

## L'àlgebra vectorial en la geometria i en la Física (Lliure elecció. 6 crèdits)

### Vector Algebra in Geometry and Physics

Professor: Josep Manel Parra Serra [jmparra@ub.edu](mailto:jmparra@ub.edu)

Departament de Física Fonamental

Curs 2007-2008. Primer semestre. Convocatòries febrer i juny.

For the first time in the academic year 2007-2008 this free election course will be offered in a new format open to foreign students. We hope this will make it more interesting and useful for UB students.

### Lecturing format

A general lecture in English of about 1h. 20' will be given weekly from *September to December*. In these lectures the main subjects will be introduced together with guidelines for personal study. All other activities will take place in the language we agree for them.

The general lectures will be complemented with a weekly session of about 1 hour in small groups (3 to 5 students), through which a tutored follow up will be implemented.

A new limit to a maximum of 15 students is established this time. If there are more preinscribed candidates a selection will be made at the beginning, based on academic parameters evaluated in a short personal interview.

### Evaluation

Pass will be obtained after successfully completing three independent exam-exercises covering explicitly established main points of the program. There will be available repeated trials to succeed. Higher marks will be obtained through homework (portfolio) consisting in the solution of selected problems and/or writing a small essay.

Although the qualifications will be officially delivered in February and June, the evaluation has a continuous character and can individually end anytime from January to May, after the fulfilment of the student expectations.

### Portfolio and personal study.

One of the main objectives is that students get acquainted and make sensible use of some of the computer-assisted facilities that are available for the Clifford-Grassmann geometric calculus. Hence home-computer-solved exercises or problems are expected to constitute a substantial part of the portfolio. Personal comments on classnotes, books or papers will also be highly valued. At least two and certainly not more than four hours of study/homework per week should be considered for an optimal performance.

### Program

The detailed "official" program in Catalan that follows at the end of the document indicates a non-rigid minimum and maximum of what can be expected to learn, and a *first estimation* of the total number of hours needed for each topic –including general lectures, tutoring sessions *and personal study*–.

More briefly the basic topics (marked \*) to cover on a 5-4-3 week periods are:

1. Geometrical Clifford Algebra as a unique common mathematic structure for the plane, the Euclidean space and Minkowski spacetime. The general structure of the rotation and Lorentz groups and their matrix representations in physics.
2. Some special relativity topics and a geometrical outline of elementary classical electrodynamics (Lorentz force-law and Maxwell equations) in the language of Clifford-Grassmann differential forms.
3. Use of non cartesian coordinates in flat and curved spaces. Cartan's formalism for the covariant derivatives (Levi-Civita connection).

One or more advanced topics as conformal transformations, Thomas precession, Fermi-Walker transport, spinors and spinor representations, Dirac equation, etc. can be dealt with in specific tutoring sessions only if considered convenient.

Basic bibliography: pp. 1-134 (First nine chapters out of 23) of Lounesto, Pertti, Clifford algebras and spinors, 2nd ed. Cambridge University Press, 2001, 338 p. London Mathematical Society lecture note series ; 286

Software: CLICAL, REDUCE, MATHEMATICA

English translation of the detailed program that follows can be sent to interested people by e-mail on request.

**PROGRAMA (màxim) La \* indica contingut bàsic.**

### **1. L'àlgebra geomètrica de Clifford Grassmann i els grups de transformacions ortogonals**

\* Introducció: L'espai vectorial ordinari: punts i traslacions. Norma i producte geomètric. Producte escalar i producte exterior: vectors i bivectors. La subàlgebra dels elements parells. *4 hores* .

\*L'àlgebra geomètrica del pla. La representació universal de les rotacions mitjançant el producte geomètric. El bivector  $e_{12}/2$  com a generador i l'angle com a paràmetre normal. Altres representacions: els nombres complexos i les matrius ortogonals de  $SO(2)$ . *3 hores*.

\*Representació de les rotacions de l'espai. Bivectors generadors i relacions de commutació. La parametrització normal i les parametritzacions d'Euler. Altres representacions: la representació vectorial per matrius ortogonals  $SO(3)$ ; la representació operacional o *espinorial "quàntica"*  $SU(2)$  mitjançant les matrius de Pauli. *5 hores* .

\*L'àlgebra de l'operador "*nabla*" de Hamilton, en coordenades cartesianes: gradient, rotacio nal,divergència versus diferencial i codiferencial. L'operador de Laplace. *4 hores*.

\*Un passeig per la història: origen i representacions alternatives de l'àlgebra vectorial. Wessel i els nombres complexos, els quaternions de Hamilton, les magnituds extensives de Grassmann, les notacions de Gibbs i Heaviside, l'àlgebra de les matrius de Pauli. *4 hores*.

Les transformacions actives/passives com a canvis en l'objecte/observador o sistema de referència..

Il·lustració i pràctica mitjançant la modelització kepleriana del sistema solar. El grup de transformacions conformes. *6 hores*.

### **2. Introducció a l'espai temps de la teoria de la relativitat**

\*La "distància espai temps" o temps propi. L'àlgebra d'espai-temps i les magnituds direccionades en quatre dimensions. Descomposició vectorial tridimensional. El grup de les transformacions de Lorentz com a generalització immediata del grup de rotacions. La fórmula d'addició de velocitats. *6 hores* .

Les representacions matricials de les transformacions de Lorentz: La representació *espinorial* i el grup  $SL(2C)$ . El grup  $SO(1,3)$  i les matrius p-compostes (transformació de vectors/bivectors). *4 hores*.

\*L'operador *nabla* en quatre dimensions, en cartesianes. El conjunt bàsic de magnituds electromagnètiques. Les equacions de Maxwell a l'espai buit. L'equació d'ones. L'equació de Lorentz pel moviment d'una càrrega. *6 hores* .

Velocitat angular generalitzada a l'espai-temps. Transport de Fermi-Walker i precessió de Thomas. *6 hores*

L'equació de Dirac-Hestenes, porta a una interpretació "Bohmiana" de la mecànica quàntica. *5 hores*.

### **3. Sistemes de coordenades ortogonals no cartesianes (pot entendre's com a repàs i continuació de la introducció als tensors realitzada a l'assignatura de MM-II)**

\*Sistemes de coordenades ortogonals (esfèriques, cilíndriques), i bases holònomes i físiques associades: Components covariants i contravariants. Derivació de les bases (derivació covariant). Construcció i ús efectiu en la derivació de vectors i tensors de la matriu de Cartan de les 1-formes i 2-formes de la connexió. Les 2-formes de curvatura. *8 hores* .

\*L'operador *nabla* i les equacions de Maxwell en coordenades ortogonals i en relativitat general *4 hores*.