

## CAPITULO 17

# MODELOS MULTIDIMENSIONALES DE TEORIA DE RESPUESTA A LOS ITEMS

**Alberto Maydeu Olivares**

*Universidad Carlos III de Madrid*

- 17.1. Introducción
- 17.2. El modelo de respuesta a los items multivariado normal para variables dicotómicas
- 17.3. El modelo de respuesta a los items multivariado normal para variables policotómicas ordenadas (escalas Likert)
- 17.4. Función de verosimilitud marginal condicional e incondicional en modelos de respuesta a los items
- 17.5. Estimación basada en la función de verosimilitud marginal incondicional (procedimientos de información limitada)
  - 17.5.1. Método de Christofferson
  - 17.5.2. Método de McDonald
  - 17.5.3. Método de Muthén
- 17.6. Estimación basada en la función de verosimilitud marginal condicional (procedimientos de información plena): El algoritmo EM
- 17.7. Ejemplos y aplicaciones
  - 17.7.1. Variables dicotómicas: los datos de LSAT7
    - 17.7.1.1. Análisis con LISCOMP
    - 17.7.1.2. Análisis con PRELIS/LISREL
    - 17.7.1.3. Análisis con NOHARM
    - 17.7.1.4. Análisis con TESTFACT
  - 17.7.2. Variables policotómicas: los datos del LOT
    - 17.7.2.1. Análisis con LISCOMP
    - 17.7.2.2. Análisis con PRELIS/LISREL
- 17.8. Conclusiones
- 17.9. Ejercicios
- 17.10 Referencias bibliográficas

## RESUMEN

En este capítulo se ofrece una introducción a los modelos multidimensionales de respuesta los ítems. A continuación se presenta en detalle el Único modelo de este tipo que se ha utilizado en la práctica: el modelo de la ojiva normal, tanto para datos dicotómicos como para policotómicos ordenados. Existen dos procedimientos generales de estimación de este modelo, bien utilizando toda la información de los patrones de respuesta, o únicamente la información de las distribuciones marginales de orden inferior de los datos. Dentro del primer bloque encontramos el algoritmo EM; en el segundo, los métodos de estimación propuestos por Christofferson, McDonald y Muthén. Todos estos métodos de estimación son descritos con cierto detalle. Finalmente se presentan ejemplos de cómo estimar estos modelos con el software comercial existente: LISCOMP, PRELIS/LISREL, NOHARM y TESTFACT.

¿Qué son los modelos de respuesta a los items (MRI)? En un sentido amplio, son un conjunto de modelos según los cuales las respuestas a los items de tests psicológicos dependen de una o más variables no observables continuas tal que, una vez el efecto de esas variables independientes no observables es controlado, las respuestas a los items son independientes entre sí. Las respuestas a los items de tests psicológicos son habitualmente variables categóricas y como tal son tratadas en estos modelos. En la práctica, además, se ha venido utilizando el término modelos de respuesta a los items únicamente para aquellos modelos que postulaban una relación no lineal entre los items y las variables independientes no observables. En resumen, denominaremos MRI a aquel conjunto de modelos para variables categóricas (observables) dependientes no-linealmente de una o más variables no observables que denominaremos latentes.

Vamos a considerar estos aspectos más formalmente. Considérense dos vectores de variables aleatorias  $\mathbf{v}$  y  $\boldsymbol{\eta}$  de dimensiones  $n \times 1$  y  $p \times 1$ , respectivamente. Un resultado básico de Teoría de la Probabilidad nos permite escribir

$$\Pr(\mathbf{v} = \mathbf{u}) = \int \cdots \int_R g(\mathbf{v} = \mathbf{u}; \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) f(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \quad (17.1)$$

donde  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{h}$  son dos realizaciones de las variables  $\mathbf{v}$  y  $\boldsymbol{\eta}$ , respectivamente,  $f(\mathbf{h})$  es la función de densidad de las variables aleatorias  $\boldsymbol{\eta}$  y la integración se realiza con respecto a  $\boldsymbol{\eta}$ . Se denominan *modelos de rasgos latentes* (ver Bartholomew, 1987) aquellos modelos en los que

- Las únicas variables que pueden ser observadas son las  $\mathbf{v}$ , mientras que las variables aleatorias  $\boldsymbol{\eta}$  son inobservables y se asume que son continuas.
- Las variables  $\mathbf{v}$  son independientes entre sí para un valor fijo de la variable  $\boldsymbol{\eta}$ , digamos  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}$ . Es decir, las variables  $\mathbf{v}$  son condicionalmente independientes o, *localmente* independientes.

La primera parte de la definición de los modelos latentes implica que el área de integración  $p$ -dimensional  $R$  viene dada por el producto de  $p$  intervalos  $R_i = (-\infty, \infty)$ . La segunda parte de la definición implica que podemos escribir

$$g(\mathbf{v} = \mathbf{u}; \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) = \prod_{i=1}^n g(v_i = u_i; \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) \quad (17.2)$$

y, por tanto, podemos re-escribir (17.1) como

$$\Pr(\mathbf{v} = \mathbf{u}) = \int \cdots \int_R g(\mathbf{v} = \mathbf{u}; \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) f(\mathbf{h}) d\mathbf{h} = \int \cdots \int_R \prod_{i=1}^n g(v_i = u_i; \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) f(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \quad (17.3)$$

En la ecuación (17.3) es necesario especificar: (a) la dimensionalidad del vector de variables latentes,  $p$ ; (b) la expresión de la función  $g(v_i = u_i; \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h})$ , y (c) la expresión de la función de densidad  $f(\mathbf{h})$ .

La finalidad última de los modelos de rasgos latentes es la de ofrecer una representación parsimoniosa de datos multivariados. Es decir, estamos interesados en hallar un modelo del tipo (17.3) que nos proporcione una adecuada representación de los datos en tan pocas dimensiones como sea posible. Es decir, deseamos que  $p$  sea menor que  $n$ , a ser posible mucho menor que  $n$ .

Los modelos de rasgos latentes son un conjunto amplio de modelos entre los que se encuentran el modelo del factor común, o los modelos de respuesta a los items. Así, el modelo del factor común es un modelo de rasgos latentes caracterizado por asumir que (1) las variables observadas son continuas, (2) las funciones  $g(v_i = u_i; \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h})$  son lineales y (3) la función de densidad de las variables latentes  $f(\mathbf{h})$  es multivariada normal (ver Ecuación 17.3).

El objetivo de este capítulo es el subconjunto de los modelos de rasgos latentes en los que variables observadas son categóricas, es decir, los *modelos de respuesta a los items*. En la literatura el término MRI se suele reservar para aquellos modelos en los que además las funciones  $g(v_i = u_i; \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h})$  son no lineales. Aquí seguiremos esta convención y nos limitaremos a la exposición de modelos en los que  $g(v_i = u_i; \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h})$  son funciones no lineales. Aquellos lectores interesados en la utilización de funciones lineales pueden consultar McDonald (1982, en prensa b).

Existe una amplia literatura sobre modelos unidimensionales de respuesta a los items, es decir, con una única variable latente,  $p = 1$ . Se han propuesto modelos unidimensionales para datos dicotómicos, policotómicos ordenados (escalas Likert), y policotómicos no ordenados. Thissen y Steinberg (1986) presentan una taxonomía de tales modelos. En la actualidad existen métodos de estimación apropiados para todos estos modelos (ver Baker, 1992). En este capítulo abordaremos el caso más general en el que  $p > 1$ , es decir no asumiremos necesariamente que una única variable latente subyace a las respuestas observadas, sino que puede ser necesario postular la existencia de varias variables latentes para representar adecuadamente los datos observables. A menudo MRI multidimensionales son capaces de modelar adecuadamente datos a los que los MRI unidimensionales se ajustan de forma claramente insatisfactoria.

Se han propuesto modelos multidimensionales para datos dicotómicos y para datos policotómicos ordenados y se dispone de métodos de estimación implementados en programas comerciales para este tipo de datos. Pese a que se han propuesto modelos multidimensionales para datos policotómi-

cos no ordenados (ver por ejemplo Takane & de Leeuw, 1987) hasta la fecha no se ha implementado ningún procedimiento de estimación de dichos modelos por lo que el análisis de este tipo de datos no es cubierto en este capítulo. Tampoco consideraremos aquí modelos con asíntotas inferiores distintas de cero, es decir, con parámetros destinados a modelar el que los sujetos intenten adivinar la respuesta correcta  $a$  los ítems.

Asimismo, discutiremos en este capítulo únicamente modelos paramétricos. En la literatura de MRI se denominan funciones de respuesta a los ítems a un ítem (ORFs en inglés) a las funciones  $g(v_i = u_i, \eta = \mathbf{h}) \equiv \Pr(v_i = u_i, \eta = \mathbf{h})$ . En los modelos paramétricos, estas funciones se expresan como una función de una o más constantes que deben ser estimadas a las que se puede asignar una interpretación psicológica. A estas constantes se las denomina parámetros. Así hablamos, por ejemplo, de parámetros de discriminación o de dificultad. En los modelos no paramétricos, en cambio, los parámetros que aparecen en las ORFs carecen de interpretación alguna (Maydeu-Olivares, 1994). Hasta el momento, no se ha propuesto ningún modelo multidimensional de respuesta a los ítems no paramétrico (ver sin embargo Levine, 1994; Hoijtink & Molenaar, 1996).

Durante años, los efectos de los ítems y los efectos de las variables latentes han sido tratados como efectos fijos en la literatura de teoría de respuesta a los ítems. Ver, por ejemplo, Lord (1980). En este enfoque, se especifica una función paramétrica para cada una de las ORFs (por ejemplo una función logística de tres parámetros), y se asigna un parámetro a cada sujeto (que corresponde a la posición del sujeto en el continuo representado por la variable latente). El objetivo es entonces el estimar simultáneamente los parámetros asociados con los ítems y los parámetros asociados con los sujetos. Sin embargo tal y como notaron Neyman y Scott (1948), dado que los parámetros asociados con los sujetos aumentan en número conforme se incrementa el tamaño de la muestra, las deseables propiedades asintóticas de los estimadores de máxima verosimilitud o mínimos cuadrados generalizados no se cumplen. Como medio para solventar este problema, Bock y Lieberman (1970) propusieron considerar a los ítems como un efecto fijo, pero a las variables latentes como un efecto aleatorio. En tal caso, se estimarían los parámetros asociados con cada uno de los ítems, pero únicamente se estimaría la distribución (o densidad) de los parámetros asociados con los sujetos. Este es el enfoque que seguiremos en este capítulo. Así, en la ecuación (17.3) que utilizamos como definición de modelo de rasgos latentes (y por tanto como definición de modelo de respuesta a los ítems) aparecen los ítems como un efecto fijo —debemos estimar cada una de las ORFs, es decir, las funciones  $\Pr(v_i = u_i | \eta = \mathbf{h})$ — y las variables latentes como un efecto aleatorio —únicamente debemos estimar la densidad de las variables latentes  $f(\mathbf{h})$ .

La conceptualización de los modelos de rasgos latentes como modelos mixtos (ítems como efectos fijos, rasgos latentes como efectos aleatorios) es la utilizada por ejemplo por Bartholomew (1987), McDonald (en prensa),

o Holland (1990). No se cubrirán en este capítulo los modelos de rasgos latentes completamente fijos (como en Lord, 1980). El lector interesado en la distinción entre el tratamiento de las variables latentes como efectos fijos o efectos aleatorios puede consultar McDonald (1985a). Mislevy y Stocking (1989), Yen (1991) y Baker (1992), comparan la conceptualización de los modelos de respuesta a los ítems unidimensionales en los que se trata a los ítems y a los rasgos latentes como efectos fijos implementada en el programa LOGIST (Wingersky, Barton & Lord, 1976) con la conceptualización de los ítems como efecto fijo y los rasgos latentes como efecto aleatorio implementada en el programa BILOG (Mislevy & Bock, 1989). Estos autores concluyen que en general se obtienen mejores resultados si se trata a las variables latentes como efectos aleatorios.

En este capítulo únicamente discutiremos modelos paramétricos no lineales de respuesta a los ítems del tipo

$$\Pr(v_i = u_i, \eta = \mathbf{h}) = \varphi\left(x_i + \sum_{j=1}^p \beta_j I_{ij}\right) \quad (17.4)$$

donde  $\varphi(\bullet)$  representa una función paramétrica estrictamente no lineal pero aditiva en los parámetros  $\beta$ . Estos modelos se han denominado modelos no lineales compensatorios, en contraposición a los modelos multiplicativos (o no compensatorios), del tipo

$$\Pr(v_i = u_i, \eta = \mathbf{h}) = \prod_{j=1}^p \varphi(x_i + \beta_j I_{ij}) \quad (17.5)$$

Simpson (1978) y Whitely (1980) han propuesto modelos unidimensionales no compensatorios (ver Reckase, en prensa). Sin embargo, no existe ningún procedimiento satisfactorio de estimación de tales modelos en modelos multidimensionales. Las dos funciones paramétricas,  $\varphi(\bullet)$ , más utilizadas en (17.4) han sido la cumulativa logística y la cumulativa normal. En el caso de modelos unidimensionales la función logística presenta ciertas ventajas sobre la normal, mientras que en el caso de modelos multidimensionales la función normal presenta claras ventajas sobre la logística (Mislevy, 1986). Diversos autores han postulado modelos multidimensionales de respuesta a los ítems basados en la función cumulativa logística (McKinley & Reckase, 1983; McDonald, en prensa). Carlson (1987) ha desarrollado un programa denominado MIRTE que permite estimar dichos modelos. Sin embargo dicho programa trata a las variables latentes como un efecto fijo y se ha comprobado (ver Reckase, en prensa) que también en los modelos multidimensionales la estimación utilizando un modelo mixto es más efectiva que la estimación utilizando un modelo de efectos únicamente fijos como en el programa MIRTE, por lo que los modelos multidimensionales basados en la función logística no serán discutidos aquí.

17.2. EL MODELO DE RESPUESTA A LOS ITEMS  
MULTIVARIADO NORMAL PARA VARIABLES DICOTOMICAS

Cuando las variables observadas son dicotómicas,  $v_i = \{0, 1\}$ , y  $\phi(\bullet)$  en (17.4) es una función cumulativa normal estándar, denotada por  $\Phi(\bullet)$ , las ORFs vienen dadas por

$$\Pr(v_i = 1 | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) = \Phi(z_i + \boldsymbol{\beta}'_i \mathbf{h}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_i + \boldsymbol{\beta}'_i \mathbf{h}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \quad (17.6a)$$

$$\Pr(v_i = 0 | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) = 1 - \Pr(v_i = 1 | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) \quad (17.6b)$$

donde  $z_i$  y  $\boldsymbol{\beta}'_i$  son el intercepto y vector de pendientes del ítem  $i$  y se asume que los rasgos latentes siguen una distribución multivariada normal. Es decir

$$f(\mathbf{h}) = \phi(\mathbf{h}) \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Phi}) \quad (17.7)$$

donde  $\phi(\bullet)$  denota una densidad multivariada normal, y  $\boldsymbol{\Phi}$  es la matriz de correlaciones entre los factores. Dado que podemos escribir

$$\Pr(v_i = u_i | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) = [\Pr(v_i = 1 | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h})]^{u_i} [1 - \Pr(v_i = 1 | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h})]^{1-u_i} \quad v_i = \{0, 1\} \quad (17.8)$$

Sustituyendo (17.8) y (17.7) en (17.3), obtenemos

$$\Pr(\mathbf{v} = \mathbf{u}) = \int_{\mathcal{R}} \dots \int_{\mathcal{R}} \prod_{i=1}^n [\Pr(v_i = 1 | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h})]^{u_i} [1 - \Pr(v_i = 1 | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h})]^{1-u_i} \phi(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \quad (17.9)$$

Las ecuaciones (17.6), (17.7) y (17.9) definen el MRI normal para datos dicotómicos.

Existe una forma alternativa de derivar el MRI normal. Considérese un vector de variables  $\mathbf{y}$  de dimensiones  $n \times 1$  que sigue el modelo del factor común, y asúmase una densidad multivariada normal para  $\mathbf{y}$ . Por tanto, la densidad marginal de  $\mathbf{y}$  viene dada por (véase por ejemplo Bartholomew, 1987)

$$f^*(\mathbf{y}) \sim N(\boldsymbol{\mu}_y, \boldsymbol{\Sigma}_y) = N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}' + \boldsymbol{\Psi}) \quad (17.10)$$

y la densidad de  $\mathbf{y}$  condicionada a un valor fijo de  $\boldsymbol{\eta}$  es

$$g^*(\mathbf{y} = \mathbf{y}^* | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) \sim N(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{h}, \boldsymbol{\Psi}) \quad (17.11)$$

donde  $\boldsymbol{\Lambda}$  es una matriz de cargas factoriales,  $\boldsymbol{\Psi}$  es una matriz diagonal de varianzas residuales y  $\boldsymbol{\Phi}$  es la matriz de correlaciones entre las variables latentes o factores. Las variables aleatorias  $\mathbf{y}$  no son directamente observa-

bles, sino que únicamente observamos

$$v_i = \begin{cases} 1 & \text{si } y_i \geq \tau_i \\ 0 & \text{si } y_i < \tau_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (17.12)$$

donde el vector de parámetros  $\boldsymbol{\tau}$  se denominan umbrales.

Dado que las variables observables son dicotómicas, las varianzas de las variables  $\mathbf{y}$  no son identificables, por lo que es habitual fijar su valor igual a a unidad, es decir,

$$diag(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}' + \boldsymbol{\Psi}) = \mathbf{I} \quad \text{mediante } \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{I} - diag(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}') \quad (17.13)$$

Las ecuaciones (17.11) y (17.12) implican que

$$\Pr(\mathbf{v} = \mathbf{u}) = \int_{\mathcal{R}^*} \dots \int_{\mathcal{R}^*} f^*(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (17.14)$$

donde  $f^*(\mathbf{y})$  es la densidad multivariada dada en (17.10) y  $\mathcal{R}^*$  es un área  $n$ -dimensional de integración dada por el producto de intervalos

$$\mathcal{R}^*_i = \begin{cases} (\tau_i, \infty) & \text{si } v_i = 1 \\ (-\infty, \tau_i) & \text{si } v_i = 0 \end{cases} \quad (17.15)$$

El modelo especificado utilizando (17.14) y (17.15) es equivalente al especificado por (17.6), (17.7) y (17.9). La demostración es como sigue (Takane & de Leeuw, 1987). Podemos escribir

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{v} = \mathbf{u}) &= \int_{\mathcal{R}^*} \dots \int_{\mathcal{R}^*} f^*(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\ &= \int_{\mathcal{R}^*} \dots \int_{\mathcal{R}^*} \left[ \int_{\mathcal{R}} \dots \int_{\mathcal{R}} g^*(\mathbf{y} = \mathbf{y}^* | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) f(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \right] d\mathbf{y} = \\ &= \int_{\mathcal{R}^*} \dots \int_{\mathcal{R}^*} f(\mathbf{h}) \left[ \int_{\mathcal{R}^*} \dots \int_{\mathcal{R}^*} g^*(\mathbf{y} = \mathbf{y}^* | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{h} \quad [17.16] \end{aligned}$$

En (17.16) aplicamos en primer lugar (17.1), para después cambiar el orden de integración. Luego, utilizando (17.2), es decir, que las respuestas a los ítems son condicionalmente independientes, y (17.8) obtenemos

$$\int_{R^*} \dots \int g^*(\mathbf{y} = \mathbf{y}^* | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) d\mathbf{y} = \prod_{i=1}^n \int_{R_i^*} g^*(y_i = y_i^* | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) dy_i =$$

$$= \prod_{i=1}^n \left[ \int_{\tau_i}^{\infty} g^*(y_i = y_i^* | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) dy_i \right] \left[ 1 - \int_{\tau_i}^{\infty} g^*(y_i = y_i^* | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) dy_i \right]^{v_i} \quad (17.17)$$

Dado que la función de densidad de  $y$  condicionada a  $\boldsymbol{\eta}$  es normal, hallamos que las ORFs son

$$\Pr(v_i = 1 | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) = \Pr(y_i | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h} > \tau_i) = \int_{\tau_i}^{\infty} g^*(y_i = y_i^* | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) dy_i =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{y_i, \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}}} \int_{\tau_i}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - \mu_{y_i, \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}}}{\sigma_{y_i, \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}}}\right)^2\right] dy_i \quad (17.18)$$

donde según (17.11)

$$\mu_{y_i, \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}} = \lambda_i' \mathbf{h}$$

$$\sigma_{y_i, \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}} = \sqrt{\Psi_i} = \sqrt{1 - \lambda_i' \Phi \lambda_i} \quad (17.19)$$

Finalmente podemos convertir (17.18) en una función cumulativa normal estándar usando el cambio de variable

$$z_i = \frac{y_i - \mu_{y_i, \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}}}{\sigma_{y_i, \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}}} \quad (17.20)$$

en (17.18) ya que entonces  $dy_i = \sigma_{y_i, \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}} dz_i$ , y cuando  $y_i = \tau_i$ ,  $z_i = \frac{\tau_i - \lambda_i' \mathbf{h}}{\sqrt{1 - \lambda_i' \Phi \lambda_i}}$ , por lo que

$$\Pr(v_i = 1 | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) = \int_{\frac{\tau_i - \lambda_i' \mathbf{h}}{\sqrt{1 - \lambda_i' \Phi \lambda_i}}}^{\infty} \phi(z_i) dz_i = 1 - \Phi\left(\frac{\tau_i - \lambda_i' \mathbf{h}}{\sqrt{1 - \lambda_i' \Phi \lambda_i}}\right) = \Phi\left(\frac{-\tau_i + \lambda_i' \mathbf{h}}{\sqrt{1 - \lambda_i' \Phi \lambda_i}}\right) \quad (17.21)$$

Finalmente, para demostrar que el modelo especificado por las ecuaciones (17.10) a (17.14), es el mismo que el especificado por las ecuaciones (17.6) a (17.9) es necesario hallar la equivalencia entre las ecuaciones (17.6a) y (17.21). Esta viene dada por

$$\alpha_i = \frac{-\tau_i}{\sqrt{1 - \lambda_i' \Phi \lambda_i}} \quad \text{y} \quad \beta_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\sqrt{1 - \lambda_i' \Phi \lambda_i}} \quad (17.22)$$

lo que concluye la demostración de que (17.6) y (17.21) son diferentes parametrizaciones del mismo modelo. Denominaremos la parametrización da-

da en (17.6) como parametrización de teoría de respuesta a los items (TRI), y la parametrización dada en (17.21) como parametrización factor analítica (FA). Existe aun otra parametrización alternativa del mismo modelo, quizás la más conocida por ser la utilizada en Lord y Novick (1968) y Lord (1980). Esta es

$$\Pr(v_i = 1 | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) = \Phi[a_i(h - b_i)] \quad (17.23)$$

donde  $a_i$  es el denominado parámetro de discriminación y  $b_i$  es el denominado parámetro de dificultad. Sin embargo, la parametrización de Lord únicamente puede utilizarse en modelos unidimensionales y no será utilizada aquí. La equivalencia entre la parametrización de Lord y la TRI viene dada por

$$a_i = \beta_i \quad \text{y} \quad b_i = -\alpha_i \beta_i \quad (17.24)$$

mientras que la equivalencia entre la parametrización de Lord y la FA viene dada por (ver Lord & Novick, p. 375)

$$a_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{1 - \lambda_i^2}} \quad \text{y} \quad b_i = \frac{\tau_i}{\lambda_i} \quad (17.25)$$

### 17.3. EL MODELO DE RESPUESTA A LOS ITEMS MULTIVARIADO NORMAL PARA VARIABLES POLICOTOMICAS ORDENADAS (ESCALAS LIKERT)

Cuando las variables observadas son policotomicas,  $v_i = \{0, 1, \dots, m - 1\}$ , asumiremos como en el caso dicotómico que los rasgos latentes siguen una distribución multivariada normal dada en (17.7), y que  $\phi(\bullet)$  en (17.4) es una función cumulativa normal estándar, denotada por  $\Phi(\bullet)$ , aunque en este caso las ORFs vienen dadas por

$$\Pr(v_i = u_i | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) =$$

$$= \begin{cases} \Pr(v_i \geq m - 1 | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) = \Phi(x_{i, m-1} + \beta_i' \mathbf{h}) & \text{si } v_i = m - 1 \\ \Pr(v_i \geq 1 | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) - \Pr(v_i \geq 2 | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) = \Phi(x_{i, 1} + \beta_i' \mathbf{h}) - \Phi(x_{i, 2} + \beta_i' \mathbf{h}) & \text{si } v_i = 1 \\ 1 - \Pr(v_i \geq 1 | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) = 1 - \Phi(x_{i, 1} + \beta_i' \mathbf{h}) & \text{si } v_i = 0 \end{cases} \quad (17.26)$$

Nótese que en cuando los items constan de  $m$  categorías, cada item tiene asociados  $m - 1$  interceptos,  $x_{i, k}$ ,  $k = 1, \dots, m - 1$ . En lo que sigue, es conve-

niente introducir la siguiente notación. Sea

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i = k \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (17.27)$$

Utilizando esta notación podemos sustituir (17.8) por

$$\Pr(v_i = u_i | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) = \prod_{k=0}^{m-1} [\Pr(v_i = u_i | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h})]^{x_{ik}} \quad (17.28)$$

con lo que en vez de (17.9) escribiremos

$$\Pr(\mathbf{v} = \mathbf{u}) = \int_R \dots \int_R \prod_{i=1}^n \prod_{k=0}^{m-1} [\Pr(v_i = u_i | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h})]^{x_{ik}} \phi(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \quad (17.29)$$

Por otra parte, el enfoque FA para datos policotómicos ordenados puede obtenerse como sigue. Como en el caso de variables dependientes dicotómicas, asumiremos la existencia de un vector de variables  $\mathbf{y}$  multivariado normal con distribución marginal dada por (17.10) y distribución condicional a los rasgos latentes dada por (17.11). Dichas variables no son directamente observables, sino que únicamente podemos observar un vector de variables  $\mathbf{v}$  tal que

$$v_i = \begin{cases} m-1 & \text{si } y_i \geq \tau_{i,m-1} \\ \vdots & \\ 1 & \text{si } \tau_{i,2} \geq y_i \geq \tau_{i,1} \\ 0 & \text{si } y_i < \tau_{i,1} \end{cases} \quad (17.30)$$

Por tanto, como en el caso de variables dicotómicas, utilizaremos (17.14), donde  $f^*(\mathbf{y})$  es la densidad multivariada dada en (17.10) y  $R^*$  es un área  $n$ -dimensional de integración aunque en este caso los intervalos son

$$R_i^* = \begin{cases} (\tau_{i,m-1}, \infty) & \text{si } v_i = m-1 \\ \vdots & \\ (\tau_{i,1}, \tau_{i,2}) & \text{si } v_i = 1 \\ (-\infty, \tau_{i,1}) & \text{si } v_i = 0 \end{cases} \quad (17.31)$$

Por tanto en este modelo las ORFs,

$$\Pr(v_i = u_i | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) = \int_{R_i^*} g^*(v_i = u_i | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) dy_i$$

serán

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{R_i^*} g^*(v_i = u_i | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) dy_i = \\ & \int_{\tau_{i,m-1}}^{\infty} \phi(\boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{h}, \psi_i) dy_i = \Phi\left(\frac{-\tau_{i,m-1} + \boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{h}}{\sqrt{\psi_i}}\right) & \text{si } v_i = m-1 \\ & \vdots \\ & \int_{\tau_{i,1}}^{\tau_{i,2}} \phi(\boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{h}, \psi_i) dy_i = \Phi\left(\frac{-\tau_{i,1} + \boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{h}}{\sqrt{\psi_i}}\right) - \Phi\left(\frac{-\tau_{i,2} + \boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{h}}{\sqrt{\psi_i}}\right) & \text{si } v_i = 1 \\ & \int_{-\infty}^{\tau_{i,1}} \phi(\boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{h}, \psi_i) dy_i = 1 - \Phi\left(\frac{-\tau_{i,1} + \boldsymbol{\lambda}_i \mathbf{h}}{\sqrt{\psi_i}}\right) & \text{si } v_i = 0 \end{aligned} \right. \quad (17.32)$$

donde  $\psi_i$  es el  $i$ -ésimo elemento diagonal de  $\Psi$  definida en (17.19).

Utilizando (17.16) y (17.17)—aunque sustituyendo (17.8) por (17.28) en (17.17)—se demuestra que los enfoques FA y el TRI son equivalentes también en el caso policotómico ordenado, con equivalencias obtenibles utilizando (17.22), aunque en este caso hay  $m-1$  umbrales ( $\tau$ )/interceptos ( $\alpha$ ) en cada ítem, en vez de uno solo como en caso de variables dicotómicas.

### 17.3. FUNCION DE VEROSIMILITUD MARGINAL CONDICIONAL E INCONDICIONAL EN MODELOS DE RESPUESTA A LOS ITEMS

En la literatura de MRI se ha venido denominando estimación *marginal* de los parámetros a aquellos procedimientos de estimación que tratan a las variables latentes como efectos aleatorios acerca de los cuales únicamente estimamos su distribución. Esto es en contraposición a otros procedimientos propuestos de estimación tales como máxima verosimilitud condicional o máxima verosimilitud conjunta (ver Baker, 1992) que tratan a las variables latentes como efectos fijos. En este capítulo únicamente trataremos procedimientos de estimación marginales.

Las respuestas a los ítems son variables categóricas y podemos agruparlas en una tabla de contingencias  $m^n$ , donde  $m$  es el número de opciones de cada ítem y  $n$  es el número de ítems. Si los vectores de respuesta a los ítems son independientes e idénticamente distribuidos, entonces las observaciones siguen una distribución multinomial (ver Agresti, 1990), y por tanto la distribución conjunta de los datos,  $L(\mathbf{v} | \boldsymbol{\pi})$ , es decir, la probabilidad de la muestra de acuerdo con el modelo es

$$L(\mathbf{v} | \boldsymbol{\pi}) = \frac{N!}{m^n} \prod_{c=1}^{m^n} \pi_c^{n_c} \quad c = 1, \dots, m^n \quad (17.33)$$

donde  $\pi_c$  y  $n_c$  son la probabilidad de observar el patrón de respuestas  $c$ , y el número de sujetos con el patrón de respuesta  $c$ , respectivamente. En los modelos de respuesta a los ítems se imponen restricciones a las probabilidades  $\pi_c$  y escribiremos  $\pi_c(\boldsymbol{\vartheta})$  para indicar que los parámetros de  $\pi_c$  de la distribución multinomial dependen de un vector de parámetros  $\boldsymbol{\vartheta}$ . La forma de la función  $\pi_c(\boldsymbol{\vartheta})$  viene dada por el MRI que se hipotetice para los datos. Como se ha indicado, en este capítulo únicamente consideraremos modelos multivariados normales y por tanto, asumiremos que

$$\pi_c(\boldsymbol{\vartheta}) \equiv \Pr(\mathbf{v} = \mathbf{u}) = \int_{R^*} \dots \int \phi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Psi}) \quad (\text{enfoque FA}) \quad (17.34)$$

donde  $R^*$  es un área  $n$ -dimensional de integración dada por el producto de intervalos del tipo (17.15) si los ítems son dicotómicos, o (17.30) si son policotómicos, o que

$$\begin{aligned} \pi_c(\boldsymbol{\vartheta}) &\equiv \Pr(\mathbf{v} = \mathbf{u}) = \int_{R^*} \dots \int \Pr(v = u_i | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) \phi(\mathbf{h}) d\mathbf{h} = \\ &= \int_{R^*} \dots \int \left[ \prod_{i=1}^n \Pr(v_i = u_i | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) \right] \phi(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \quad (\text{enfoque TRI}) \quad (17.35) \end{aligned}$$

donde  $R$  es un Área  $p$ -dimensional de integración ya que la integración se realiza con respecto a  $\boldsymbol{\eta}$  y por tanto  $R = (-\infty, \infty)$ . Las funciones  $\Pr(v_i = u_i | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h})$  son las ORFs, es decir las probabilidades de observar una respuesta determinada a un ítem condicionadas a un nivel fijo de las variables latentes. Las ORFs vienen dadas por (17.6) y (17.26) en los casos dicotómico y policotómico, respectivamente.

Sea  $\text{vec}(\bullet)$  un operador que mapea los elementos de una matriz en un vector. En el enfoque FA  $\boldsymbol{\Theta} = \text{vec}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\Phi})$ , mientras que en el enfoque TRI  $\boldsymbol{\Theta} = \text{vec}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Phi})$ . Nótese que los enfoques FA y TRI no difieren únicamente en la parametrización de los modelos, sino, y esto es mucho más importante, en cómo formulan la función de verosimilitud de los datos. En el enfoque FA, la estimación de los parámetros se realiza a partir de las probabilidades marginales de observar los ítems, es decir,  $\Pr(\mathbf{v} = \mathbf{u})$ . En contraste, en el enfoque TRI, la estimación de los parámetros se realiza a partir de las probabilidades de los ítems condicionadas en los rasgos latentes,  $\Pr(v = u_i | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h})$ , es decir, a partir de las ORFs. Ambos enfoques, como se ha demostrado en el apartado anterior, son equivalentes.

Una vez se han observado los datos, la función (17.33) depende de los parámetros del modelo y la denominaremos función de verosimilitud,  $L(\boldsymbol{\vartheta} | \mathbf{v})$ . Tomando logaritmos en (17.33) obtenemos

$$\ln L(\boldsymbol{\vartheta} | \mathbf{v}) = C + \sum_{c=1}^{m^n} n_c \ln \pi_c(\boldsymbol{\vartheta}) = C + N \sum_{c=1}^{m^n} p_c \ln \pi_c(\boldsymbol{\vartheta}) \quad (17.36)$$

donde  $C$  es una constante que no depende de los parámetros del modelo, y  $p_c = n_c/N$  es la proporción observada de sujetos con patrón de respuestas  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ , o lo que es lo mismo, en la celdilla  $c$  de la tabla de contingencias. La expresión (17.36) es la función de verosimilitud marginal de los parámetros  $\boldsymbol{\vartheta}$  en los modelos de respuesta a los ítems. Dependiendo de que  $\pi_c(\boldsymbol{\vartheta})$  se exprese como (17.34) o (17.35) la denominaremos función de verosimilitud marginal incondicional o condicional, respectivamente.

Para evaluar la función de verosimilitud (17.36) es necesario calcular  $\pi_c(\boldsymbol{\vartheta})$  utilizando (17.34) o (17.35). Nótese que en estas dos expresiones es necesario evaluar una integral multivariada normal. Las integrales multivariadas normales no pueden ser resueltas directamente aunque sí pueden ser aproximadas numéricamente si la dimensionalidad del Área de integración es pequeña (digamos  $< 5$ ). Obsérvese que en (17.34) es necesario evaluar integrales multivariadas de dimensión  $n$  (el número de ítems), mientras que en (17.35) es necesario evaluar  $n$  integrales univariadas (las correspondientes a las ORF) y seguidamente evaluar una integral multivariada de dimensión  $p$  (el número de variables latentes). Pese a que a primera vista parece mucho más conveniente utilizar (17.35) que (17.34) para estimar los parámetros de los modelos de respuesta a los ítems, cada uno de los enfoques tiene sus ventajas y desventajas, los cuales discutiremos una vez hayamos presentado procedimientos de estimación basados en ambos enfoques.

## 17.5. ESTIMACION BASADA EN LA FUNCIÓN DE VEROSIMILITUD MARGINAL INCONDICIONAL (PROCEDIMIENTOS DE INFORMACION LIMITADA)

En este apartado examinaremos los métodos de estimación propuestos por Christoffersson (1975), McDonald (1985a) y Muthén (1978, 1984). De éstos, únicamente Muthén (1984) aborda el caso de datos policotómicos ordenados. El resto de métodos de estimación fueron propuestos para variables dicotómicas.

### 17.5.1. Método de Christoffersson

Para estimar un MRI normal utilizando la función de verosimilitud marginal incondicional es necesario evaluar repetidamente la integral multivariada normal dada en (17.34) cuya dimensionalidad se incrementa linealmente con el número de ítems. Dado que únicamente podemos aproximar numéricamente una integral multivariada normal de dimensión inferior a 5, esto implica que utilizando (17.34) únicamente podemos estimar directamente tests de unos 5 ítems, lo cual no resulta muy útil en aplicaciones reales. Sin embargo, obviamente podemos evaluar utilizando (17.34) la probabilidad de la respuesta a un ítem, o a una pareja de ítems. Estas son



$$\pi_i \equiv \Pr(v_i = 1) = \int_{\tau_i}^{\infty} \phi(\mu_{y_i}, \sigma_{y_i}^2) dy_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (17.37)$$

$$\pi_{i,i'} \equiv \Pr(v_i = 1, v_{i'} = 1) = \int_{\tau_i}^{\infty} \int_{\tau_{i'}}^{\infty} \phi(\mu_{y_i}, \sigma_{y_i}^2, \mu_{y_{i'}}, \sigma_{y_{i'}}^2, \rho_{y_i y_{i'}}) dy_i dy_{i'} \quad (17.38)$$

donde  $\mu_{y_i}$  y  $\sigma_{y_i}^2$  son las medias y varianzas incondicionales de las variables y dadas en (17.10) y  $\rho_{y_i y_{i'}}$  es la correlación entre cualesquiera dos variables  $y_i$  e  $y_{i'}$ . Las correlaciones  $\rho_{y_i y_{i'}}$  reciben el nombre de *tetracóricas* cuando las variables observables  $v$  son dicotómicas ( $m = 2$ ) y *policóricas* cuando son policotómicas ( $m > 2$ ).

Nótese que de acuerdo con (17.10),  $\mu_{y_i} = 0, \forall i$ , y que de acuerdo con (17.13),  $\sigma_{y_i}^2 = 1, \forall i$ , por lo que las funciones  $\phi(\bullet)$  en (17.37) y (17.38) son funciones univariadas y bivariadas normales estándar respectivamente. Por ello, podemos escribir

$$\pi_i \equiv \Pr(v_i = 1) = \int_{\tau_i}^{\infty} \phi(z_i) dz_i = \Pr(z_i > \tau_i) = \Pr(z_i < -\tau_i) = \Phi(-\tau_i) \quad (17.39)$$

$$\pi_{i,i'} \equiv \Pr(v_i = 1, v_{i'} = 1) = \int_{\tau_i}^{\infty} \int_{\tau_{i'}}^{\infty} \phi(0, 0, 1, 1, \rho_{ii'}) dz_i dz_{i'} \quad (17.40)$$

donde  $\rho_{ii'} \equiv \rho_{y_i y_{i'}}$  es el elemento  $(i, i')$  de  $\Sigma_y = \Lambda\Phi\Lambda' + \Psi$  y por tanto es únicamente una función de  $\Lambda$  y  $\Phi$ . Definamos

$$\begin{aligned} p_{i,i} &= \pi_i + \varepsilon_i & i &= 1, \dots, n \\ p_{i,i'} &= \pi_{i,i'} + \varepsilon_{i,i'} & i &= 1, \dots, n-1; \quad i' = i+1, \dots, n \end{aligned} \quad (17.41)$$

es decir, asumimos que las proporciones observadas,  $\mathbf{p}$ , son iguales a las proporciones en la población,  $\boldsymbol{\pi}$ , más un error,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . A partir de (17.39)  $\tau_i$  puede ser estimada como

$$\hat{\tau}_i = -\Phi(p_i) \quad (17.42)$$

La integral dada en (17.40) no tiene una solución directa, pero puede aproximarse utilizando una serie infinita tetracórica

$$\pi_{i,i'} = \sum \xi_s(\tau_i) \xi_s(\tau_{i'}) \rho_{ii'}^s \quad (17.43)$$

donde  $\xi_s(\bullet)$  es la función tetracórica (ver Christoffersson, 1975, o McDonald, 1975) definida como

$$\xi_s(\tau_i) = \begin{cases} \Phi(\tau_i) & \text{si } s = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{s}} \gamma_{s-1}(\tau_i) \phi(\tau_i) & \text{si } s \geq 1 \end{cases} \quad (17.44)$$

donde, como anteriormente,  $\phi(\bullet)$  y  $\Phi(\bullet)$  son la función de densidad y función cumulativa normal estándar, respectivamente, y  $\gamma(x)$  es el polinomio Hermite-Tchebycheff, dado por

$$\gamma_s(x) = \frac{1}{\sqrt{s!}} \sum_{t=0}^s (-1)^t \frac{x^{s-2t}}{2^t t! (s-2t)!}, \quad \tilde{n} = \begin{cases} \frac{p}{2} & \text{si } p \text{ es par} \\ \frac{p-1}{2} & \text{si } p \text{ es impar} \end{cases} \quad (17.45)$$

Obtendríamos una estimación exacta de  $\boldsymbol{\pi}$  si utilizásemos un número infinito de términos en la serie (17.43). En la práctica, Christoffersson (1975) sugiere utilizar los diez primeros términos de dicha serie para aproximar razonablemente  $\boldsymbol{\pi}_{i,i'}$ .

Finalmente, podemos estimar los parámetros del modelo  $\Theta$  minimizando la suma de residuos entre las proporciones de primer y segundo orden observadas,  $i, i'$  y  $p_{i,i'}$ , y las predichas por el modelo,  $\pi_i(\Theta)$  y  $\pi_{i,i'}(\Theta)$ , es decir, podríamos minimizar

$$F(\Theta) = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{p} - \boldsymbol{\pi}(\Theta))'(\mathbf{p} - \boldsymbol{\pi}(\Theta)) \quad (17.46)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  puede ser particionado siguiendo (17.41) en  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_{ii'})$ . El estimador de mínimos cuadrados ordinarios (17.46) es consistente (su varianza tenderá a cero conforme se incrementa el tamaño de la muestra) pero no será eficiente (es decir, no tendrá varianza mínima) a menos que las varianzas de las  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sean iguales. Dado que las varianzas de  $p_{i,i'}$  dependen de  $\pi_i$  y  $\pi_{i'}$ , (ver Agresti, 1990), es muy improbable que las varianzas de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sean iguales y, por tanto el estimador de mínimos cuadrados ordinarios (17.46) no será en general eficiente. Podríamos obtener un estimador eficiente si en vez de utilizar mínimos cuadrados ordinarios utilizásemos un estimador de mínimos cuadrados generalizados

$$F(\Theta) = (\mathbf{p} - \boldsymbol{\pi}(\Theta))' \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{p} - \boldsymbol{\pi}(\Theta)) \quad (17.47)$$

en el que ponderamos los errores  $\boldsymbol{\varepsilon}$  por el inverso de su matriz de varianzas-covarianzas,  $\Sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , utilizando un estimador consistente de esta, que denominamos  $\mathbf{W}$  (ver Christoffersson, 1975: Apéndice 2).  $\mathbf{W}$  depende de las proporciones de tercer y cuarto orden de los datos. Cuando el modelo está especificado correctamente,  $F(\Theta)$  se distribuye asintóticamente como una  $\chi^2$  con  $\frac{n(n+1)}{2} - q$  grados de libertad, donde  $n$  es el número de ítems y  $q$  es el

número de parámetros independientes en  $\text{vec}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Phi})$ . Este estimador es eficiente entre todos los estimadores que utilicen la misma información, es decir, las distribuciones marginales de primer y segundo orden de los datos.

La base del procedimiento de estimación de McDonald (1985a, en prensa b) se halla en su clasificación de los modelos de rasgos latentes en (ver McDonald, 1982): (1) *modelos estrictamente lineales*, en los que las ORFs son lineales en los coeficientes y en los rasgos latentes, por ejemplo, análisis factorial; (2) *modelos lineales en un sentido amplio*, en los que las ORFs son lineales en los coeficientes pero no en los rasgos latentes, por ejemplo, los modelos de análisis factorial con inter-acciones entre los factores o con funciones polinómicas de los factores descritas por McDonald (1967); y (3) *modelos estrictamente no lineales*, los cuales no pueden ser representados como un modelo lineal en sentido amplio con un número finito de términos, por ejemplo, el modelo de TRI normal o el logístico.

Cualquier modelo de rasgos latentes estrictamente no lineal puede ser representado exactamente mediante una serie infinita polinómica utilizando análisis Fourier, también denominado análisis armónico (McDonald, 1967). Por tanto, cualquiera de estos modelos puede ser aproximado tan precisamente como se desee en un cierto intervalo de los rasgos latentes reteniendo un número apropiado de términos en la serie infinita. Tomemos el caso del modelo que nos ocupa, el modelo de respuesta a los ítems multidimensional normal. Según este modelo, la probabilidad de la respuesta a un ítem condicionada a unos valores fijos de las variables latentes (es decir la ORF) viene dada por (6a) —o equivalentemente por (17.21)— y podemos escribir

$$\Pr(v_i = 1 | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) = \Phi(x_i + \beta_i' \mathbf{h}) = \sum_{s=0}^{\infty} \zeta_{is} \gamma_s \left( \frac{\beta_i' \mathbf{h}}{\sqrt{\delta_i}} \right) \quad (17.48)$$

donde  $\gamma(\bullet)$  es el polinomio Hermite-Tchebycheff dado en (17.45) con argumento  $\frac{x_i + \beta_i' \mathbf{h}}{\sqrt{\delta_i}}$  y

$$\delta_i = \beta_i' \Phi \beta_i \quad (17.49)$$

McDonald (1985a) muestra como en el intervalo  $\boldsymbol{\eta} \in (-3,3)$ , la ORF del modelo TRI normal es aproximada razonablemente por un polinomio Hermite-Tchebycheff de tercer orden, es decir, podemos escribir

$$\Pr(v_i = 1 | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) = \Phi(x_i + \beta_i' \mathbf{h}) \cong \zeta_{i0} \gamma_0(x_i) + \zeta_{i1} \gamma_1(x_i) + \zeta_{i2} \gamma_2(x_i) + \zeta_{i3} \gamma_3(x_i) \quad (17.50)$$

donde

$$= \begin{cases} \Phi\left(\frac{x_i}{\sqrt{1 + \delta_i}}\right) & \text{si } s = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{\sqrt{\delta_i}}{\sqrt{1 + \delta_i}}\right)^s \gamma_{s-1}\left(\frac{x_i}{\sqrt{1 + \delta_i}}\right) \phi\left(\frac{x_i}{\sqrt{1 + \delta_i}}\right) & \text{si } s \geq 1 \end{cases} \quad (17.51)$$

Utilizando la aproximación (17.50), obtenemos que

$$\pi_i = \zeta_{i0} \quad (17.52)$$

$$\pi_{ii'} \cong \sum_{s=0}^{\infty} \zeta_{is} \zeta_{i's} \left( \frac{\beta_i' \Phi \beta_{i'}}{\sqrt{\delta_i} \sqrt{\delta_{i'}}} \right) \quad (17.53)$$

Los parámetros del modelo son estimados como sigue (Fraser, 1988): En primer lugar se obtiene una estimación inicial de  $\mathbf{a}$  utilizando (17.52). Seguidamente los parámetros restantes del modelo,  $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  y  $\Phi$  son estimados minimizando una función de mínimos cuadrados ordinarios del tipo (17.46), aunque únicamente se incluyen en dicha función las proporciones de segundo orden. Finalmente se re-estima  $\mathbf{a}$ . Este procedimiento se ha implementado en el programa NOHARM (Fraser & McDonald, 1988).

Sustituyendo (17.51) en (17.52) y (17.53) y comparando con (17.43) vemos que el método de estimación propuesto por McDonald (1985a) es idéntico al propuesto por Christoffersson (1975) excepto por (a) el método de McDonald utiliza un estimador de mínimos cuadrados ordinarios, mientras que el método de Christoffersson utiliza un estimador de mínimos cuadrados generalizados; (b) Christoffersson utiliza diez términos para aproximar las probabilidades bivariadas  $\pi_{i'}$ , mientras que McDonald únicamente utiliza cuatro.

Como consecuencia de estas diferencias, el método propuesto por McDonald presenta dos claras desventajas respecto al de Christoffersson:

- a) El estimador utilizado no es eficiente, es decir, las estimaciones pueden tener mayor variabilidad que las obtenidas utilizando el método de Christoffersson.
- b) No se dispone de errores estándar de los parámetros del modelo ni de una prueba de bondad de ajuste global del modelo.

El método de Christoffersson, por su parte, presenta tres desventajas respecto al de McDonald:

- a) El número de ítems que puede analizar simultáneamente no es muy elevado (20-25 ítems) debido a la necesidad de invertir la matriz asintótica de covarianzas entre las proporciones.
- b) Las propiedades óptimas del procedimiento son asintóticas. En muestras pequeñas, los errores estándar y la prueba de bondad de ajuste pueden ser incorrectos, e incluso los parámetros del modelo pueden ser estimados de forma menos eficiente que mediante el procedimiento de McDonald. Esto es debido a que las propiedades asintóticamente óptimas de este procedimiento de estimación se basan en la utilización de la matriz de pesos  $\mathbf{W}$  la cual es estimada

utilizando los momentos de orden tercero y cuarto de los datos. Esos momentos, a menos que la muestra sea grande, suelen ser estimados muy pobremente, de ahí la desventaja del procedimiento de Christoffersson en muestras pequeñas.

- c) El procedimiento de estimación de Christoffersson es bastante lento. Ello se debe a que en cada iteración del procedimiento de minimización es necesario aproximar las  $\pi$ -obabilidades bivariadas mediante una serie de diez términos. En el procedimiento de McDonald también es necesario aproximar las probabilidades bivariadas mediante una serie en cada iteración del procedimiento de minimización, pero únicamente se utilizan cuatro términos en vez de diez.

McDonald (1985a) reporta estudios de simulación que indican que la precisión con que se estiman los parámetros no depende especialmente del número de términos retenidos en la serie, y que los parámetros estimados mediante la aproximación cúbica implementada en NOHARM no son substancialmente más precisos que los obtenidos mediante una aproximación lineal a las ORFs (es decir, utilizando únicamente dos términos en la serie). Por otro lado, las proporciones residuales, obviamente, tienden a ser más pequeñas conforme se incluyen más términos en la serie. Knol y Berger (1991) y Balassiano (1994) han realizado diversos estudios de simulación que indican que el método de estimación de McDonald es suficientemente preciso incluso en muestras pequeñas.

Nótese que el método de estimación de McDonald no utiliza la función de verosimilitud marginal incondicional, sino que intenta aproximar las ORFs mediante una serie de Fourier. Sin embargo, lo hemos incluido en este apartado ya que es un método de estimación de información limitada que hemos visto que es equivalente al de Christoffersson.

#### 4.3.3. El método de Muthén

Muthén (1978) propuso una modificación del procedimiento ideado por Christoffersson (1975) que hizo que éste fuese abandonado rápidamente. Básicamente, Muthén (1978) sugirió realizar una transformación no lineal en (17.39) de forma que los parámetros del modelo,  $\mathfrak{D} = (\tau, \Lambda, \Phi)'$ , en vez de ser estimados a partir de las proporciones de primer y segundo orden, fuesen estimados a partir de los parámetros en forma reducida de la distribución de  $\mathbf{y}$ , es decir, los umbrales,  $\tau$ , y los elementos de  $\Sigma$ , (las correlaciones tetracóricas o policóricas,  $\rho$ ). Es decir, el estimador de Muthén consta de dos etapas: En la primera etapa se estiman los parámetros en forma reducida  $\kappa = (\tau, \rho)'$ . En la segunda etapa, los denominados parámetros fundamentales  $\mathfrak{D}$  se estiman a partir de los parámetros reducidos utilizando un estimador de mínima distancia.

Muthén (1978) presenta su estimador como un estimador basado en el

método de momentos. Sin embargo, su método también puede ser considerado como un estimador secuencial de máxima verosimilitud. Basándose en el principio de máxima verosimilitud, Muthén (1984) amplió su estimador secuencial a fin de poder analizar simultáneamente variables dependientes continuas, censuradas y categóricas ordenadas. Así, el estimador de Muthén (1984) permite incluir variables exógenas en modelos de respuesta a los ítems, por ejemplo, características de los ítems o de los sujetos (ver Muthén, 1987b). Aquí expondremos el estimador de Muthén utilizando el principio de máxima verosimilitud (ver Muthén y Satorra, 1995; Jöreskog, 1994). El procedimiento descrito en Muthén (1984) se diferencia del expuesto aquí en que se basa en maximizar funciones de verosimilitud de datos individuales, en vez de datos agrupados (proporciones), tal y como lo describimos aquí. Cuando no se estiman variables exógenas, y en concreto, cuando se utilizan para estimar MRI multidimensionales, ambos procedimientos son equivalentes.

Una gran ventaja del procedimiento de Muthén es que permite estimar indistintamente modelos para datos dicotómicos o policotómicos ordenados. Supóngase sin pérdida de generalidad que todos los ítems tienen  $m$  categorías. La estimación de los parámetros en forma reducida se realiza secuencialmente. En primer lugar se estiman los umbrales maximizando la función de verosimilitud de cada una de las distribuciones marginales univariadas con respecto al vector de umbrales de cada ítem,  $\tau_i$ . La función de verosimilitud de los datos viene dada por (17.36), por tanto, se maximiza

$$\ln L_i(\tau_i) = N \sum_{k=0}^{m-1} p_{ik} \ln \pi_{ik}(\tau_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (17.54)$$

donde  $p_{ik}$  es la proporción observada en la celda  $k$  de la distribución marginal  $i$  y  $\pi_{ik}(\tau_i)$  es la proporción de primer orden teórica la cual depende únicamente de  $\tau_i$ , ver (17.39) en el caso de variables dicotómicas. La solución a (17.54) es

$$\hat{\tau}_{i,k} = \Phi^{-1}(p_{i,0} + p_{i,1} + \dots + p_{i,k-1}) \quad i = 1, \dots, n; \quad k = 0, \dots, m-1 \quad (17.55)$$

En segundo lugar se obtiene cada una de las correlaciones tetracóricas o policóricas por separado maximizando el logaritmo de la función de verosimilitud de cada uno de las distribuciones marginales bivariadas con respecto a  $\rho_{ii}$

$$\ln L_{i,i}(\rho_{i,i}) = N \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{k'=0}^{m-1} p_{i,k,i,k'} \ln \pi_{i,k,i,k'}(\rho_{i,i}, \hat{\tau}_{i,i}, \hat{\tau}_{i,i'}) \quad (17.56)$$

donde  $p_{i,i}$  y  $\pi_{i,i}$  ( $\rho_{i,i}$ ) son las proporciones observadas y teóricas de segundo orden, respectivamente. Al maximizar (17.56) en las proporciones teóricas

cas de segundo orden, dadas por (17.40) en el caso de variables dicotómicas, se sustituyen los umbrales teóricos por sus estimaciones de máxima verosimilitud, obtenidas en la primera etapa, por lo que cada función (17.56) es maximizada por separado con respecto a un único parámetro  $\rho_{ii}$ .

Los parámetros en forma reducida estimados en la primera etapa son consistentes y asintóticamente normales. En la segunda etapa del procedimiento de estimación, el vector de parámetros fundamentales es estimado a partir de los estadísticos  $\kappa$  estimados en la primera etapa utilizando

$$F(\mathfrak{D}) = (\kappa - \kappa(\mathfrak{D}))' \tilde{W}^{-1} (\hat{\kappa} - \kappa(\mathfrak{D})) \tag{17.57}$$

donde  $W$  es la matriz asintótica de varianzas-covarianzas de  $\hat{\kappa} = (\hat{\tau}, \hat{\rho})'$ , los umbrales y correlaciones estimados en la primera etapa. Cuando el modelo está especificado correctamente,  $F(\mathfrak{G})$  se distribuye asintóticamente como una  $\chi^2$  con  $n(m-1) + \frac{n(n-1)}{2} - q$  grados de libertad, donde  $n(m-1) + \frac{n(n-1)}{2}$  es el número de elementos en  $\kappa$  y  $q$  es el número de parámetros independientes en  $\mathfrak{D} = (\tau, A, \Phi)'$ .

Este estimador es tan eficiente como el de Christoffersson, frente al que presenta diversas ventajas, amén de la ya señalada de que permite incorporar fácilmente el análisis de datos policotómicos ordenados:

1. La estimación de correlaciones (que implica la evaluación de integrales normales bivariadas) se realiza una sola vez, mientras que en el procedimiento de Christoffersson era necesario evaluar integrales bivariadas normales en cada iteración del procedimiento de minimización de (17.47).
2. Si no se introducen restricciones en los umbrales, por ejemplo requerir que dos umbrales sean iguales entre sí, entonces no es necesario realizar la minimización de (17.57) con respecto a los umbrales, y por tanto en la tercera etapa podemos minimizar (17.57) con respecto a  $\mathfrak{G} = (A, \Phi)'$  utilizando  $\kappa \equiv \rho$ . Esto permite reducir sustancialmente la dimensión de la matriz  $\tilde{W}$  a invertir, lo que permite analizar un mayor número de ítems. El procedimiento de estimación de Muthén (1984) se halla implementado en el programa LISCOMP (Muthén, 1987), procedimientos similares se halla implementado en (a) PRELIS/LISREL (Joreskog & Sörbom, 1993a, 1993b), compárese Jöreskog (1994) con Muthén (1984; Muthén & Satorra, 1995); y (b) MECOSA (Schepers & Arminger, 1992), ver Küsters (1987). Otros procedimientos de estimación de información limitada, tales como los estimadores propuestos por Lee, Poon y Bentler (1990a, 1995) no es posible comentarlos aquí por falta de espacio. Estos autores también han propuesto un estimador de información plena (Lee, Poon &

Bentler, 1990b). El estimador propuesto por Lee, Poon y Bentler (1995) ha sido implementado en el programa EQS (Bentler & Wu, 1993).

Las ventajas del procedimiento de Muthén respecto al del Christoffersson tienen un precio: en el método de Christoffersson la función de discrepancia (17.47) nos permite evaluar si el modelo se ajusta a las distribuciones marginales de primer y segundo orden de los datos. En cambio, la función de discrepancia (17.56) utilizada por Muthén en la segunda etapa únicamente nos permite evaluar la verosimilitud de las restricciones impuestas en los parámetros de la distribución multinormal categorizada estimada en la primera etapa (los umbrales y correlaciones tetracóricasipolicóricas). Esta función de discrepancia no nos permite evaluar si la hipótesis de multinormalidad categorizada es razonable en absoluto (Muthén, 1993). Por supuesto, es posible determinar la verosimilitud de que parejas de variables policotómicas provengan de una distribución bivariada normal (Olsson, 1979), así como la verosimilitud de que tríos de variables dicotómicas provengan de una distribución ti-variada normal (Muthén & Hofacker, 1988), sin embargo, no existe una prueba de la verosimilitud de la hipótesis de normalidad *multivariada* categorizada. Para una discusión más detallada de este punto, véase Muthén (1993).

17.6. ESTIMACION BASADA EN LA FUNCION DE VEROSIMILITUD MARGINAL CONDICIONAL (PROCEDIMIENTOS DE INFORMACION PLENA): EL ALGORITMO EM

En este enfoque se estiman los parámetros del modelo,  $\mathfrak{G}$ , hallando los valores que maximizan la función de verosimilitud de los datos, dada por (17.36). Dicho máximo se halla diferenciando (17.36) con respecto a los parámetros del modelo, igualando las derivadas a cero y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante. Sin embargo, no es posible resolver el sistema de ecuaciones resultante directamente, por lo cual es necesario utilizar un procedimiento iterativo para hallar los parámetros, tal como el *algoritmo de la tasa de discriminación (Fisher's scoring method)*<sup>1</sup>. El ciclo  $h$  de este procedimiento iterativo puede representarse como

$$\mathfrak{D}_i^h = \mathfrak{D}_i^{h-1} + V^{-1} t \quad i = 1, \dots, n \tag{17.58}$$

donde  $t$  es el vector de primeras derivadas de la función de verosimilitud, y  $V$  es el valor esperado del negativo de la matriz de segundas derivadas de la

<sup>1</sup> Los lectores que no estén familiarizados con los procedimientos de estimación de máxima verosimilitud pueden consultar Peña (1993: Apéndices 4B y 15D) y, aplicados a estimación de parámetros de MRI, Baker (1992).

función de verosimilitud.  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{t}$  son denominados matriz de información esperada y vector de gradientes, respectivamente. Al fin de simplificar la estimación, es común en la literatura de MRI el asumir que los parámetros entre ítems son independientes entre sí (aunque es posible que los parámetros dentro del mismo ítem estén inter-relacionados). Bajo este supuesto, los parámetros de cada ítem pueden estimarse por separado y por ello hemos introducido el subíndice *coi* correspondiente a los ítems en (17.58).

La derivada de la función de verosimilitud con respecto a los parámetros del modelo es

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\vartheta}|\mathbf{v})}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \sum_{c=1}^{m''} n_c \ln \pi_c(\boldsymbol{\vartheta}) = \sum_{c=1}^{m''} n_c \frac{1}{\pi_c(\boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \pi_c(\boldsymbol{\vartheta}) \quad (17.59)$$

Nótese que necesitamos evaluar las probabilidades  $\pi_c(\boldsymbol{\vartheta})$  y que necesitamos obtener las derivadas  $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \pi_c(\boldsymbol{\vartheta})$ . A fin de evaluar las probabilidades  $\pi_c(\boldsymbol{\vartheta})$

utilizaremos la función de verosimilitud marginal condicional (17.35) en vez de la incondicional (17.34) ya que en ese caso únicamente necesitamos evaluar una integral de  $p$  dimensiones (el número de factores) en vez de una integral de  $n$  dimensiones (el número de ítems). Estas probabilidades serán aproximadas numéricamente mediante cuadratura de Gauss-Hermite (Stroud & Sechrest, 1966)

$$\int_{-x_c}^{x_c} \dots \int_{-x_c}^{x_c} L(\mathbf{h}) \phi(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \cong \sum_{d=1}^D \dots \sum_{d=1}^D L(\tilde{\mathbf{X}}_d) A(\tilde{\mathbf{x}}_{d_1}) \dots A(\tilde{\mathbf{x}}_{d_p}) \quad (17.60)$$

donde  $L(\bullet)$  es una función de  $\mathbf{h}$ , y  $A(\tilde{\mathbf{X}}_d)$  son los pesos asociados con las coordenadas en la dimensión  $j$ . Este procedimiento nos permite aproximar una integral en el espacio real  $p$ -dimensional por una suma en  $D^p$  puntos,  $\tilde{\mathbf{X}}_d = (\tilde{\mathbf{x}}_{d_1}, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_{d_p})$ . Si los rasgos latentes son independientes, los pesos asociados con cada punto son el producto de los pesos asociados con cada coordenada  $X_{d_j}$ .

Por ello a fin de aplicar (17.60) es conveniente asumir que los rasgos latentes son independientes entre sí. Bajo este supuesto, no hay parámetros a estimar en  $\Phi$  ( $\Phi$  es una matriz identidad) y utilizando la parametrización TRI (como en Bock & Aitkin, 1981),  $\boldsymbol{\vartheta}$  será por tanto un vector conteniendo los  $q$  parámetros independientes en  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\mathbf{B}$ .

Siguiendo a Bock, Gibbons y Muraki (1988: p. 264) vamos a mostrar cómo procede la estimación de los parámetros del modelo en el caso de datos dicotómicos. En primer lugar combinamos (17.9) y (17.6) y escribimos

$$\begin{aligned} \pi_c(\boldsymbol{\vartheta}) &\equiv \Pr(v = \mathbf{u}) = \int \dots \int_R \left[ \prod_{i=1}^n \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})^{v_i} [1 - \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})]^{1-v_i} \right] \phi(\mathbf{h}) d\mathbf{h} = \\ &= \int \dots \int_R L_c(\boldsymbol{\vartheta}) \phi(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \end{aligned} \quad (17.61)$$

A continuación utilizamos (17.59) para obtener la derivada correspondiente a un parámetro cualquiera del modelo  $\boldsymbol{\vartheta}_l$ ,  $E \boldsymbol{\vartheta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta'_1, \dots, \beta'_n)$ ,  $l = 1, \dots, q$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\vartheta}|\mathbf{v})}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_l} &= \\ &= \sum_{c=1}^{m''} n_c \frac{1}{\pi_c(\boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_l} \left( \int \dots \int_R \left[ \prod_{i=1}^n \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})^{v_i} [1 - \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})]^{1-v_i} \right] \phi(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \right) \end{aligned} \quad (17.62)$$

dado que las ORFs en este modelo son funciones suaves (*smooth*) podemos intercambiar el orden de integración y diferenciación en (17.62)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\vartheta}|\mathbf{v})}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_l} &= \\ &= \sum_{c=1}^{m''} n_c \frac{1}{\pi_c(\boldsymbol{\vartheta})} \int \dots \int_R \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_l} \left[ \prod_{i=1}^n \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})^{v_i} [1 - \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})]^{1-v_i} \right] \phi(\mathbf{h}) d\mathbf{h} = \\ &= \sum_{c=1}^{m''} n_c \frac{1}{\pi_c(\boldsymbol{\vartheta})} \int \dots \int_R \left[ \prod_{i=1, i \neq l}^n \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})^{v_i} [1 - \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})]^{1-v_i} \right] \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_l} \{ \Phi_l(\boldsymbol{\vartheta})^{v_l} [1 - \Phi_l(\boldsymbol{\vartheta})]^{1-v_l} \} \phi(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \end{aligned} \quad (17.63)$$

donde en (17.63) hemos simplificado la expresión utilizando que cuando tomamos la derivada parcial respecto a  $\boldsymbol{\vartheta}_l$  las ORFs que no dependen de  $\boldsymbol{\vartheta}$ , son constantes respecto a este parámetro. La expresión resultante puede ser simplificada utilizando las siguientes igualdades

$$\prod_{i=1}^n \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})^{v_i} [1 - \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})]^{1-v_i} \quad (17.64)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{L_l(\boldsymbol{\vartheta})}{\Phi_l(\boldsymbol{\vartheta})^{v_l} [1 - \Phi_l(\boldsymbol{\vartheta})]^{1-v_l}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_l} \{ \Phi_l(\boldsymbol{\vartheta})^{v_l} [1 - \Phi_l(\boldsymbol{\vartheta})]^{1-v_l} \} = \\ &= \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_l} \Phi_l(\boldsymbol{\vartheta}) & \text{si } v_l = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_l} \Phi_l(\boldsymbol{\vartheta}) & \text{si } v_l = 1 \end{cases} = (-1)^{1-v_l} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_l} \Phi_l(\boldsymbol{\vartheta}) \end{aligned} \quad (17.65)$$

obteniéndose

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{v})}{\partial \vartheta_i} = \sum_{c=1}^{2^n} n_c \frac{1}{\pi_c(\boldsymbol{\vartheta})} \int \dots \int \frac{(-1)^{1-v_{ci}}}{\Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})^{v_{ci}} [1 - \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})]^{1-v_{ci}}} L_i(\boldsymbol{\vartheta}) \frac{\partial \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})}{\partial \vartheta_i} \phi(\mathbf{h}) d\mathbf{h} =$$

$$\equiv \sum_{c=1}^{2^n} n_c \frac{1}{\pi_c(\boldsymbol{\vartheta})} \int \dots \int \frac{v_{ci} - \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})}{\Phi_i(\boldsymbol{\vartheta}) [1 - \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})]} L_i(\boldsymbol{\vartheta}) \frac{\partial \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})}{\partial \vartheta_i} \phi(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \quad (17.66)$$

Definiendo

$$\bar{n}_c = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{n_c v_{ci} L_i(\boldsymbol{\vartheta})}{\pi_c(\boldsymbol{\vartheta})} \quad (17.67)$$

$$\bar{N} = \sum_{c=1}^{2^n} \frac{n_c L_i(\boldsymbol{\vartheta})}{\pi_c(\boldsymbol{\vartheta})} \quad (17.68)$$

podemos finalmente escribir

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\vartheta}; \mathbf{v})}{\partial \vartheta_i} = \int \dots \int \left( \sum_{c=1}^{2^n} \frac{n_c}{\pi_c(\boldsymbol{\vartheta})} \right) \frac{v_{ci} L_i(\boldsymbol{\vartheta}) - \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta}) L_i(\boldsymbol{\vartheta})}{\Phi_i(\boldsymbol{\vartheta}) [1 - \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})]} \frac{\partial \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})}{\partial \vartheta_i} \phi(\mathbf{h}) d\mathbf{h} =$$

$$= \int \dots \int \frac{\bar{n}_c - \bar{N} \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})}{\Phi_i(\boldsymbol{\vartheta}) [1 - \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})]} \frac{\partial \Phi_i(\boldsymbol{\vartheta})}{\partial \vartheta_i} \phi(\mathbf{h}) d\mathbf{h} \quad (17.69)$$

Las ecuaciones (17.67), (17.68) y (17.69) corresponden a las etapas del denominado algoritmo EM (Dempster, Laird & Rubin, 1977) adaptado por Bock y Aitkin (1981) a la estimación de MRI. La estimación procede en ciclos como sigue:

- a) Dados unos valores de los parámetros, se utilizan las ecuaciones (17.67) y (17.68) para calcular los valores de  $\bar{n}_c$  y  $\bar{N}$  para cada una de las coordenadas  $\bar{x}_i$ . Esta es la etapa E del algoritmo: se obtienen los valores esperados del número de sujetos que contestan a cada ítem y el valor esperado de respuestas correctas a cada ítem en cada una de las coordenadas.
- b) Insertando  $\bar{n}_c$  y  $\bar{N}$  en las derivadas (17.69) evaluadas numéricamente mediante (17.60) se maximiza la función de verosimilitud de cada uno de los ítems utilizando (17.59), obteniéndose una estimación de los parámetros del modelo. Esta es la etapa M del algoritmo; a) y b) definen un ciclo del algoritmo EM.

El procedimiento de estimación se inicia a partir de unos valores iniciales de los parámetros y procede en ciclos hasta que la verosimilitud de los

datos no cambia sustancialmente de un ciclo a otro. Errores estándar de los parámetros se obtienen a partir de la matriz de información obtenida en el último ciclo de la estimación. Una vez se han obtenido los parámetros, estos pueden ser convertidos a la parametrización FA y rotados utilizando rotaciones ortogonales u oblicuas. Este procedimiento de estimación ha sido implementado en el programa TESTFACT (Wilson, Wood & Gibbons, 1993). El procedimiento de estimación para variables policotómicas no difiere sustancialmente del aquí expuesto, excepto que el sumatorio en (17.62) es con respecto a  $m^n$  y la obtención de las derivadas es ligeramente más complicada (ver Muraki y Carlson, 1995). El algoritmo EM aplicado a modelos MRI not-males policotómicos ha sido implementado en el programa POLYFACT (Muraki, 1993).

La utilización de este procedimiento de estimación proporciona una prueba de la bondad de ajuste del modelo al conjunto de los datos, ya que podemos construir un estadístico basado en la razón de verosimilitudes entre el modelo estimado y un modelo multinomial en el que las probabilidades  $\pi_c$  no se hallen restringidas. El estadístico será por tanto,

$$G^2 = 2 \sum_{c=1}^{m^n} n_c \ln \left( \frac{n_c}{N \pi_c(\boldsymbol{\vartheta})} \right) \quad (17.70)$$

En muestras grandes y si el modelo es correcto, este estadístico se distribuye como una  $\chi^2$  con grados de libertad,  $gl = m^n - q$ . En la práctica, sin embargo, raramente es posible utilizar este estadístico ya que con frecuencia (especialmente con datos policotómicos) el número de patrones de respuesta posibles,  $m^n$ , será mucho mayor que  $N$ , el número de sujetos, y por tanto las frecuencias observadas,  $n_c$ , serán estimadas muy pobremente (la frecuencia observada en muchos casos será cero). Por ello, la distribución del estadístico no se aproximará a la de chi-cuadrado. Con todo, el trabajo de Haberman (1977) sugiere que este estadístico puede ser apropiado para comparar MRI anidados incluso en tablas dispersas ya que en tal caso se compararían las frecuencias predichas por dos modelos. Este estadístico, **por tanto**, puede utilizarse por ejemplo para investigar si la adición de factores al modelo es significativa, distribuyéndose en muchas grandes como una chi-cuadrado con grados de libertad igual a la diferencia de grados de libertad entre los modelos.

Este procedimiento de estimación es en principio preferible a los procedimientos de información limitada expuestos anteriormente por cuanto utiliza toda la información contenida en los datos y ofrece una prueba de bondad de ajuste a los datos en su conjunto. Sin embargo, en la práctica, presenta serias desventajas respecto a los procedimientos de información limitada:

1. A menos que la muestra sea muy grande, la información contenida en las frecuencias conjuntas de orden superior, no puede ser estimada.

da adecuadamente. Cuando la muestra es pequeña, las frecuencias de orden superior pueden ser estimadas tan pobremente que el utilizar esa información adicional puede empeorar la estimación de los parámetros en vez de mejorarla (McDonald & Mok, 1995).

2. Aunque la muestra sea lo suficientemente grande como para estimar adecuadamente las frecuencias de orden superior, es necesario que el procedimiento de estimación utilizado utilice adecuadamente tal información. En el procedimiento de información plena descrito aquí, dichas frecuencias son aproximadas numéricamente mediante (17.60). Drasgow (1989) investigó el número de puntos de cuadratura necesarios para aproximar razonablemente dichas frecuencias, concluyendo que al menos eran necesarios 20 puntos de cuadratura en MRI unidimensionales. Esto implica que en MRI  $p$  dimensionales serían necesarios óptimamente  $20^p$  puntos de cuadratura. Conforme se incrementa el número de puntos de cuadratura se incrementa el tiempo requerido para cada ciclo del algoritmo EM. En la práctica, se utiliza este procedimiento de estimación para modelos con hasta cinco rasgos latentes.
3. El procedimiento de información plena es considerablemente más lento que cualquier procedimiento de información limitada por la necesidad de evaluar numéricamente mediante (17.60)  $\pi_c(\theta)$  en cada ciclo del algoritmo EM. A fin de reducir el tiempo requerido para estimar los modelos mediante este algoritmo se utilizan dos estrategias: Por un lado, es importante utilizar unos valores iniciales suficientemente próximos a la solución final. Por ello se utilizan como valores iniciales la solución obtenida mediante una estimación de mínimos cuadrados no ponderados de los parámetros del modelo utilizando información bivariada (la matriz de correlaciones tetracóricas/policóricas, o simplemente la matriz de correlaciones de Pearson). Por otro lado, el tiempo requerido para estimar cada uno de los ciclos EM puede ser reducido utilizando menos puntos de cuadratura para evaluar numéricamente las probabilidades  $\pi_c(\theta)$ . Por ejemplo, TESTFACT utiliza como máximo únicamente 10 puntos de cuadratura para evaluar todas las dimensiones latentes. Cuando se solicita realizar un análisis con tres dimensiones, por ejemplo, cada una de las dimensiones es aproximada utilizando únicamente tres puntos de cuadratura! Cuando se utilizan tan pocos puntos de cuadratura la información contenida en las frecuencias de orden superior de los datos es claramente desaprovechada y no es sorprendente que el resultado final de la estimación no difiera mucho de los valores iniciales obtenidos utilizando procedimientos de información limitada.
4. Los errores estándar obtenidos son únicamente válidos para los parámetros antes de ser estos rotados. No es posible obtener errores estándar para los parámetros una vez la solución ha sido rotada.

## 17.7. EJEMPLOS Y APLICACIONES

### 17.7.1. Variables dicotómicas: los datos de LSAT7

Bock y Lieberman (1970) publicaron las respuestas de 1.000 sujetos a cinco ítems de la Sección 7 del test LSAT. Estos datos han sido utilizados con frecuencia para ilustrar la aplicación de métodos de estimación para MIRT. Los datos consisten en 5 variables dicotómicas por lo que existen  $2^5 = 32$  posibles patrones de respuesta. Estos 32 posibles patrones de respuesta y las frecuencias observadas de respuesta en la muestra de 1.000 sujetos son reproducidos en la Tabla 17.1.

**Tabla 17.1**

*Datos LSAT7 (Bock & Lieberman, 1970)*

Patrón	Frec.	Patrón	Frec.	Patrón	Frec.	Patrón	Frec.	Patrón	Frec.
00000	12	00001	10	00010	1	00011	7	00100	3
00101	19	00110	3	00111	17	01000	10	01001	5
01010	3	01011	7	01100	7	01101	23	01110	8
01111	28	10000	7	10001	39	10010	11	10011	34
10100	14	10101	51	10110	15	10111	90	11000	6
11001	25	11010	7	11011	35	11100	18	11101	136
11110	32	11111	308	1		1			

A continuación discutiremos cómo analizar estos datos con los programas LISCOMP (Muthén, 1987), PRELIS/LISREL (Jöreskog & Sörbom, 1993a, 1993b), NOHARM (Fraser & McDonald, 1988), y TESTFACT (Wilson, Wood & Gibbons, 1993)<sup>2</sup>. En todos los casos se utilizarán versiones para DOS de estos programas y se asume que los datos presentados en la Tabla 17.1 han sido introducidos como un fichero ASCII denominado *lsat7.dat* consistente en dos columnas, una conteniendo los patrones de respuesta y la otra conteniendo las frecuencias, con formato (5F1.0,F4.0).

<sup>2</sup> LISCOMP, PRELIS/LISREL, TESTFACT y POLYFACT pueden ser adquiridos a Scientific Software International, Inc. 1525 East 35th St. Suite 530. Chicago, IL 60615-4530. USA. El programa POLYFACT (Muraki, 1993) para el análisis de datos policotómicos mediante el algoritmo EM no había sido distribuido por SSI cuando se escribió este manuscrito y por tanto no podrá ser incluido aquí.

NOHARM puede ser obtenido escribiendo al Prof. Roderick P. McDonald. Dept. of Psychology. University of Illinois. 603 E. Daniel St. Champaign, IL 61820. USA. E-mail: rmcDonald@psych.uiuc.edu.

LISCOMP es un prog-ama que permite realizar análisis factorial exploratorio y confirmatorio<sup>3</sup> con variables dicotónicas y policotónicas utilizando el procedimiento de Muthén descrito en la Sección 17.5.3. Proporciona una prueba de bondad de ajuste global del modelo y errores estándar de los parámetros. Puede analizar hasta unas 20 variables aproximadamente y nos permite introducir restricciones en los umbrales y/o correlaciones. El programa LISCOMP que nos permitirá realizar un análisis factorial exploratorio es

```
TI "LSAT 7: analisis factorial exploratorio con 2 factores"
DA NO=1000 IY=5 MA=KM VT=DI
MO MO=EF LE=1 UE=2
OU WF ST SS ES
FP FO UN='LSAT7.DAT'
(5X,F4.0)
```

Los lectores familiarizados con el programa LISREL reconocerán las similitudes entre este programa y LISCOMP. Es importante señalar que LISCOMP es un programa para usuarios avanzados, y por tanto no tan bien documentado como LISREL. Por ejemplo, los comandos en LISCOMP (excepto por el título) deben estar en mayúsculas. Además, los datos deben estar categorizados como 0,1,...,  $m - 1$ . En la línea *DA* se indica el número de observaciones, el número de variables a analizar, que se desea estimar una matriz de correlaciones ( $MA=KM$ ) y que las variables son dicotónicas ( $VT=DI$ ). En la línea *MO* se indica que se desea realizar análisis factorial exploratorio ( $MO=EF$ ) empezando con un factor ( $LE=1$ ) y acabando con dos ( $UE=2$ ). En la línea *OU* se solicita utilizar una estimación de mínimos cuadrados generalizados (*WF*), y que se impriman los parámetros (*ES*) y sus errores estándar (*SS*) y los estadísticos utilizados (umbrales y correlaciones) así como sus errores estándar (*ST*). En LISCOMP es posible realizar mínimos cuadrados no ponderados utilizando *UF* en vez de *WF*. Cuando los datos se introducen en forma de frecuencias, LISCOMP espera que los datos estén ordenados (00000,00001, ..., 11111) y únicamente leer las frecuencias de cada uno de los patrones, no los patrones en sí. Por ello la última línea del programa (5X,F4.0) le indica al programa que únicamente lea las frecuencias. Si alguno de los patrones tiene frecuencia cero, debe aparecer el cero correspondiente en los datos introducidos en LISCOMP.

A continuación proporcionamos parte del fichero de salida de dicho programa:

<sup>3</sup> El lector que no esté familiarizado con los conceptos de análisis factorial no restringido (o exploratorio) vs. restringido (o confirmatorio) puede consultar McDonald (1985b).

FIRST ORDER SAMPLE PROPORTIONS					
	1	2	3	4	5
1	.828	.658	.772	.606	.843
SECOND ORDER SAMPLE PROPORTIONS					
	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					
SAMPLE THRESHOLDS					
	1	2	3	4	5
1	.946	.407	-.745	-.269	-1.007
SAMPLE TETRACHORIC CORRELATIONS					
	1	2	3	4	5
1					
2	.227				
3	.291	.432			
4	.296	.204	.276		
5	.286	.136	.265	.160	
STANDARD DEVIATIONS FOR SAMPLE TETRACHORIC CORRELATIONS					
	1	2	3	4	5
1					
2	.057				
3	.059	.048			
4	.055	.050	.052		
5	.063	.060	.061	.059	
EXPLORATORY ANALYSIS WITH 1 FACTOR(S): LATENT ROOTS FOR SAMPLE CORRELATION MATRIX					
	1	2	3	4	5
	2.044	.921	.829	.667	.540
EXPLORATORY ANALYSIS WITH 1 FACTOR(S): CHI-SQUARE WITH 5 DEGREE(S) OF FREEDOM IS 10.697 THE PROBABILITY VALUE IS .0576					
ESTIMATED FACTOR LOADINGS					
	1	2	3	4	5
1	.507				
2	.555				
3	.692				
4	.433				
5	.382				
ESTIMATED ERROR VARIANCES					
	1	2	3	4	5
	.743	.692	.522	.813	.854



RESIDUAL OBSERVED-EXPECTED					
	1	2	3	4	5
	.000				
	-.055	.000			
3	.060	.048	.000		
1	.077	-.037	-.024	.000	
5	.093	.076	.000	.005	.000
ROOT MEAN SQUARE RESIDUAL IS		.0558			
EXPLORATORY ANALYSIS WITH 2 FACTOR(S):					
EXPLORATORY ANALYSIS WITH 2 FACTOR(S): CHI-SQUARE WITH					
1 DEGREE(S) OF FREEDOM IS		.626			
THE PROBABILITY VALUE IS		.4289			
VARIMAX ROTATED LOADINGS		PROMAX ROTATED LOADINGS			
	1	2	1	2	
1	.796	.146	.874	.117	
2	.187	.476	.035	.493	
3	.212	.824	.089	.901	
4	.325	.258	.275	.188	
5	.310	.226	.271	.155	
PROMAX FACTOR CORRELATIONS					
	1	2			
1	1.000				
2	.593	1.000			
ESTIMATED ERROR VARIANCES					
	1	2	3	4	5
	.345	.735	.276	.828	.853
RESIDUALS OBSERVED-EXPECTED					
	1	2	3	4	5
1	.000				
2	.000	.000			
3	.001	-.002	.000		
4	-.000	.017	-.006	.000	
5	.006	-.033	.013	.001	.000

Nótese que LISCOMP proporciona las proporciones de primer y segundo orden, los umbrales, las correlaciones tetra-córicas y los errores estándar de las correlaciones tetra-córicas. Seguidamente proporciona los autovalores de la matriz de correlaciones tetra-córicas. Finalmente estima modelos con uno

y dos factores. El modelo de un factor se ajusta satisfactoriamente a los datos, pero nótese que algunas de las correlaciones residuales son relativamente elevadas (.09). El modelo de dos factores se ajusta considerablemente mejor. Por ejemplo, el residuo mayor es ahora  $-.03$ . De hecho, dado que el modelo de un factor es un caso especial del modelo de dos factores, podemos utilizar una prueba de chi-cuadrado para modelos anidados  $\chi^2 = 10.697 - .626 = 10.071$  con  $gl = 5 - 1 = 4$ ,  $p = .039$  para determinar si el modelo de dos factores es significativamente mejor que el de un factor. Nótese que LISCOMP proporciona la matriz de cargas Catoriales rotada utilizando un método ortogonal (*varimax*) y otro oblicuo (*promax*). LISCOMP no proporciona errores estándar de las cargas factoriales, ya que los errores estándar únicamente serían correctos para cargas factoriales no rotadas. El apartado *varianzas del error estimadas* corresponde a la matriz  $\Psi$  calculada mediante (17.13).

En la rotación oblicua, dos de las cargas factoriales del primer factor son menores que .1, lo cual sugiere que podríamos estimar un modelo confirmatorio y comprobar si son significativamente iguales a 0. A fin de poder identificar dicho modelo, es necesario fijar alguna de las cargas factoriales del segundo factor a cero. Escogernos la más pequeña. En total, tres cargas factoriales serán fijadas en cero en la siguiente estimación. El programa para estimar un modelo factorial confirmatorio con restricciones únicamente en las correlaciones tetra-córicas viene dado por:

```

TI "LSAT 7: dos factores correlacionados sin restricciones en los umbrales"
DA NO = 1000 IY = 5 MA = KM VT = DI
MO MO = SE P3 NE = 2 LY = FR PS = FI
FI LY(1,2) LY(2,1) LY(3,1)
VA 1 PS(1,1) PS(2,2)
FR PS(1,2)
OU WF ES RS SE
FP FO UN = 'LSAT7.DAT'
(5X,F4.0)

```

En este programa, en la línea *MO* se indica que se trata de un modelo con restricciones estructurales ( $MO=SE$ ) pero únicamente en las correlaciones ( $P3$ ). Se utilizarán dos factores ( $NE=2$ ) y en principio, todos los elementos de la matriz de cargas factoriales deben ser estimados ( $LY=FR$ ), y ninguno de los elementos de la matriz de correlaciones entre los factores debe ser estimado ( $PS=FI$ ). En LISCOMP, a diferencia de LISREL, no se especifica si la matriz es diagonal, simétrica, etc. En la línea *FI* se indica qué elementos de *LY* deben ser fijados a cero, en la línea *VA* se especifica que las varianzas de los factores deben ser asignados valor unidad (por motivos de identificación del modelo), y en la línea *FR* se especifica que se desea estimar la correlación entre los factores. Finalmente, en la línea *OU* se especifica que se deben imprimir los errores estándar de los parámetros (*SE*), además de los parámetros (*ES*) y los residuos (*RS*).

A continuación presentamos una parte del fichero de salida de este programa:

output 2

```

CHI-SQUARE WITH
2 DEGREE(S) OF FREEDOM IS .836
THE PROBABILITY VALUE IS .6565

ROOT MEAN SQUARE RESIDUAL
.015

LAMBDA

```

	1	2
1	.816	.000
2	.000	.553
3	.000	.785
4	.248	.240
5	.260	.190

```

PSI

```

	1	2
1	1.000	
2	.467	1.000

```

R 3

```

	1	2	3	4	5
1					
2	.016				
3	-.008	-.002			
4	.003	.007	-.003		
5	.002	-.037	.020	.000	

```

STANDARD ERRORS
LAMBDA

```

	1	2
1	.380	.000
2	.000	.066
3	.000	.085
4	.187	.162
5	.205	.179

```

PSI

```

	1	2
1	.000	
2	.238	.000

R3 es la matriz de residuos del modelo. Nótese que estos son muy pequeños y que la prueba de bondad de ajuste indica que el modelo se ajusta bien a los datos. Sin embargo, los errores estándar de las cargas factoriales son grandes, y como consecuencia, varias cargas factoriales no son significativamente distintas de cero. Es decir, estamos introduciendo demasiados parámetros en el modelo. Por ello, procedemos a fijar a cero secuencialmente las

cargas factoriales no significativas del modelo. El modelo resultante viene dado por

output 3

```

CHI-SQUARE WITH
4 DEGREE(S) OF FREEDOM IS 2.472
THE PROBABILITY VALUE IS .6493

ROOT MEAN SQUARE RESIDUAL
.026

LAMBDA

```

	1	2
1	.591	.000
2	.000	.556
3	.000	.776
4	.486	.000
5	.434	.000

```

PSI

```

	1	2
1	1.000	
2	.699	1.000

```

STANDARD ERRORS
LAMBDA

```

	1	2
1	.072	.000
2	.000	.066
3	.000	.083
4	.062	.000
5	.072	.000

```

PSI

```

	1	2
1	.000	
2	.090	.000

Nótese que en modelos confirmatorios, LISCOMP no proporciona la matriz  $\Psi$ .

17.7.1.2. Análisis con PRELIS LISREL

PRELIS/LISREL fue originariamente diseñado para el análisis de estructuras de covarianzas de variables continuas bajo el supuesto de normalidad multivariada. El análisis factorial es un caso especial de este tipo de modelos. Recientemente se ha introducido en el programa la posibilidad de analizar variables que hayan sido categorizadas utilizando (17.30), por lo que en la versión 8 del programa (Joreskog & Sörbom, 1993b) es posible analizar MRI multidimensionales normales. El procedimiento de estimación (Jöreskog, 1994) es básicamente el descrito en la Sección 17.5.3 sugerido por Muthén (1978, 1984). En primer lugar se estiman los umbrales, las correlaciones

tetracóricas y la matriz asintótica de covarianzas de las correlaciones tetracóricas utilizando PRELIS 2 (Jöreskog & Sörbom, 1993a). El programa necesario para analizar los datos de este ejemplo es el siguiente:

```
da ni=6
raw-data-from file = lsat7.dat fo
(5f1.0,f4.0)
la
item1 item2 item3 item4 item5 freq
or 1-5
we freq
ou ma=pm sm=lsat7.pm ac=lsat7.acr
```

En este pi-ograñia indicamos en las tres primeras líneas que los datos consisten en 6 variables, su formato (5f1.0,f4.0) y el nombre del fichero donde se encuentran (*lsat7.dat*). En las líneas siguientes indicamos los nombres de las variables, que las primeras cinco variables (*item1* a *item5*) deben ser tratadas como ordinales (*or 1-5*), es decir, como variables categóricas y no como continuas, y que la variable *freq* indica frecuencia de aparición de los datos (*we freq*). En la última línea indicamos el nombre del fichero con correlaciones tetracóricas (*lsat7.pm*) y el de la matriz de covarianzas asintóticas de las correlaciones estimadas (*lsat7.acr*).

En el fichero de salida, PRELIS imprime los umbrales, las correlaciones tetracóricas y la matriz asintótica de covarianzas entre las correlaciones. PRELIS no proporciona errores estándar de los umbrales y los errores estándar de las correlaciones tetracóricas vienen dados por la inversa de la diagonal de la matriz asintótica de varianzas/covarianzas entre las correlaciones estimadas.

utilizando las matrices calculadas por PRELIS, es posible estimar un modelo MRI multidimensional con LISREL. En este caso estimaremos el modelo final estimado con LISCOMP. Veamos el programa

```
lisrel
"LSAT7:dos factores correlacionados"
da ni=5 no=1000 ma=pm
km = lsat7.pm
ac = lsat7.acr
la
item1 item2 item3 item4 item5
mo ny=5 ne=2 ly=fi ps=sy,fi te=di,fr
le
factor1 factor2
pa ly
1 0
o 1
o 1
1 0
1 0
va 1 pc 1 1 pc 2 2
fr ps 1 2
ou wl xm nd=3
```

En PRELIS/LISREL los comandos pueden estar escritos en mayúsculas o en minúsculas y no es necesario que los ítems estén codificados 0,1,...,  $m - 1$

En el pi-ogama LISREL nótese la línea *mo*, en la cual especificamos que los elementos de la matriz de cargas factoriales son fijos ( $ly=fi$ ), que la matriz de correlaciones entre los factores es simétrica y con elementos fijos ( $ps=sy,fi$ ) y que la matriz  $\Psi$  es diagonal con elementos libres. Los elementos de esta matriz son calculados utilizando (17.13). La línea *le* indica los nombres asignados a los factores, y debajo de la línea *pa ly* escribimos el patrón de elementos fijos (0) y libres (1) de la matriz de cargas factoriales. En la línea *ou, wl* indica estimación mediante mínimos cuadrados ponderados. A continuación incluimos parte de los resultados obtenidos

#### Output 4

LISREL ESTIMATES (WEIGHTED LEAST SQUARES)					
LAMBDA-Y					
	factor 1	factor 2			
item 1	0.592 (0.073) 8.149				
item 2		0.556 (0.066) 8.417			
item 3		0.777 (0.084) 9.289			
item 4	0.486 (0.061) 7.908				
item 5	0.434 (0.072) 6.023				
PSI					
	factor 1	factor 2			
factor 1	1.000				
factor 2	0.699 (0.090) 7.798	1.000			
THETA-EPS					
	item 1	item 2	item 3	item 4	item 5
	0.650 (0.097) 6.707	0.690 (0.086) x.021	0.397 (0.137) 2.891	0.764 (0.075) 10.225	0.812 (0.077) 10.574
GOODNESS OF FIT STATISTICS					
CHI-SQUARE WITH 4 DEGREES OF FREEDOM = 2.470 (P = 0.650)					
ROOT MEAN SQUARE RESIDUAL (RMR) = 0.0212					

En el output del programa LISRELX la primera línea en cada matriz corresponde a la estimación del parámetro, en paréntesis se especifica el error estándar de dicho parámetro, y en la tercera línea el *t*-valor de dicho parámetro. Dado que LISREL8 y LISCOMP utilizan básicamente el mismo procedimiento de estimación para modelos MRI es de esperar que como en este caso los resultados de ambos programas sean básicamente idénticos. Nótese sin embargo que LISREL no permite realizar análisis exploratorios, ni introducir restricciones en los umbrales.

### 17.7.1.3. Análisis con NOHARM

NOHARM es un programa que permite realizar análisis factorial exploratorio y confirmatorio con variables dicotómicas utilizando el procedimiento de McDonald descrito en la Sección 17.5.2. No proporciona una prueba de bondad de ajuste global del modelo ni errores estándar de los parámetros. Puede analizar hasta 145 ítems y nos permite introducir restricciones únicamente en las correlaciones.

A continuación presentamos un programa para realizar un análisis factorial exploratorio de estos datos.

LCAT 7: analisis factorial exploratorio con 2 factores

```
5 2 1000 1 1 0 0 1
0 0 0 0 0
0.828
0.567 0.658
0.664 0.560 0.772
0.532 0.428 0.501 0.606
0.718 0.567 0.672 0.526 0.843
```

El programa consiste simplemente de tres líneas, seguidas de los datos. La primera línea es obviamente el título. La segunda línea consiste en ocho números enteros en el orden siguiente: (1) número de ítems; (2) número de rasgos latentes; (3) número de observaciones; (4) un 0 o un 1 indicando si los datos consisten en patrones de respuestas individuales o una matriz no centrada de covarianzas (*raw product moment matrix*); (5) un 0 o un 1 indicando si se desea un análisis exploratorio o confirmatorio; (6) un 1 o un 0 indicando si el usuario proporciona valores iniciales de los parámetros  $\theta$  no; (7) un 0 o un 1 indicando si se debe imprimir la matriz no centrada de covarianzas en el Fichero de salida o no; (8) un 0 o un 1 indicando si se debe imprimir la 'matriz de residuos en el fichero de salida o no. La tercera línea consiste en una lista de valores para las asíntotas inferiores de las ORFs.<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Otros programas permiten que el usuario proporcione valores para estas asíntotas (p. ej., TESTFACT), pero en ningún caso se permite estimarlos por las dificultades inherentes a la estimación de estos parámetros simultáneamente con los otros parámetros del modelo.

Después de estas tres líneas se introducen los datos, en este caso la matriz de covarianzas no centradas de los datos. Nótese que esta matriz es simplemente la matriz de proporciones de segundo orden, con las proporciones de primer orden en la diagonal, las cuales son proporcionadas, por ejemplo por LISCOMP (ver Output 1).

A continuación incluimos parte de los resultados obtenidos:

### output 5

(a) LATENT TRAIT PARAMETERIZATION					
FINAL VECTOR (0					
	1	2	3	4	5
	1.684	.0480	1.317	0.296	1.089
FINAL MATRIX F (coefficients of theta)					
	1	2			
1	1.472	0.000			
2	0.320	0.537			
3	0.626	1.315			
4	0.397	0.232			
5	0.373	0.176			
FINAL MATRIX P(covariances [correlations] of theta)					
	1	2			
1	1.000				
2	0.000	1.000			
Sum of squares of residuals (lower off-diagonals) = 1.60395728191765E-0005					
Root mean square of residuals (lower off-diagonals) = 1.26647435106979E-0003					
(b) COMMON FACTOR MODEL REPARAMETERIZATION					
THRESHOLD VALUES					
	1	2	3	4	5
	0.946	0.407	0.745	0.269	1.007
FACTOR LOADINGS					
	1	2			
1	0.827	0.000			
2	0.271	0.455			
3	0.354	0.744			
4	0.361	0.211			
5	0.314	0.163			
VARIMAX ROTATED FACTOR LOADING MATRIX					
	1	2			
1	0.814	0.148			
2	0.185	0.496			
3	0.215	0.796			
4	0.317	0.272			
5	0.310	0.222			

PROMAX (oblique) ROTATED FACTOR LOADING MATRIX					
	1	2			
1	0.901	-0.130			
2	-0.006	0.534			
3	-0.108	0.887			
4	0.253	0.110			
5	0.268	0.152			
FACTOR CORRELATIONS					
	1	2			
1	1.000				
2	0.621	1.000			
UNIQUE VARIANCES					
	1	2	3	4	5
	0.316	0.719	0.320	0.826	0.855

NOHARM estima el modelo utilizando la parametrización IRT, y por tanto proporciona los interceptos,  $\alpha$ , denominados  $f_0$  en el programa, y la matriz de  $\mathbf{B}$ , denominada  $\mathbf{F}$  en el programa. Utilizando (17.22), estos valores son convertidos a la parametrización FA, y rotados utilizando Varimax y Promax. Finalmente, NOHARM proporciona las unicidades ( $\Psi$ ).

Si deseásemos realizar un análisis confirmatorio utilizando este programa deberíamos cambiar el quinto número de la segunda línea del programa. En este caso, también debemos introducir en el programa dos matrices consistentes en 1s y 0s, correspondientes a  $\mathbf{B}$  y  $\Phi$ , que indiquen qué elementos deben ser estimados (1) y qué elementos son fijos (0). Nótese que ambas matrices deben estar separadas por líneas en blanco. Como patrón para  $\mathbf{B}$  hemos utilizado el mismo que en los análisis con LISCOMP y LISREL, como patrón para  $\Phi$  indicamos que deseamos estimar la correlación entre los dos factores. Nótese que los elementos diagonales de  $\Phi$  son fijos (el programa les asigna valor unidad por motivos de identificación).

LSAT7: análisis confirmatorio, dos factores correlacionados

5 2 1 0 0 0 1 0 0 0 1  
0 0 0 0 0

1 0  
0 1  
0 1  
1 0  
1 0  
  
0  
1 0

0.828  
0.567 0.658  
0.664 0.560 0.772  
0.532 0.428 0.501 0.606  
0.718 0.567 0.672 0.526 0.843

A continuación incluimos parte de los resultados obtenidos. Obsérvese que éstos son comparables a los obtenidos con LISCOMP y PRELIS/LISREL, excepto por los umbrales, que en NOHARM son de signo cambiado (ver Fraser, 1988).

### Output 6

(a) LATENT TRAIT PARAMETERIZATION					
FINAL VECTOR $f_0$					
	1	2	3	4	5
	1.166	0.490	1.194	0.309	1.107
FINAL MATRIX $\mathbf{F}$ (coefficients of theta)					
	1	2			
1	0.720	0.000			
2	0.000	0.670			
3	0.000	1.252			
4	0.569	0.000			
5	0.456	0.000			
FINAL MATRIX $\mathbf{P}$ (covariances [correlations] of theta)					
	1	2			
1	1.000				
2	0.703	1.000			
Sum of squares of residuals (lower off-diagonals) = 5.82911409938401E-0005 Root mean square of residuals (lower off-diagonals) = 2.414355835228692E-0003					
(b) COMMON FACTOR MODEL REPARAMETERIZATION					
THRESHOLD VALUES					
	1	2	3	4	5
	0.946	0.407	0.745	0.269	1.007
FACTOR LOADINGS					
	1	2			
1	0.584	0.000			
2	0.000	0.557			
3	0.000	0.781			
4	0.494	0.000			
5	0.415	0.000			
UNIQUE VARIANCES					
	1	2	3	4	5
	0.659	0.690	0.390	0.756	0.828

TESTFACT es un programa que permite estimar MRI multidimensionales sin restricciones (exploratorios) con variables dicotómicas utilizando el algoritmo EM descrito en la Sección 6. Puede analizar hasta 500 ítems, pero se halla limitado a un máximo de cinco dimensiones o factores. TESTFACT calcula las correlaciones tetracóricas y efectúa un análisis factorial de las mismas utilizando un procedimiento de análisis de factores principales con rotaciones ortogonal (varimax) y oblicua (promax). Si se desea, el programa a continuación utiliza los resultados como valores iniciales del procedimiento de iteración del algoritmo EM y realiza una estimación utilizando toda la información en los datos.

A continuación presentamos el programa que nos permitirá realizar un análisis de factores principales en la matriz de correlaciones tetracóricas, es decir, una estimación de información limitada (cimilai-a realizable con la opción UF de LISCOMP o a la realizable con la opción UL de LISREL)

```
>TITLE;
DATOS LSAT7
AF DE EJES PRINCIPALES CON ROTACION PROMAX
> PROBLEM NITEM=5,RESPONSE=3,SKIP=1;
> NAMES ITEM1,ITEM2,ITEM3,ITEM4,ITEM5;
> RESPONSE '8','0','1';
> KEY 11111;
> TETRACHORIC LIST;
> FACTOR NFAC=2,ROTATE=PROMAX,RESIDUAL;
> INPUT NIDW=2,SCORES,WEIGHT=PATTERN;
(2A1,1X,5A1,14)
1 00000 12
2 00001 19
etc.
32 11111 308
STOP ;
```

En TESTFACT, cada comando debe comenzar por > y acabar en ; Únicamente deben utilizarse mayúsculas. El título debe constar de dos líneas. En la línea *PROBLEM* se indican el número de ítems, el número de opciones y que no se impriman una serie de estadísticos del test (*SKIP=1*). En el número de opciones siempre debe incluirse una categoría para las respuestas en blanco, aunque no haya ninguna en los datos. De ahí que *RESPONSE=3*. En la línea *RESPONSE* indicamos qué códigos corresponden a cada categoría. El primer código coiresponde a la categoría *respuesta en blanco*. Es decir, si algún sujeto no contesta a algún ítem deberíamos escribir 8 en el espacio correspondiente en vez de dejar ese espacio en blanco; 0 y 1 son los números que asignamos nuestras dos opciones reales. En *KEY* indicamos cual de las dos categorías indica un nivel más elevado en los rasgos latentes que deseamos medir para cada ítem. En este caso es la categoría 1 en todos los casos.

En las siguientes dos líneas pedimos que se impriman las correlaciones tetracóricas *TETRACHORIC LIST* y que realice un análisis de factores principales, lo rote utilizando promax e imprima las correlaciones residuales. En la siguiente línea, *INPUT*, se indica cómo se presentan los datos. En TESTFACT, es necesario que los datos se presenten en el siguiente orden: número de identificación, patrón de respuestas, y frecuencia del patrón de respuestas (si se proporcionan los datos en frecuencias). Es obligatorio incluir un número de identificación, por lo que hemos tenido que editar los datos e incluir un número de identificación (del 1 al 32). El formato de las respuestas debe obligatoriamente proporcionarse utilizando formato Fortran A1 (en este caso 5A1), y el de las frecuencias obligatoriamente en formato Fortran I (en este caso 14). Debe existir una línea en blanco entre el final de los datos y la línea STOP;

A continuación proporcionamos parte del fichero de salida de este programa:

## output 7

DISPLAY 2 TETRACHORIC CORRELATION MATRIX					
	1	2	3	4	5
	ítem 1	ítem 2	ítem 7	ítem 4	ítem 5
1 ítem 1	1.000				
2 ítem 2	.226	1.000			
3 ítem 3	.291	.432	1.000		
4 ítem 4	.296	.204	.277	1.000	
5 ítem 5	.286	.135	.265	.161	1.000

  

DISPLAY 3 THE POSITIVE LATENT ROOTS OF THE CORRELATION MATRIX					
	1	2	3	4	5
1	2.044321	.921439	.827883	.666840	.539517

  

DISPLAY 8 UNROTATED PRINCIPAL FACTOR LOADINGS		
	1	2
1 ítem 1	.510	.225
2 ítem 2	.656	.456
3 ítem 3	.641	.052
4 ítem 4	.412	.0Y1
5 ítem 5	.448	.400

  

DISPLAY 10 VARIMAX ROTATED FACTOR LOADINGS		
	1	2
1 ítem 1	.220	.512
2 ítem 2	.791	.114
3 ítem 3	.504	.399
4 ítem 4	.238	.349
5 ítem 5	.055	.598

DISPLAY 11. PROMAX ROTATED FACTOR LOADINGS		
	1	2
1 ítem 1	.025	.541
2 ítem 2	.877	-.141
3 ítem 3	.411	.304
4 ítem 4	.121	.338
5 ítem 5	-.207	.703

  

DISPLAY 12. PROMAX FACTOR LOADINGS		
	1	2
1	1.000	
2	.607	1.000

El programa nos proporciona en primer lugar la matriz de correlaciones tetracóricas y sus autovalores, los cuales son similares a los proporcionados por LISCOMP. Seguidamente obtiene la matriz de cargas factoriales y proporciona las correlaciones residuales. Finalmente, rota estas cargas factoriales utilizando los métodos Varimax y Promax. Las soluciones rotadas también son comparables a las obtenidas por LISCOMP y NOHARM, excepto que en este análisis los factores aparecen en orden inverso en TESTFACT.

A continuación presentamos el programa a utilizar para realizar un análisis de información plena utilizando TESTFACT, lo cual se logra añadiendo una nueva línea FULL en la que indicamos el número de puntos de cuadratura, 10 (el máximo permitido por el programa), a repartir entre las dos dimensiones, es decir, utiliza 5 puntos de cuadratura en cada dimensión. La palabra clave STEPWISE indica que deseamos que se realice un análisis con un factor, dos, etc. así hasta NFAC. Nótese que hemos introducido la palabra SMOOTH en la línea FACTOR. Ello se debe a que a menudo la matriz de correlaciones tetracóricas no es positiva definida, por lo que no es posible realizar un análisis factorial de la misma. TESTFACT incluye una provisión para suavizar dicha matriz y convertirla en positiva definida. En este caso no es necesario, pero indicamos cómo solventar el problema en caso se presente.

```
> TITLE
DATOS LSAT7
ANALISIS FACTORIAL DE INFORMACION PLENA
>PROBLEM NITEM=5,RESPONSE=3,SKIP=1;
> NAMES ITEM1,ITEM2,ITEM3,ITEM4,ITEM5;
>RESPONSE '8','0','1';
>KEY 11111;
> TETRACHORIC LIST;
> FACTOR NFAC=2,ROTATE=PROMAX,RESIDUAL,SMOOTH;
>FULL QUAD=10,STEPWISE;
> INPUT NIDW=2,SCORES,WEIGHT=PATTERN;
(2A1,1X,5A1,I4)
1 00000 12
2 00001 19

etc.

32 11111 308

STOP ;
```

A continuación proporcionamos parte del fichero de salida de este programa:

### Output 8

STEPWISE FULL INFORMATION FACTOR ANALYSIS			
1. NUMBER OF COMMON FACTORS = 1			
DISPLAY 8. UNROTATED PRINCIPAL FACTOR LOADINGS			
	1		
1 ítem 1	.523		
2 ítem 2	.514		
3 ítem 7	.677		
4 ítem 4	.445		
5 ítem 5	.394		
DISPLAY 0. INITIAL INTERCEPT AND SLOPE ESTIMATES			
	INTERCEPT	SLOPE ESTIMATES	
1 ítem 1	1.110	.613	
2 ítem 2	.474	.599	
3 ítem 3	1.013	.920	
4 ítem 4	.300	.497	
5 ítem 5	1.096	.429	
DISPLAY 11. CHI-SQUARE = 31.74    DF = 21.00    P = .062			
DISPLAY 12. INVARIANT PARAMETERS			
	INTERCEPT	THRESHOLD	SLOPE ESTIMATES
1 ítem 1	1.0902	1.9030	.5729
2 ítem 2	.4836	.7540	.6414
3 ítem 3	1.0263	1.0828	.9478
4 ítem 4	1.0961	-2.6308	.4702
			.4178
DISPLAY 13. POPULATION DEPENDENT PARAMETERS			
	DIFFICULTY	COMMUNALITY	PRINCIPAL FACTORS
ítem 1	-.9460	.2471	.4971
1 ítem 2	.4071	.2915	.5399
3 ítem 3	.7449	.4732	.6879
1 ítem 4	-.2682	.1811	.4255
3 ítem 5	-1.0068	.1486	.3855
DISPLAY 14. PERCENT OF VARIANCE			
26.82909			
2. NUMBER OF COMMON FACTORS = 2			
DISPLAY 20. INITIAL INTERCEPT AND SLOPE ESTIMATES			
	INTERCEPT	SLOPE ESTIMATES	
ítem 1	1.139	.614	
ítem 2	.677	1.091	
ítem 3	.973	.836	
ítem 4	.297	.455	
ítem 5	1.259	.560	
		.271	
		-.758	
		-.068	
		.103	
		.500	

DISPLAY 22. CHI-SQUARE = 23.79      DF = 17.00      P = .125  
 CHANGE OF CHI-SQUARE = 7.948      DF = 4.00      P = .093

DISPLAY 23. INVARIANT PARAMETERS

	INTERCEPT	THRESHOLD	SLOPE ESTIMATES
1 ítem 1	1.1427	.6182	.2776
2 ítem 2	.6680	1.0727	.7353
3 ítem 3	.9629	.8151	.0618
4 ítem 4	.2967	.4538	.1251
5 ítem 5	1.1880	.4996	.3783

DISPLAY 24. POPULATION DEPENDENT PARAMETERS

	DIFFICULTY	COMMUNALITY	PRINCIPAL FACTORS
1 ítem 1	-.9460	.3147	.5066
2 ítem 2	-.4072	.6284	.6636
3 ítem 3	-.7456	.4005	.6320
4 ítem 4	-.2684	.1814	.4080
5 ítem 5	-1.0067	.2819	.4162

DISPLAY 25. PERCENT OF VARIANCE

	1	2
1	28.71957	7.42064

DISPLAY 28. VARIMAX ROTATED FACTOR LOADINGS

	1	2
1 ítem 1	.200	.524
2 ítem 2	.779	.145
3 ítem 3	.480	.412
4 ítem 4	.211	.370
5 ítem 5	.073	.526

DISPLAY 29. PROMAX ROTATED FACTOR LOADINGS

	1	2
1 ítem 1	-.015	-.570
2 ítem 2	.832	-.069
3 ítem 3	.361	.347
4 ítem 4	.069	.381
5 ítem 5	-.163	.612

DISPLAY 30. PROMAX FACTOR CORRELATIONS

	1	2
1	1.000	
2	.597	1.000

Como puede observarse, el programa en primer lugar obtiene las cargas factoriales no rotadas a partir de la matriz de correlaciones tetracóricas. Utilizando éstas y los umbrales estimados a partir de las proporciones de primer orden, obtiene valores iniciales de los interceptos (**a**) y pendientes (**B**) utilizando (17.22). Seguidamente proporciona los interceptos y pendientes después de aplicar el algoritmo EM. Finalmente transforma las estimaciones finales otra vez a umbrales ( $\tau$ ) y cargas factoriales (**A**) —denomina-

das *PRINCIPAL FACTORS*. Cuando  $\lambda > 2$ , **A** es rotada a continuación utilizando Varimax y Promax. Como puede observarse, la solución final, utilizando toda la información de los datos, no difiere mucho de la obtenida utilizando únicamente información bivariada. Nótese que TESTFACT no proporciona errores estándar de los parámetros del modelo.

### 17.7.2. Variables policotómicas: los datos del LOT

Chang, D'Zurilla y Maydeu-Olivares (1994) analizaron las respuestas de 389 sujetos al *Life Orientation Test* (LOT) de Scheier y Carver (1985). Este inventario consiste de ocho ítems con cinco categorías cada uno. A fin de simplificar su reproducción aquí hemos seleccionado cinco de sus ítems (ítems 1, 4, 5, 8 y 9) y hemos colapsado sus cinco categorías en tres: la categoría intermedia ha sido mantenida y las dos categorías más extremas en cada extremo de la escala han sido colapsadas. Los datos consisten por tanto en 5 variables tricotómicas y por tanto existen  $3^5 = 243$  posibles patrones de respuesta. Sin embargo en esta muestra únicamente existen 112 patrones de respuesta con frecuencia distinta de cero. Únicamente estos patrones han sido reproducidos en la Tabla 17.2.

**Tabla 17.2**  
 Datos del LOT

Patrón	Frec.	Patrón	Frec.	Patrón	Frec.	Patrón	Frec.	Patrón	Frec.
00000	6	00010	4	00011	3	00020	1	00022	13
00100	2	00102	1	00111	1	00121	3	00122	2
00200	3	00220	1	00222	2	01000	2	01011	3
01021	1	01022	1	01100	6	01110	2	01111	7
01121	1	01122	1	01200	7	01201	1	01210	1
01211	1	01212	1	01221	1	01222	1	02100	6
02110	1	02121	1	02200	6	02211	2	02212	1
02221	1	10000	2	10011	2	10100	1	10120	1
10122	1	10200	6	10202	1	10212	1	10220	1
10222	1	11000	3	11001	1	11011	2	11100	9
11101	1	11110	3	11111	4	11122	2	11200	16
11201	3	11202	1	11210	1	11211	4	11212	2
11222	1	12000	2	12011	1	12012	2	12021	1
12100	9	12110	1	12111	1	12200	27	12202	
12210	4	12211	3	12212	1	12220	1	12222	1
20022	2	20100	1	20101	1	20120	1	20200	1
20220	2	20222	1	21000	2	21022	1	21100	3
21111	3	21121	1	21122	2	21200	9	21201	2
21202	2	21210	1	21211	1	21220	2	21221	1
21222	1	22000	2	22100	8	22101	1	22110	2
22111	3	22120	1	22122	3	22200	79	22201	8
22202	1	22210	6	22211	8	22212	2	22220	1
22221	1	22222	2						



A continuación discutiremos cómo analizar estos datos con los programas LISCOMP y PRELIS/LISREL. En ambos casos se trata de programas que utilizan procedimientos de estimación de información limitada. En este apartado ilustraremos cómo utilizar LISCOMP y PRELIS/LISREL para estimar datos presentados en forma de respuestas individuales. Por ello, asumiremos que los datos presentados en la Tabla 17.2 han sido transformados en 389 patrones individuales de respuestas y colocados en un fichero ASCII denominado *lot3.dat* consistente en una única columna en formato (5F1.0).

### 17.2.1. Análisis con LISCOMP

De acuerdo con Chang *et al.* (1994) los tres primeros ítems de estos datos miden optimismo y los dos últimos pesimismo. Ambos factores se hallan inversamente correlacionados. Por ello estimaremos directamente un modelo de dos factores con dicha estructura.

```

TI "LOT: dos factores correlacionados sin restricciones en los umbrales"
DA NO=390 IY=5 MA=KM VT=TH
MO MO=SE P3 NE=2 LY=FR PS=FI
FI LY(1,2) LY(2,2) LY(3,2) LY(4,1) LY(5,1) PS(1,1) PS(2,2)
VA 0 LY(1,2) LY(2,2) LY(3,2) LY(4,1) LY(5,1)
VA 1 PS(1,1) PS(2,2)
FR PS(1,2)
VA .5 LY(1,1) LY(2,1) LY(3,1) LY(4,2) LY(5,2)
VA -.5 PS(1,2)
OU WF ST SS ES RS SE
RA FO UN='LOT3.DAT'
(5F1.0)

```

En este programa nótese que hemos indicado que el número de categorías en los ítems es ahora tres ( $VT=TH$  en la línea *DA*) y que los datos son ahora observaciones individuales (*RA* en vez de *FP* en la penúltima línea del programa). A continuación proporcionamos parte del fichero de salida de este programa. En este output notamos que LISCOMP imprime los umbrales consecutivamente de 1 a 10 (2 umbrales por cada uno de los 5 ítems). Nótese que el umbral 4 (es decir, el segundo umbral del ítem 2) es muy pequeño:

#### output 9

SAMPLE STATISTICS				
1	2	3	4	5
-.679	.174	-.937	-.039	-1.053
6	7	8	9	10
-.267	.314	.999	.403	1.076

S 3	1	2	3	4	5
1					
2	.618				
3	.531	.581			
4	-.314	-.474	-.431		
5	-.249	-.410	-.355	.818	
CHI-SQUARE WITH					
4 DEGREE(S) OF FREEDOM IS		6.280			
THE PROBABILITY VALUE IS		.1787			
ROOT MEAN SQUARE RESIDUAL					
		.042			
LAMBDA					
	1	2			
1	.726	.000			
2	.856	.000			
3	.714	.000			
4	.000	.953			
5	.000	.830			
PSI					
	1	2			
1	1.000				
2	-.554	1.000			
STANDARD ERRORS					
LAMBDA					
	1	2			
1	.044	.000			
2	.038	.000			
3	.045	.000			
4	.000	.046			
5	.000	.046			
PSI					
	1	2			
	.000				
	.057	.000			

relativo a su error estándar. En LISCOMP es posible introducir restricciones en los umbrales y re-evaluar la bondad de ajuste del modelo después de fijar ese umbral a 0. En el siguiente programa presentamos cómo hacerlo.

```

TI "LOT: dos factores correlacionados con restricciones en los umbrales"
DA NO=390 IY=5 MA=KM VT=TH
MO MO=SE P1 P3 NE=2 LY=FR PS=FI TA=FR
FI LY(1,2) LY(2,2) LY(3,2) LY(4,1) LY(5,1) PS(1,1) PS(2,2)
VA 0 LY(1,2) LY(2,2) LY(3,2) LY(4,1) LY(5,1)
VA 1 PS(1,1) PS(2,2)
FR PS(1,2)
VA .5 LY(1,1) LY(2,1) LY(3,1) LY(4,2) LY(5,2)
VA -.5 PS(1,2)

```

```

FITA(4)
VA 0 TA(4)
OU WF ES RS SE
RA FO UN='LOT3.DAT'
(5F1.0)

```

Nótese las diferencias con el programa anterior. En la línea *MO* se indica que se trata de un modelo con restricciones estructurales en los umbrales y en las correlaciones (*MO=SE P1 P3*). La matriz de umbrales se denomina *TAU*, referenciada como *TA=FR*. Más adelante en el programa indicamos que deseamos fijar el cuarto elemento de esta matriz a cero. A continuación proporcionamos parte del fichero de salida de este programa

### output 10

```

CHI-SQUARE WITH
5 DEGREE(S) OF FREEDOM IS 6.727
THE PROBABILITY VALUE IS 2415

ROOT MEAN SQUARE RESIDUAL
.033

PARAMETER ESTIMATES

TAU

```

	1	2	3	4	5
	-.661	.189	-.913	000	-1.029
	6	7	8	9	10
	-.260	.291	.982	.384	1.073

```

LAMBDA

```

	1	2
1	.725	.000
2	.855	.000
3	.714	.000
4	.000	.984
5	.000	.829

```

PSI

```

	1	2
1	1.000	
7	-.553	1.000

```

STANDARD ERRORS

TAU

```

	1	2	3	4	5
	.064	.058	.066	000	.074
	6	7	8	9	10
	.060	.062	.073	.062	.076

		LAMBDA	
		1	2
1		.045	.000
7		.038	.000
3		.045	.000
4		.000	.047
5		.000	.046
		PSI	
		1	7
1		.000	
2		.057	.000

Nótese que en este caso se dispone de 5 grados de libertad ya que se ha introducido una restricción más en los parámetros en forma reducida.

#### 17.7.1.2. Análisis con PRELIS/LISREL

A continuación incluimos el programa PRELIS 2 necesario para este ejemplo.

```

da ni=5
raw-data-from file = lot3.dat fo
(5f1.0)
la
lot1 lot4 lot5 lot8 lot9
or 1-5
ou ma=pm sm=lot.pm ac=lot.acr

```

Utilizando las matrices estimadas utilizando PRELIS, pasamos a continuación a estimar los parámetros del modelo utilizando LISREL.

```

lisrel
"LOT:dos factores correlacionados"
da ni=5 no=390 ma=pm
km = lot.pm
ac = lot.acr
la
lot1 lot4 lot5 lot8 lot9
mo ny=5 ne=2 ly=fj ps=sy,fi te=di,fr
le
optimis pesimis
pa ly
1 0
1 0
1 0
0 1
0 1
va 1 ps 1 1 ps 2 2
fr ps 1 2
ou wl xm nd=3

```

Como en el caso de variables dicotómicas, los resultados obtenidos son muy similares a los proporcionados por LISCOMP y por tanto no serán reproducidos aquí.

## 17.8. CONCLUSIONES

En este capítulo hemos visto los distintos modelos multidimensionales de respuesta a los ítems existentes basados en la utilización de la j oiva normal, así como los métodos disponibles para la estimación de estos modelos. Hasta el momento no existe ningún MRI multidimensional para datos policotómicos no ordenados. Sin embargo, en principio es posible modelar estos datos dentro del marco de los modelos expuestos tratando a los datos policotómicos no ordenados como datos de preferencias de los que únicamente se dispone de información acerca de la opción preferida por cada sujeto, pero no del orden de las preferencias de los sujetos por las otras opciones de los ítems (Maydeu-Olivares, 1995; Takane & de Leeuw, 1987). Esta es una línea obvia de investigación futura en el área de los MRI multidimensionales.

Todos los métodos de estimación presentados aquí adolecen de serias limitaciones. Así, los métodos de información limitada basados en funciones de discrepancias cuadráticas ponderadas de Christoffersson y Muthén se hallan limitados en el número de ítems que pueden analizar debido a la necesidad de estimar e invertir la matriz de pesos. Muthén y Kaplan (1985, 1992; ver también Muthén, 1993) han investigado los efectos del número de variables analizadas y el tamaño de la muestra empleada en la validez de la prueba de bondad de ajuste obtenida y los errores estándar de los parámetros obtenidos mediante la utilización del método de Muthén. Estos autores han concluido que a menos que el número de variables sea pequeño y el tamaño de la muestra muy grande la prueba de bondad de ajuste del modelo y los errores estándar de los parámetros serán erróneos. Esto se debe a que el estimador converge muy lentamente a su distribución asintótica teórica (Mutlién & Satorra, 1995). Es muy probable que estos resultados sean extrapolables a otros métodos de estimación similares, como los de Christoffersson (1975) y Joreskog (1994). Nótese que estas limitaciones de los métodos de información limitada son comunes a la estimación de MRI unidimensionales y multidimensionales.

Si se utilizan métodos de estimación de información limitada basados en mínimos cuadrados no ponderados, entonces desaparecen las limitaciones en cuanto al número de ítems que pueden ser analizados simultáneamente, pero en este caso no se dispone de errores estándar para los parámetros ni de una prueba de bondad de ajuste del modelo. Éstos, en principio, pueden ser obtenidos mediante re-muestreo (Efron & Tibshirani, 1993). Esta es otra línea obvia de investigación futura en este área.

Los métodos de estimación de información plena únicamente serán más

electivos que los métodos de información limitada si son capaces de aprovechar la información de las frecuencias de orden superior. Los métodos de estimación basados en el algoritmo EM tienen serias limitaciones para estimar modelos con un número elevado de rasgos latentes y en general únicamente se mostrarán superiores a los métodos de información limitada cuando se disponga de muestras muy grandes y el número de rasgos latentes postulado sea muy pequeño. Recientemente ha aparecido en la literatura estadística un nuevo algoritmo que puede ser utilizado en sustitución del algoritmo EM en procedimientos de estimación de información plena. Se trata del denominado algoritmo de re-muestreo de Gibbs (Gelfand & Smith, 1991). Otra línea obvia de investigación futura en el área de MRI multidimensionales es la investigación de la efectividad de este algoritmo para estimar estos modelos. Independientemente de que se utilice el algoritmo EM o el de re-muestreo de Gibbs, si se desea obtener errores estándar para los parámetros es necesario desarrollar programas de estimación de modelos confirmatorios. Esta es otra línea obvia de investigación en este área.

Con todo, resulta difícil evaluar la efectividad de los métodos existentes de estimación ya que existe un número muy limitado de estudios que hayan investigado el comportamiento de los estimadores existentes bajo condiciones distintas de tamaño muestral, número de ítems, número de factores. Entre los estudios existentes cabe citar los de Balassiano (1994), Knol y Berger (1991), Parry y McArdle (1991), Poothast (1993), Reiser y Vandenberg (1994). Más estudios son necesarios para evaluar claramente los límites de los estimadores existentes.

Diversos aspectos tales como la interpretación de los parámetros del modelo, funciones de información de los ítems y del test, o estimación de los valores de los sujetos en las variables latentes que no han sido cubiertos en este capítulo por falta de espacio son fácilmente extrapolables a partir de los resultados existentes para MRI unidimensionales. Los lectores interesados en la interpretación de los parámetros de MRI multidimensionales pueden consultar Reckase (1985), Reckase y McKinley (1991), y Muraki y Carlson (1995). McDonald (en prensa a) y Reckase (en prensa) discuten las funciones de información de los ítems y del test en MRI multidimensionales. En lo que respecta a la estimación de los valores de los sujetos en las variables latentes del modelo, éstas se realizan mediante procedimientos de estimación de información plena una vez han sido estimados los parámetros de los ítems (bien por procedimientos de información plena, o limitada), véase Muraki y Engelhard (1985).

## 17.9. EJERCICIOS

1. Demostrar que la equivalencia entre la parametrización de Lord y la FA dada en la Ecuación (17.25) puede escribirse alternativamente como

$$\lambda_i = \frac{a_i}{\sqrt{1+a_i^2}} \quad \text{y} \quad \tau_i = \frac{a_i b_i}{\sqrt{1+a_i^2}}$$

2. Considera un experimento en dos etapas. En la primera etapa, los sucesos posibles ( $A_1, \dots, A_n$ ) son mutuamente excluyentes, tal que  $\sum_{i=1}^n A_i = 1$ . En la segunda etapa, los resultados posibles dependen de los de la primera y se conocen las probabilidades condicionales  $P(B_j|A_i)$ .

a) Demuestra que  $P(B_j) = \sum_{i=1}^n P(B_j|A_i)P(A_i)$

(Nota: Utiliza la definición de probabilidad condicionada)

$$P(A_i|B_j) = \frac{P(A_i B_j)}{P(B_j)} = \frac{P(B_j|A_i)P(A_i)}{P(B_j)}$$

y ya que  $B_j$  debe ocurrir con alguno de los  $n$  posibles sucesos  $A_i$ ,  $P(B_j) = P(B_j|A_1) + \dots + P(B_j|A_n)$

- b) Utilizando el resultado anterior, demuestra la ecuación 17.1:

$$\Pr(v = \mathbf{u}) = \int_{\mathcal{R}} \dots \int g(v = \mathbf{u} | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}) f(\mathbf{h}) d\mathbf{h}$$

(Nota: las variables aleatorias asociadas con los items con categorías, pero las asociadas con los rasgos latentes son continuas.)

3. Demuestra que la ecuación 17.42 también puede escribirse como  $\hat{\tau}_i = -\Phi^{-1}(p_{i1}) = \Phi^{-1}(p_{i0})$
4. Demuestra que en MRIs policotómicos con ORFs suaves, podemos escribir

$$\frac{\hat{c}}{\hat{\sigma}} \pi_c(\boldsymbol{\vartheta}) = \int_{\mathcal{R}} \dots \int \left[ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} \prod_{i=1}^n \prod_{k=0}^{m-1} [\Pr(v_i = u_{i,k} | \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h})]^{v_{i,k}} \right] \phi(\mathbf{h}) d\mathbf{h}$$

## 17.10. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Agresti, A. (1990). *Categorical data analysis*. New York: Wiley.

Baker, F. B. (1992). *Item response theory. Parameter estimation techniques*. New York: Marcel Dekker.

Balassiano, M. (1994). *Capability for NOHARM to recover the latent ability space and item parameter estimates*. Comunicación presentada al Annual Meeting of the Psychometric Society. Urbana, IL.

Bartholomew, D. J. (1987). *Latent variable models and factor analysis*. New York: Oxford University Press.

Bentler, P. M., & Wu, E. J. C. (1993). *EQS/Windows User's Guide. Version 4*. Los Angeles, CA: BMDP Software, Inc.

Bock, R. D., & Aitkin, M. (1981). Marginal maximum likelihood estimation of item parameters: Application of an EM algorithm. *Psychometrika*, 46, 443-459.

Bock, R. D., & Lieberman, M. (1970). Fitting a response model for  $n$  dichotomously scored items. *Psychometrika*, 35, 179-197.

Bock, R. D., Gibbons, R., & Muraki, E. (1988). Full-information item factor analysis. *Applied Psychological Measurement*, 12, 261-280.

Cat-lion, J. E. (1987). *MIRTE: Multidimensional item response theory estimation*. (Research Report ONR87-2) Iowa City: American College Testing Program.

Chang, E. C., D'Zurilla, T. J., & Maydeu-Olivares, A. (1994). Assessing the dimensionality of optimism and pessimism using a multimeasure approach. *Cognitive Therapy and Research*, 15, 143-160.

Christofferson, A. (1975). Factor analysis of dichotomized variables. *Psychometrika*, 40, 5-32.

Dempster, A. P., Laird, N. M., & Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data using an EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 39, 1-38.

Drasgow, F. (1989). An evaluation of marginal maximum likelihood estimation for the two-parameter logistic model. *Applied Psychological Measurement*, 13, 77-90.

Efron, B., & Tibshirani, J. B. (1993). *An introduction to the bootstrap*. New York: Chapman & Hall.

Fraser, C. (1988). *HOHARM. A computer program for fitting both unidimensional and multidimensional normal ogive models of latent trait theory*. Armidale, Australia: Centre for Behavioral Studies. University of New England.

Fraser, C., & McDonald, R. P. (1988). NOHARM: Least squares item factor analysis. *Multivariate Behavioral Research*, 23, 267-269.

Gelfand, A. E., & Smith, A. F. M. (1991). Gibbs sampling for marginal posterior expectations. *Communications in Statistics. Theory and Methods*, 20, 1747-1766.

Haberman, J. S. (1977). Log-linear models and frequency tables with small expected cell counts. *Annals of Statistics*, 5, 1148-1169.

Holland, P. W. (1990). On the sample theory foundations of item response theory models. *Psychometrika*, 55, 577-601.

Hojtink, H., & Molenaar, I. W. (1996). *A multidimensional nonparametric item response model: Constrained latent class analysis using the Gibbs sampler and posterior predictive checks*. Documento no publicado. Dept. of Statistics and Measurement Theory. University of Groningen.

Jöreskog, K. G. (1994). On the estimation of polychoric correlations and their asymptotic covariance matrix. *Psychometrika*, 59, 381-389.

Jöreskog, K. G., & Sörbom, D. (1993a). *PRELIS 2. User's reference guide*. Chicago, IL: Scientific Software.

Jöreskog, K. G., & Sörbom, D. (1993b). *LISREL 8. User's reference guide*. Chicago, IL: Scientific Software.

Knol, D. L., & Berger, M. P. F. (1991). Empirical comparison between factor analysis and multidimensional item response models. *Multivariate Behavioral Research*, 26, 457-477.

- Kuhrt, H. I. (1981). *Hierarchische Mittelwert und Kovarianzstrukturmodelle mit nicht funktionalen endogenen Variablen*. Heidelberg: Physica-Verlag.
- Lee, S. Y., Poon, W. Y., & Bentler, P. M. (1990a). A three-stage estimation procedure for structural equation models with polytomous variables. *Psychometrika*, *55*, 45-51.
- Lee, S. Y., Poon, W. Y., & Bentler, P. M. (1990b). Full maximum likelihood analysis of structural equation models with polytomous variables. *Statistics and Probability Letters*, *1*, 91-97.
- Lee, S. Y., Poon, W. Y., & Bentler, P. M. (1995). A two-stage estimation of structural equation models with continuous and polytomous variables. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, *48*, 339-358.
- Levine, M. V. (1994). *Every data set that is well fit by a smooth multidimensional IRT model is equally well fit by a one dimensional submodel*. Comunicación presentada al Annual Meeting of the Psychometric Society. Urbana, IL.
- Lord, F. M. (1980). *Applications of item response theory to practical testing problems*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Lord, F. M., & Novick, M. R. (1968). *Statistical theories of mental test scores*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Maydeu-Olivares, A. (1994). Parametric vs. non-parametric approaches to individual differences scaling. *Psicothema*, *6*, 297-310.
- Maydeu-Olivares, A. (1995). *Structural equation modeling of pair comparison and ranking data*. Tesis doctoral no publicada. Champaign, IL: Dept. of Psychology, University of Illinois.
- McDonald, R. P. (1967). Nonlinear factor analysis. *Psychometric Monographs*, No. 15.
- McDonald, R. P. (1982). Linear versus nonlinear models in item response theory. *Applied Psychological Measurement*, *6*, 379-396.
- McDonald, R. P. (1985a). Unidimensional and multidimensional models for item response theory. En D. J. Weiss (Ed.) *Proceedings of the 1982 item response and computerized adaptive testing conference*. Minneapolis: University of Minnesota.
- McDonald, R. P. (1985b). *Factor analysis and related methods*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- McDonald, R. P. (en prensa, a). *Test theory: A unified treatment*. New York: Harper and Collins.
- McDonald, R. P. (en prensa, b). Normal ogive multidimensional model. En W. Van der Linden and R. K. Hambleton (Eds.). *Handbook of modern item response theory*. New York: Springer Verlag.
- McDonald, R. P., & Mok, M. C. (1995). Goodness of fit in item response models. *Multivariate Behavioral Research*, *54*, 483-495.
- McKinley, R. L., & Reckase, M. D. (1983). *An extension of the two-parameter logistic model to the multidimensional latent space*. (Research Report ONR 83-2.) Iowa City: American College Testing Program.
- Mislevy, R. J. (1986). Recent developments in the factor analysis of categorical variables. *Journal of Educational Statistics*, *11*, 3-31.
- Mislevy, R. J., & Bock, R. D. (1989). *PC-BILOG 3; Item analysis and test scoring with binary scoring models*. Mooresville, IN: Scientific Software.
- Mislevy, R. J., & Stocking, M. L. (1989). A consumer's guide to LOGIST and BILOG. *Applied Psychological Measurement*, *13*, 57-75.
- Muraki, E. (1993). *POLYFACT (Computer program)*. Princeton, NJ: Educational Testing Service.
- Muraki, E., & Carlson, J. E. (1995). Full information factor analysis for polytomous item responses. *Applied Psychological Measurement*, *19*, 73-90.
- Muraki, E., & Engelhard, G. (1985). Full-information item factor analysis: Applications of EAP scores. *Applied Psychological Measurement*, *9*, 417-430.
- Muthén, B. (1978). Contributions to factor analysis of dichotomous variables. *Psychometrika*, *43*, 551-560.
- Muthén, B. (1984). A general structural equation model with dichotomous, ordered categorical, and continuous latent variable indicators. *Psychometrika*, *49*, 115-132.
- Muthén, B. (1987a). *LISCOMP. Analysis of linear structural equations using a comprehensive measurement model*. Mooresville, IN: Scientific Software.
- Muthén, B. (1987b). Sonic uses of structural equation modeling in validity studies: Extending fit to external variables. En H. Wainer & H. I. Braun (Eds.) *Tesis validity*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Muthén, B. (1993). Goodness of fit with categorical and other non normal variables. En K. A. Bollen, & J. S. Long (Eds.). *Testing structural equation models*. Newbury Park, CA: Sage.
- Muthén, B., & Hofacker, C. (1988). Testing the assumptions underlying tetrachoric correlations. *Psychometrika*, *53*, 563-578.
- Muthén, B., & Kaplan, I. (1985). A comparison of sonic methodologies for the factor analysis of non-normal Likert variables. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, *38*, 171-189.
- Muthén, B., & Kaplan, D. (1992). A comparison of some methodologies for the factor analysis of non-normal Likert variables: A note on the size of the model. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, *45*, 19-30.
- Muthén, B., & Satorra, A. (1995). Technical aspects of Muthén's LISCOMP approach to estimation of latent variable relations with a comprehensive measurement model. *Psychometrika*, *60*, 489-503.
- Neyman, J., & Scott, E. L. (1948). Consistent estimates based on partially consistent observations. *Econometrika*, *16*, 1-32.
- Olsson, U. (1979). Maximum likelihood estimation of the polychoric correlation coefficient. *Psychometrika*, *44*, 443-460.
- Park, C. D. Li, & McArdle, J. J. (1991). An applied comparison of methods for least squares factor analysis of dichotomous variables. *Applied Psychological Measurement*, *15*, 35-46.
- Peña, D. (1993). *Estadística. Modelos y métodos* (2.ª edición). Madrid: Alianza Editorial.
- Poehast, M. J. (1993). Confirmatory factor analysis of ordered categorical variables with large models. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, *46*, 273-286.
- Reckase, M. D. (Ed.) (en prensa). *Multidimensional item response theory*. Iowa City: American College Testing Program.
- Reckase, M. D. (1985). The difficulty of test items that measure more than one ability. *Applied Psychological Measurement*, *9*, 401-412.
- Reckase, M. D., & McKinley, R. L. (1991). The discriminating power items that measure more than one dimension. *Applied Psychological Measurement*, *15*, 361-373.
- Reiser, M., & Vandenberg, M. (1994). Validity of the chi-square test in dichotomous variable factor analysis when expected frequencies are small. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, *47*, 85-107.

- Scheier, M. F., & Carver, C. S. (1985). Optimism, coping, and health: Assessment and implications of generalized outcome expectancies. *Health Psychology, 4*, 219-247.
- Schepers, A., & Arminger, G. (1992). *MECOSA: A program for the analysis of general mean and covariance structures with non-metric variables. User Guide*. Frauenfeld, Switzerland: SLI-AG.
- Stroud, A. H., & Sechrest, D. (1966). *Gaussian quadrature formulas*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Sympson, J. B. (1978). A model for testing with multidimensional items. En D. J. Weiss (Ed.) *Proceedings of the 1977 computerized adaptive testing conference*. Minneapolis: University of Minnesota.
- Taken, Y., & de Leeuw, J. (1987). On the relationship between item response theory and factor analysis of discretized variables. *Psychometrika, 52*, 393-408.
- Thissen, D., & Steinberg, L. (1986). A taxonomy of item response models. *Psychometrika, 51*, 567-577.
- Whitely, S. E. (1980). Multicomponent latent trait models for ability tests. *Psychometrika, 45*, 479-494.
- Wilson, D. T., Wood, R., & Gibbons, R. (1991). *TESTFACT. Test scoring, item statistics, and item factor analysis*. Mooresville, IN: Scientific Software.
- Wingersky, M. S., Barton, M. A., & Lord, F. M. (1982). *LOGIST user's guide*. Princeton, NJ: Educational Testing Service.
- Yen, W. M. (1987). A comparison of the efficiency and accuracy of BILOG and LOGIST. *Psychometrika, 52*, 275-291.