1 crea dos pilas de cubos. El jugador con la pila más pequeña empieza a tira el dado. El jugador 2 decide que pila quiere y, por lo tanto, si quiere empezar a tirar o si prefiere dejarlo al jugador 1.
Los dos jugadores lanzan dados alternativamente. Cada jugador recibe tantos cubos de su oponente como muestre el número de su dado. Gana quien consigue todos los cubos.

Observaciones:

1. El juego "Atrapa" y sus variantes son juegos que inicialmente parecen independientes los unos de los otros, pero detrás de los tres juegos hay el mismo modelo matemático. Variaciones en el generador de números aleatorios utilizado o el número de campos de juego (o el número de cubos encajables de la variante 5) quieren ayudar a los niños a entender la idea común y a su vez quieren potenciar su capacidad per hacer predicciones en el ámbito del cálculo de probabilidades.

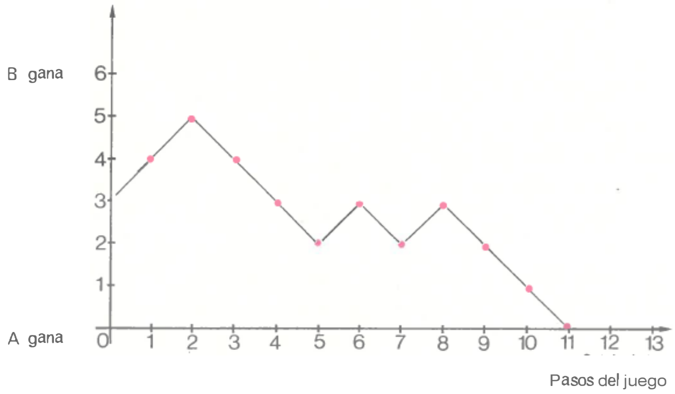
2. Para un caso sencillo, los juegos se tienen que analizar aquí:



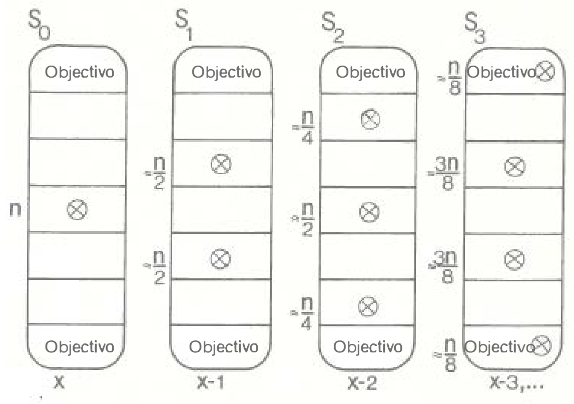


El juego se juega con un disco con un punto en una cara. Si el jugador *A* lanza el disco y sale el punto, *A* avanza una casilla (tira la pelota una casilla hacia la portería de B y consigue un cubo encajable de B); si el disco tiene la cara en blanco hacia arriba, B avanza un paso (la pelota avanza una casilla hacia la portería de *A* y *A* ha de pasar un cubo encajable a B).

Gráficamente, el transcurso de cada uno de estos juegos se puede analizar de la siguiente manera:



La curva muestra un posible curso del juego donde el jugador *A* gana después de 11 pasos.
Cada uno de estos juegos se puede completar después de 3 pasos por cualquier jugador afortunado, ¿pero con qué frecuencia realmente se acaba después de 3 pasos?
Empecemos con el análisis del juego de gol: miremos n juegos más allá. La pelota se encuentra en cada uno de los n juegos en el inicio del partido a medio campo. En el primer paso del juego la pelota se lanza un espacio hacia la portería de B aproximadamente la mitad del tiempo y un espacio hacia la portería de *A* la otra mitad del tiempo.
Lo mismo pasa con el 2o paso del juego, etc.
Designación
Llamamos a los pasos del juego S_0 (inicio del juego), S_1, S_2, ... , la situación se puede representar gráficamente de la siguiente manera:



Tiempo de juego esperado

Ahora comparad la situación después de un paso de juego y después de tres pasos, o sea, S_1 i S_3: en S_3 podemos esperar que $\frac{1}{4}$ de todos los juegos han acabado. Así que a partir de ahora la duración esperada es 0. Para el resto, $\frac{3}{4}$ de todos los juegos, la situación es exactamente la misma que para todos los juegos de S_1, su duración esperada es $x - 1$. Por lo tanto, podemos establecer:

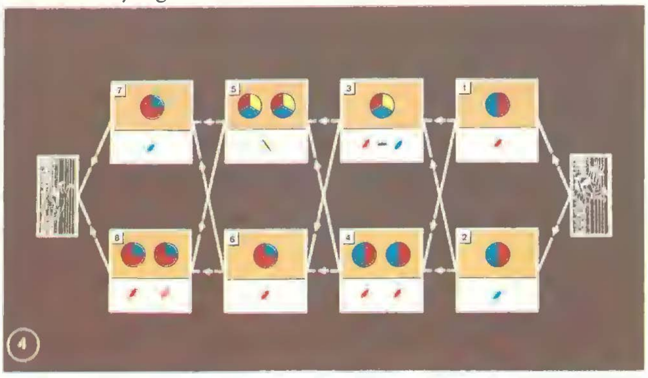
$$n(x-3) = \frac{3}{4}n(x-1)$$
$$4x - 12 = 3x - 3$$
$$x = 9$$

Por lo tanto, el tiempo de juego previsto es de 9 pasos. La equivalencia de los tres juegos puede ser ilustrada fácilmente por el lector mediante un diagrama de árbol.

10. ¿Quién es más rápido? (de 2 a 4 jugadores)

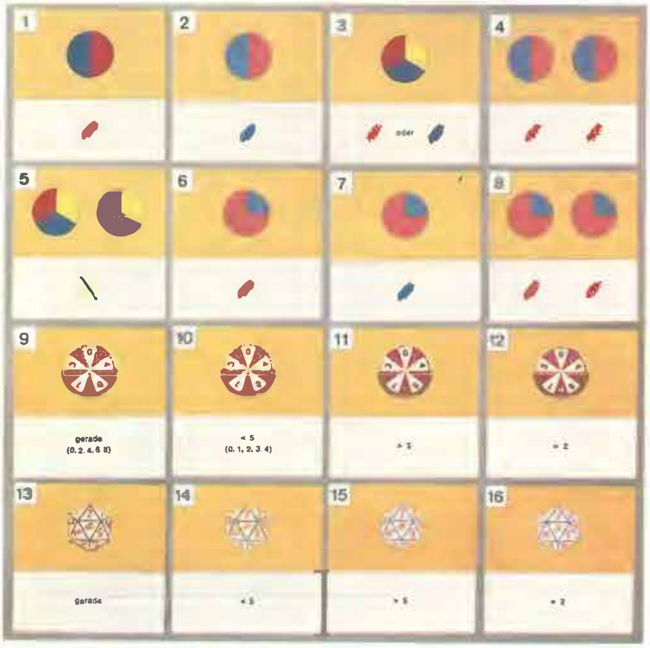
Material:

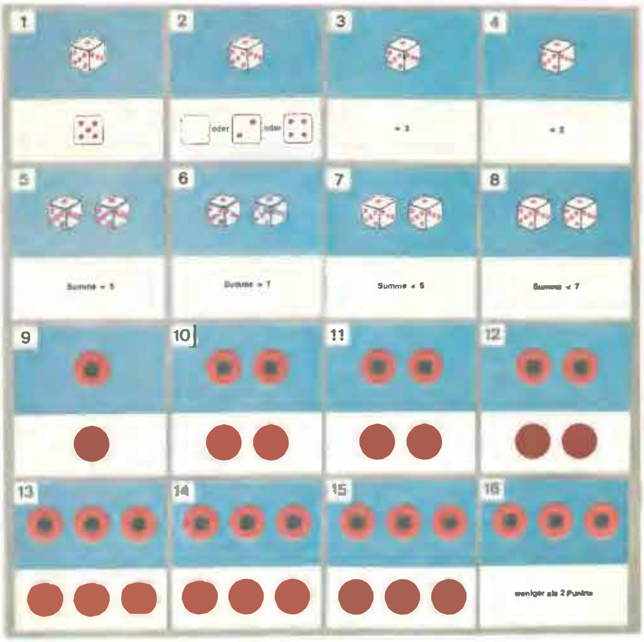
TaBlero de juego 4:

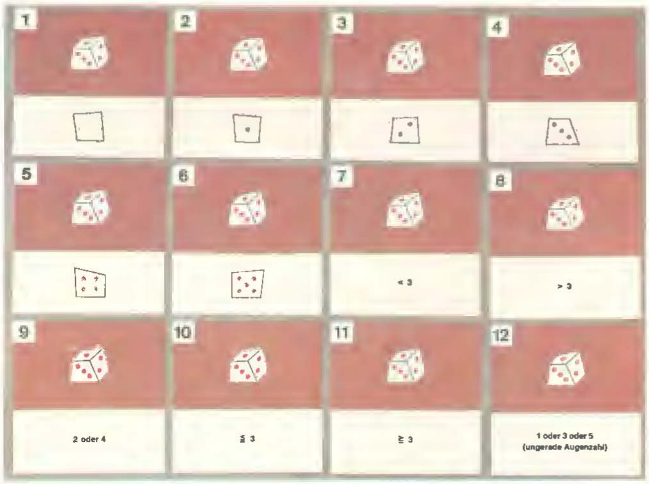


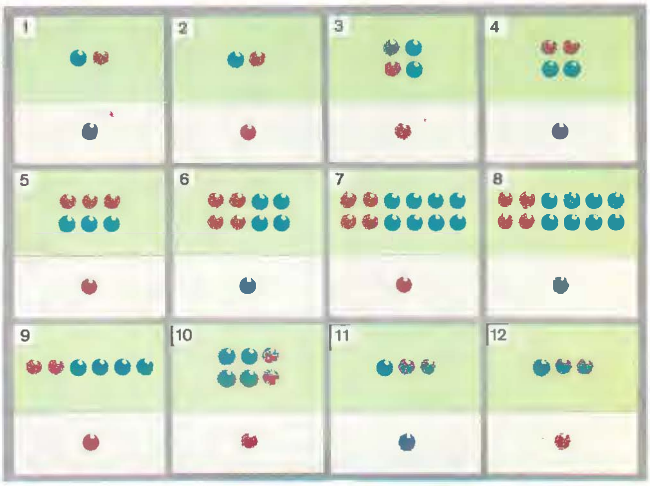
4 Peones de diferentes colores

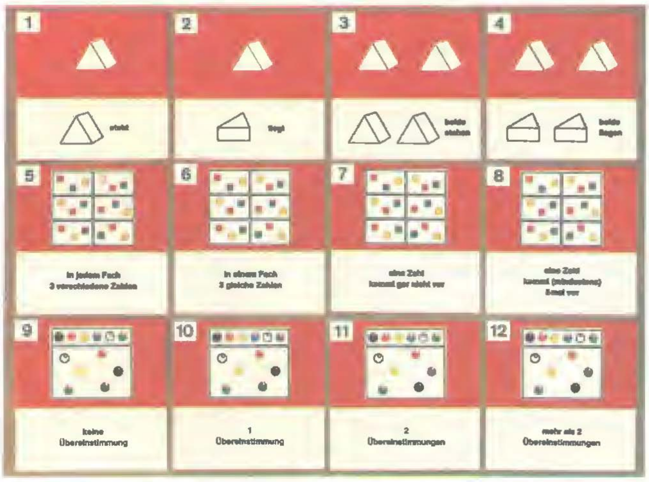
Cartas de juego:

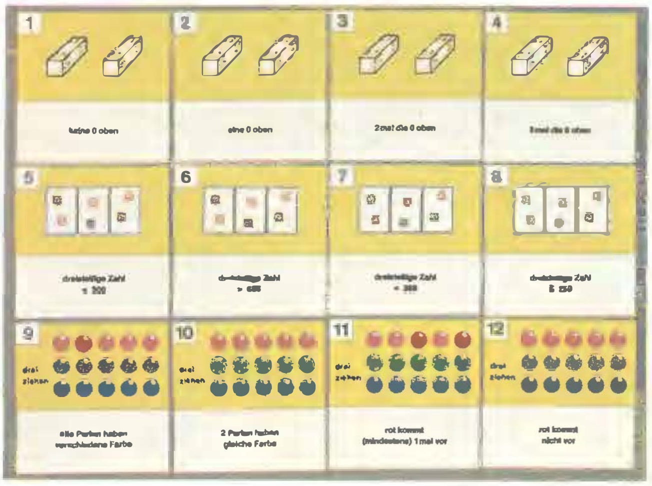












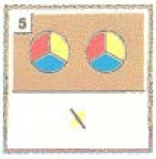
Reglas del juego:
Al principio, las cartas se colocan en los espacios de tablero de juego. Esto se puede hacer de diferentes maneras:
1. Aleatoria: se mezclan las cartas (no necesariamente cogiendo cartas de todas las series) y después los espacios del tablero de juego se llenan por orden; por ejemplo, primero la fila superior de principio a fin, después la segunda fila, etc.

2. Un jugador prepara el tablero de juego. Intenta que sea lo más divertido posible, por ejemplo, incluyendo casos especialmente complicados.

3. El primer jugador elige las dos primeras cartas y las coloca en el tablero, el segundo jugador elige las dos siguientes, y así sucessivamente.

Las cartas de las casillas individuales indican qué se ha de hacer para poder avanzar una casilla en el tablero de juego. Cada carta se divide en dos campos: la mitad superior muestra qué elemento aleatorio se ha de utilizar y la mitad inferior muestra el resultado deseado.

Ejemplos:



6 perlas, 3 rojas y 3 azules, se agitan en un vaso. Se elige una perla con los ojos cerrados s. Esto tendría que ser rojo. Los jugadores primero acuerdan un orden. El primer jugador coloca su peón des del principio en uno de los campos siguientes en la dirección de la flecha. Puede elegir si ocupa el cuadrado superior o inferior. A continuación, realiza el intento prescrito per él en la carta que se encuentra en el espacio ocupado. Si e intento tiene el resultado requerido en la mitad inferior de la tarjeta, el jugador puede avanzar un espacio en la dirección de la flecha. En caso contrario, es queda donde está y es el turno del siguiente jugador.

El segundo jugador elige un terreno de juego de la misma manera que el primer jugador (no necesariamente el mismo), y el juego continua como el primer jugador. Cuando vuelve a ser el turno del primer jugador, hace un nuevo intento si ha tenido éxito en el anterior, en caso contrario vuelve a repetir el último intento.
El ganador es el jugador que llega primero a la meta.

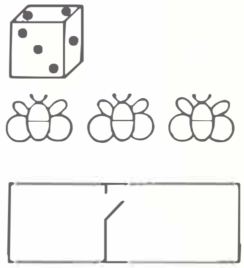
Observaciones:

1. En este juego es muy importante sopesar les probabilidades de ganar antes de cada paso.
Les cartas del laboratorio son solo ejemplos. Pretenden animar a todos a inventar sus propias cartas (mirar la serie grisa sin imprimir).
2. El color de la mitad superior de les cartas distinguen diferentes series. Las series se pueden mezclar entre si. Algunas series ya contienen intentos de tipos completamente diferentes.

11. Las tres avispas. El escarabajo en el cubo. (para toda la clase)

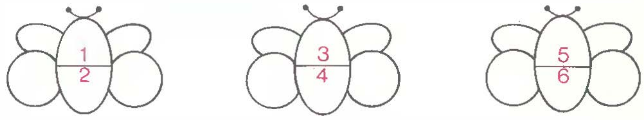
Observación preliminar:
Estos no son juegos competitivos como los anteriores . El objetivo es más la discusión con toda la clase sobre la simulación de experimentos, el uso de números aleatorios y la equivalencia de experimentos aleatorios que inicialmente parecen diferentes.
El material y las situaciones de juego se describen por separado para ambos juegos; las notas de los juegos se combinan a causa de la equivalencia de ambos juegos.

Las tres avispas
Material (para cada alumno):
1 cubo
3 discos de cartón que sirven de avispas
Dibujo de dos salas en las que se encuentran las avispas



Situación del juego:

Se explica la siguiente historia:
En la habitación de la izquierda hay tres avispas. La puerta de la habitación de al lado está abierta Una avispa vuela por la puerta abierta cada minuto. El azar decide qué avispa cambia de habitación. Queremos saber cuanto tiempo tardan de media hasta que todas las avispas estén en la habitación adecuada. Después ya podemos cerrar la puerta y nos hemos deshecho de todas las avispas.
Para hacerlo, colocamos las tres avispas en la habitación de la izquierda, y en cada una de sus espaldas escribimos dos de los 6 números de una dado:



Ahora tiramos el dado y ponemos en la otra habitación la avispa que tiene en su espalda el número que ha salido. Esto continua hasta que todas las avispas están en la habitación correcta. Anotamos los números del dado. Una serie es, por ejemplo: 5, 6, 3, 1, 5.
La comparación de la serie de dados de todos los niños nos da el tiempo medio hasta que todas las avispas están en la habitación adecuada.

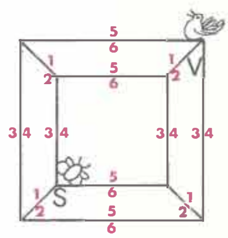
El escarabajo en el cubo

Materiales (para cada alumno):

1 cubo

1 peón

Dibujo de un cubo plegado en el plano

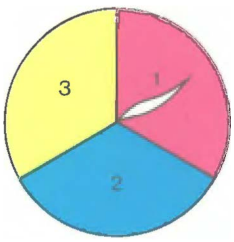


Situación de juego.
Se explica la siguiente historia:
Un escarabajo se arrastra por las aristas de un cubo de alambre. Empieza en el vértice S. Necesita 1 minuto para recorrer una arista. En cada vértice elige aleatoriamente una de las tres aristas o lado de los que se extienden des del vértice. Cuando llegue al vértice V, se lo comerá un pájaro que está allá. Queremos determinar la vida útil de diferentes escarabajos.
Cada jugador coloca una ficha en el vértice S. Una secuencia de lanzamientos decide por qué aristas se mueve el escarabajo.
Por ejemplo, la secuencia de dígitos
4 1 3 2 1 6 2 2 1 4 2 corresponde al ciclo de vida de un escarabajo que vive 11 minutos. Para determinar la vida media de un escarabajo, se comparan los resultados de todos los estudiantes.

Observaciones:

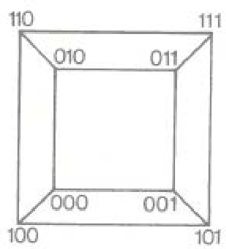
1. El juego de las avispas y el juego del escarabajo plantean el mismo problema.
Lo puedes ver introduciendo las designaciones adecuadas: designamos las dos habitacions con 0 i 1 y las tres avispas con 1, 2 , 3. Después puedes utilizar un bloque de tres de ceros y unos para indicar en qué habitación se encuentra cada avispa. Por ejemplo, 010 significa que la primera avispa está en 0, la segunda en 1 y la tercera de nuevo en 0.

Comenzad con el bloque 000 y haced una serie de giros con la ruleta tripartita: la caída de la ruleta indica qué dígito del bloque triple de ceros y unos se ha de cambiar. La ruleta se gira hasta que en los dígits se llega al bloque 111.



Por ejemplo, la serie 111 12 3 313 en la ruleta se traduce en:
000 → 100 → 000 → 100 → 000 → 010 → 011 → 010 → 110 → 111.

Después de nueve minutos todas las avispas están en la habitación 1. Al lado de esto, miremos la migración del escarabajo en el cubo.



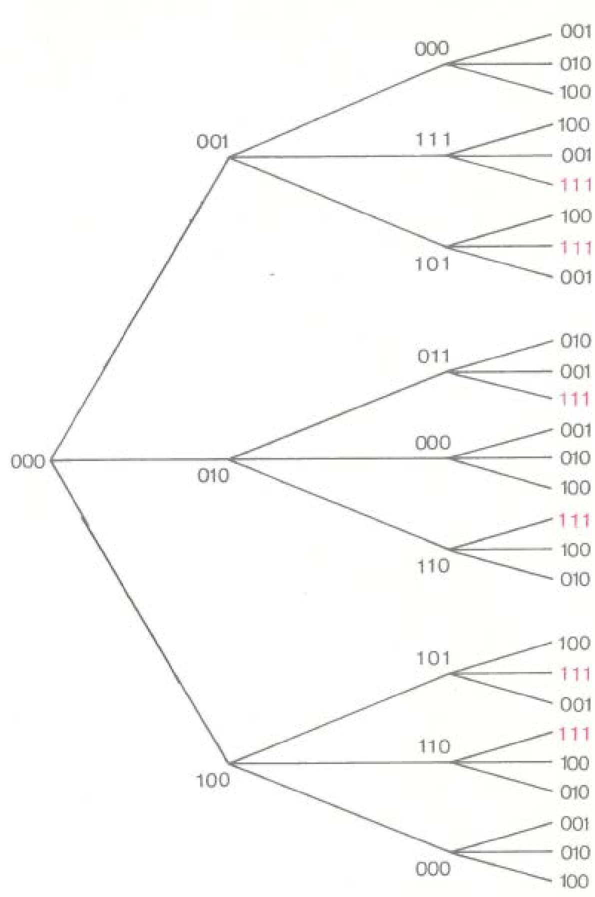
Aquí tenéis los vértices del cubo con bloques numéricos de ceros y unos designados.
Cada uno conectado por una arista donde los vértices del cubo se diferencian exactamente en un dígito.

El escarabajo empieza en el 000, la ruleta se gira como arriba y el escarabajo va a la esquina con un 1 en el primer, segundo o tercer lugar en consecuencia. Después va a la esquina donde el dígito del lugar indicado por la ruleta difiere de su posición actual. Cuando el escarabajo llega al 111, el juego se acaba.

Esto muestra la correspondencia total entre los dos juegos.

2 . Tened en cuenta que la secuencia ha de tener siempre un número impar de dígitos. (Si **3** avispas han de cambiar de habitación, ida y vuelta sin resultado añade siempre un número par de dígitos al teclado numérico.)

3. La media teórica es de 10 minutos.
Para ilustrar su cálculo, dibujemos un diagrama de árbol indicando las posibles estaciones intermedias:



Después de tres minutos como muy pronto, todas las avispas pueden estar en la habitación adecuada (el escarabajo será comido por el pájaro).
Si hacemos el experimento n veces, la media estará dentro de ins $\frac{2}{9}n$ casos.

Calculemos con u tiempo de espera medio (lifetime) de x minutos. Entonces podéis verlo a través del diagrama de árbol que para los inacabados 7n/9 caídas después de 3 minutos (vida prevista x - 3 minutos) que lo mismo se aplica que después d'1 minuto para los n casos. Así que podemos equiparar:

$7n/9(x-1) = n(x-3)$

$x = 10$

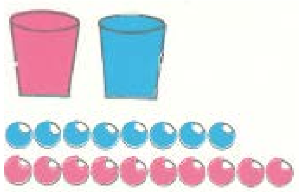
Mirad también la nota 2 del juego 9.

4 . En lugar de una serie larga de lanzamientos con los dados o giros de la ruleta (para obtener un buen valor medio), también se pueden utilizar aquí números aleatorios: por ejemplo, para determinar la vida útil, empezad en una nueva fila de la tabla con los números aleatorios y continuad la línea hasta que el escarabajo sea comido por el pájaro. Los dígitos 0, 7, 8, 9 se ignoran o, por ejemplo, coged estos bloques: 1, 2 , 3; 4 , 5, 6; 7,8,9 juntos en una tirada y solo se ignora el 0.

12. El Casino I (para 3 jugadores)

Material:

2 Cubiletes (de diferentes colores)
8 Perlas azules
10 Perlas rojas
50 Fichas



Regles del joc:

Un jugador es banquero. Tiene el banco de 50 fichas y anota los movimientos de los otros dos jugadores. Los otros dos jugadores reciben cada uno 10 fichas como capital inicial. Hay 4 perlas azules y cinco rojas en cada cubilete.
Los alumnos, por turnos, sacan una perla de uno de los cubiletes de dados con los ojos cerrados y ha de acertar el color correctamente.
Cada jugador es libre de decidir de qué cubilete de dados quiere sacar a perla, pero después la tiene que volver a poner en el otro cubilete (del cual no la ha sacado).
Quien predice correctamente el color de la perla recibe 1 ficha del banco; si no lo adivina, paga al banco 1 ficha. El ganador es quien llegue primero a 25 fichas.

Observaciones:

1. El juego consiste en familiarizar a los alumnos con las distribuciones de probabilidad en constante cambio. Para poder hablarlo, el banquero también tendría que mantener un registro de los movimientos individuales.

Si los dos cubiletes están etiquetados con A y B, el registroe puede ser así:

Juego	Jugador 1			Jugador 2		
	Elige Urna	Predice	Saca	Elige Urna	Predice	Saca
1	*A*	R	R			
2				A	A	R
3	*B*	R	A			

2. La manera más fácil de descubrir la mejor estrategia e juego es mirar un diagrama de árbol. (Empezamos con la urna A; si el primer jugador elige la urna B, simplemente intercanviad A y B en todo el diagrama de árbol.)

A

A (3*A*, 5R)
B (5*A*, 5R)
El jugador 2 tendría que sacar de *A* y elegir el rojo

A (4*A*, 4R)
B (5*A*, 6R)
El jugador 2 tendría que sacar de B y elegir el rojo

A (2*A*, 5R)
B (6*A*, 5R)
El jugador 1 tendría que sacar de *A* y elegir el rojo.

A (3*A*, 4R)
B (5A, 6R)
El jugador 1 tendría que sacar de *A* y elegir el rojo.

A (5*A*, 4R)
B (4*A*, 6R)
El jugador 1 tendría que sacar de B y elegir el rojo.

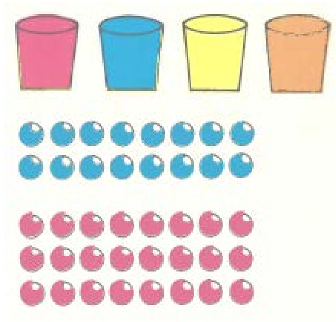
A (4*A*, 5R)
B (5*A*, 5R)
El jugador 1 tendría que sacar de *A* y elegir el rojo.

En consecuencia, se puede continuar este árbol de la estrategia respectiva más favorable.

13. El Casino II (para 5 jugadores)

Material:

4 Cubietes (de diferentes colores)
16 Perlas azules
24 Perlas rojas
80 Fichas



Reglas del juego:
Un jugador es banquero. El banco gestiona el dinero, las 80 fichas.
Los otros jugadores reciben cada uno un cubilete de dados con 4 perlas azules y 6 rojas. Cada jugador también recibe 10 fichas de capital inicial. Cada jugador en su turno saca una perla de su cubilete de dados con los ojos cerrados (también puede pasar si quiere); si saca una perla azul, paga 2 fichas al banco, si saca una de roja, recibe 2 fichas. Cuando ya no se quieren mover más jugadores, el juego termina y empieza una nueva ronda. Al inicio del juego, los jugadores se ponen de acuerdo de cuantas rondas quieren jugar en total.

Anotación:
Por lo que parece, todos tendrían que comenzar a jugar primero y seguir jugando siempre a que la probabilidad del rojo sea más grande que la del azul.
Si un jugador tiene en su cubilete el mismo número de perlas azules que perlas rojas, tendría que parar. Pero si le gusta arriesgar, seguirá jugando. Si tiene suerte y saca otra perla roja, tendría que parar después de este juego.

ISBN 3-12-168260-1