Time dependence on Financial Operations of Investment

David Ceballos Hornero
Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial.
Universitat de Barcelona
ceballos@eco.ub.es

Dynamic analysis of a Financial Operation of Investment (OFI) consists in studying Time dependence on variables that define the OFI: quantities (inputs and outputs), terms and interest rate. In spite of the study of an OFI can be objective or subjective, its dynamic analysis can be systematised by means of a map that shows dependence with regards to Time of an OFI. With this end in view, we will consider four ways of Time dependence: in relation to quantities (values and locations), to interest rate (financial environment), to moment of valuation (evolution Term Structure of Interest Rate and terms), and to temporal horizon (period of analysis, financial regimes).

KEYWORDS: Financial Operation of Investment (OFI), Time, Uncertainty.

0. INTRODUCCIÓN.

Una Operación Financiera de Inversión (OFI) se define de forma tradicional y operativa como un conjunto de flujos monetarios futuros (capitales financieros) dispuestos en diferentes momentos del tiempo. Estos flujos monetarios son *a priori* inciertos y al compararlos financieramente tienden a mostrar un desequilibrio a favor de los cobros (OFI rentable) o de los pagos (OFI no rentable). La comparación financiera consiste en la homogeneización temporal de los diferentes flujos a través de una Estructura Temporal de Tipos de Interés.

En el párrafo anterior se pone de manifiesto la relevancia del tiempo en las OFI, al ser una variable que afecta tanto a su definición como a su operativa. Ello obliga a que todo análisis de una OFI deba ser dinámico.

El tiempo aparece en el estudio de una OFI de dos formas posibles. (i) Como instante: inicio, final, ubicación de los capitales financieros y el momento de valoración y, por otro lado, (ii) como intervalo: diferimiento de los distintos capitales, plazo de la OFI y otras medidas temporales como el Plazo Financiero Medio y la función Duratio.

En el estudio de una OFI intervienen tres variables: cuantía, tipo de interés y diferimiento. Las mismas se ven afectadas *en el tiempo* y *por el tiempo.* Lo primero porque el paso del tiempo permite el cambio del valor de las variables; y lo segundo porque las mismas no son indiferentes, financieramente hablando, al momento o instante en que se sitúan.

El *análisis dinámico* de una OFI está actualmente parcelado, ya que está diversificado en diferentes apartados como el estudio de rentas financieras, el cálculo del plazo de retorno, el cálculo de la Duratio, el cálculo del Plazo Financiero Medio, el estudio de la Estructura Temporal de Tipos de Interés (ETTI) y de su evolución, la comparación de OFI con diferente plazo, etc. La presente comunicación tiene por objeto sistematizar bajo un mismo epígrafe, *análisis dinámico*, toda esta diversidad. A partir de la definición, clasificación y descripción de una OFI según el modelo del Dr. A. Rodríguez (1994), se puede plantear el estudio de sus *dependencias temporales*, esto es, de cómo se ve afectada *en* y *por* el tiempo al cambiar las variables que en ella intervienen.

En la definición de las dependencias temporales utilizamos el tiempo como sinónimo de variación. El concepto de tiempo se relaciona con el cambio a través de su medida. Esta medida puede basarse en un *tiempo físico* homogéneo, igual para todos los instantes; en un *tiempo histórico*[1] o dependiente de la relevancia de los acontecimientos; o de un *tiempo financiero*[2] que diferencie los instantes según alguna característica financiera como puede ser pérdidas o ganancias.

En esta comunicación trabajamos con un tiempo físico y con el modelo del Dr. A. Rodríguez como base para la definición y constatación de las dependencias temporales. El trabajo presenta dos partes, además de esta introducción y la conclusión. En la primera parte se resume la descripción de una OFI y en la segunda parte desarrollamos a nivel teórico las dependencias temporales de la misma.

[1] Vid. Nieto de Alba, U. (1998).
[2] Vid. Ceballos Hornero, D. (2001).

1. LA OPERACIÓN FINANCIERA DE INVERSIÓN.

Una Operación Financiera (OF)[3] es un ente matemático complejo y binario cuyas componentes, denominadas miembros de la operación, son subconjuntos o partes del conjunto financiero universal U, comprensivo de todos los elementos financieros primarios, sean capitales (discreto) o flujos (continuo), ciertos o inciertos. Ante una relación[4] de equivalencia financiera, en una OF o bien sus miembros son equivalentes M ~ N, o bien no lo son M ∩ N. En el primer caso se habla de una Operación Financiera de Financiación (OFF) y en el segundo de una Operación Financiera de Inversión (OFI).

El estudio de una OFI se puede realizar de forma objetiva mediante un modelo matemático, o de forma subjetiva mediante la aplicación de reglas de experiencia y de inferencia y las costumbres.

Una OF dependiendo de la naturaleza de sus componentes puede ser cierta o incierta, correspondiendo la incertidumbre al conocimiento probable, vago, inexacto o aproximado[5]. Según la naturaleza del tiempo puede ser discreta o continua. Según el número de cuantías puede ser elemental (M y N conjuntos unitarios) o compleja. Y, finalmente, según la naturaleza de los cálculos puede ser complicada, cuando el mayor número de capitales financieros sólo aporta mayores cálculos (errores despreciables), o caótica, cuando pequeños errores pueden llevar a resultados totalmente dispares.

De esta manera, una primera clasificación de las OFI[6] según su modelización es:

[3] Vid. Rodríguez Rodríguez, A. (1997), pág. 1.
[4] Jurídica a efectos prácticos.
[5] Vid. Ramírez Sarrió, D. (1994).
[6] Se parte del esquema de Rodríguez Rodríguez, A. (1994), pág. 2.

- OFI
  - OBJETIVA
    - CIERTA
      - discreta
        - elemental
        - compleja
          - complicada
          - caótica
      - continua
        - complicada
        - caótica
    - INCIERTA
      - probable
      - borrosa
      - inexacta
      - aproximada
  - SUBJETIVA o DE EXPERIENCIA

Analizamos únicamente el estudio objetivo de las OFI y nos centramos en la modelización cierta, por ser la más fácilmente interpretable y la base del resto.

La descripción de una OFI se realiza a partir de los capitales financieros que la componen y del precio estricto del tipo de interés de valoración, ρ. Un capital financiero[7] no es más que el par matemático (C, T) compuesto por la cuantía monetaria del capital (C) y, por otra parte, del diferimiento (T). Los capitales financieros en una OFI se clasifican según supongan una aportación para el inversor, input, o un cobro, output, haciéndose el neto o compensación de los mismos para cada instante. El tipo de interés de valoración que se considera es el precio estricto del dinero ρ, a saber, $\rho = \ln(1+i)$. El tipo de interés anual, i, mide el valor temporal del dinero, el cual es positivo por el principio de la preferencia por la liquidez.

A la hora de analizar una OFI se sintetiza la información aportada por los capitales financieros que la constituyen mediante su reducción financiera a una OFI elemental donde los inputs netos se sintetizan en el capital financiero de su suma financiera: de cuantía la suma aritmética de las cuantías de los inputs netos (**C**) y de diferimiento el Diferimiento

[7] Capital financiero equivale a los cobros y pagos, al pensar que el *cash flow* es la corriente dineraria que mejor refleja la disposición temporal real de una inversión y porque de este modo los datos no están sujetos al riesgo de crédito.

Medio (DM) de los inputs (**T**). Con los outputs se realiza la misma reducción resultando (**C'**, **T'**). En expresión: (**C**, **T**) $\cap$(**C'**, **T'**) para un ρ dado.

El DM es el diferimiento **T** que cumple la equivalencia: $\left(\sum_i C_i, \mathbf{T}\right) \sim \{(C_i, T_i)\}_{i=1,\dots n}$, que para una OFI cierta, discreta y compleja en un ambiente financiero simple es en el caso de los inputs: $\mathbf{T} = \frac{\ln\left(\mathbf{C}/V\right)}{\rho}$, donde V es el valor actual de los inputs.

Una importante magnitud descriptiva de una OFI es la Inmovilización Financiera (IF), que no es más que el par compuesto por **C** y por el Plazo Financiero Medio de la OFI (PFM = **T' – T**). Este par matemático (**C**, PFM) indica la cuantía "inmovilizada" por el inversor por las aportaciones que tendrá que hacer y el tiempo "promedio" de dicha inmovilización (PFM). El Coste Financiero, CF, de la inversión se calcula a partir de los intereses generados por la inmovilización financiera anterior: $CF = \mathbf{C} \cdot [f(\mathbf{T}, \mathbf{T}') - 1]$.

Para el cálculo de la rentabilidad de la OFI se tiene también en cuenta el output neto agregado **C'**, definiéndose las tasas de rendimiento estrictas nominales bruta $\bar{\rho} = \frac{\ln\left(\mathbf{C}'/\mathbf{C}\right)}{PFM}$ y neta $\hat{\rho} = \frac{\ln\left(\mathbf{C}'/\mathbf{C}''\right)}{PFM} = \frac{\ln\left(\frac{\mathbf{C}'}{\mathbf{C}\cdot e^{\rho\cdot PFM}}\right)}{PFM}$, que son las tasas instantáneas periodificadas a la unidad temporal de cálculo del PFM, sin deducción $(\bar{\rho})$ o deduciendo $(\hat{\rho})$ los costes financieros del resultado.

2. LAS DEPENDENCIAS TEMPORALES DE UNA OFI.

Partiendo de una OFI compleja y de su reducción financiera, (**C**, **T**) $\cap$ (**C'**, **T'**) para ρ, se puede analizar cómo se ve afectada por la variabilidad de sus componentes *en* y *por* el tiempo. Para ello clasificamos los posibles efectos del paso del tiempo y las variaciones de ubicación temporal en cuatro tipos, cada uno de los cuales denominamos *dependencia* *temporal* debido a la influencia del tiempo en los cambios en la descripción de la OFI. Estas dependencias temporales las analizaremos a partir de las variación en las magnitudes del rendimiento absoluto bruto, $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{C'} - \mathbf{C}$, de las tasas de rentabilidad sobre la inmovilización estrictas nominales bruta, $\overline{\rho}$, y neta, $\hat{\rho}$, y del Plazo Financiero Medio, PFM.

2.1 Dependencia temporal de la cuantía:

La dependencia temporal de la cuantía recoge las variaciones que se producen en la descripción de una OFI cuando cambian sus cuantías, sea en valor sea en localización. El cambio en el valor recoge la evolución de las rentas financieras, la variación de las cuantías agregadas y nuevas previsiones de inputs y outputs. La localización de cobros y pagos depende de las estimaciones de *cash flow* realizadas.

2.1.1 Efectos cuando varía el valor de los inputs y outputs que definen una OFI.

Un cambio de las cuantías puede afectar o bien al capital equivalente o bien a un capital financiero cualquiera que compone la OFI. El cambio en la cuantía del capital equivalente $C'_{T'}$ o C_T afecta únicamente a la diferencia entre los diferimientos de los capitales financieros equivalentes, lo que se puede considerar como análogo al efecto sobre el PFM de una reducción en los capitales equivalentes. No tiene sentido en las tasas de rentabilidad definidas porque se calculan las mismas a partir de las sumas financieras de input y output.

$$\frac{\partial(T'-T)}{\partial C'_{T'}} + \frac{\partial(T'-T)}{\partial C_T} = \frac{1}{\rho \cdot C'_{T'}} - \frac{1}{\rho \cdot C_T} > 0 \text{ si } C'_{T'} < C_T.$$

Se observa que la única dependencia es sobre el valor del tipo de interés y de las cuantías de los capitales financieros equivalentes.

Si se supone que el capital financiero equivalente tanto al input como al output es siempre su suma financiera, entonces hay que diferenciar entre las variaciones de los outputs y de los inputs, puesto que las magnitudes consideradas son funciones separables en dichas variables, debido a que en cada instante hay un input o un output, al suponer la compensación de capitales en cada momento.

$$\frac{\partial PFM}{\partial C_i}=\frac{\partial\left[\frac{1}{\rho}\cdot\left(\ln\frac{\sum_i C_i'}{\sum_i C_i}-\ln\frac{\sum_i C_i'\cdot e^{-\rho\cdot T_i'}}{\sum_i C_i\cdot e^{-\rho\cdot T_i}}\right)\right]}{\partial C_i}=\frac{1}{\rho}\cdot\left(-\frac{1}{\mathbf{C}}+\frac{e^{-\rho\cdot T_i}}{V}\right)=\begin{cases}<0 & \text{si } T_i>\mathbf{T}\\ =0 & \text{si } T_i=\mathbf{T}\\ >0 & \text{si } T_i<\mathbf{T}\end{cases}$$

$$\frac{\partial PFM}{\partial C_i'}=\frac{1}{\rho}\cdot\left(\frac{1}{\mathbf{C'}}-\frac{e^{-\rho\cdot T_i'}}{V'}\right)=\begin{cases}<0 & \text{si } T_i'<\mathbf{T'}\\ =0 & \text{si } T_i'=\mathbf{T'}\\ >0 & \text{si } T_i'>\mathbf{T'}\end{cases}$$

$$\frac{\partial PFM}{\partial C_i'}+\frac{\partial PFM}{\partial C_i}>0\Rightarrow\quad V'\cdot\left[e^{-\rho\cdot T_i}-V/\mathbf{C}\right]>V\cdot\left[e^{-\rho\cdot T_i'}-V'/\mathbf{C'}\right]$$

El PFM de la OFI variará en función de la relación que mantengan los diferimientos de los capitales que han cambiado con sus correspondientes DM, del tipo de interés, de los valores actuales del input y del output y, finalmente, de las cuantías agregadas.

$$\frac{\partial\overline{\mathbf{R}}}{\partial C_i'}+\frac{\partial\overline{\mathbf{R}}}{\partial C_i}>0\quad \text{si}\quad \Delta C_i'>\Delta C_i$$

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial C_i'}+\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial C_i}>0\quad \text{si}\quad \frac{1}{\mathbf{C'}}-\frac{1}{\mathbf{C}}<\overline{\rho}\cdot\left(\frac{\partial PFM}{\partial C_i'}+\frac{\partial PFM}{\partial C_i}\right)<0\quad \text{en OFI rentables.}$$

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial C_i'}+\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial C_i}>0\quad \text{si}\quad \frac{1}{\mathbf{C'}}-\frac{e^{-\rho\cdot T_i}}{V}<\hat{\rho}\cdot\left(\frac{\partial PFM}{\partial C_i'}+\frac{\partial PFM}{\partial C_i}\right)<0\quad \text{en OFI rentables.}$$

La variación en el valor de las cuantías afecta de una forma compleja a las magnitudes de rentabilidad. En OFI rentables la medida de dicha variabilidad viene, sobre todo, dada por el efecto sobre el PFM.

2.1.2 Efectos según cambia la localización temporal de las cuantías.

El cambio de la localización (t_j) provoca una variación de los diferimientos en la misma cuantía: $\frac{\partial T_j}{\partial t_j}=1$.

Puesto que $\frac{\partial \overline{\mathbf{R}}}{\partial T_j} = 0$, el rendimiento absoluto bruto no se ve afectado por la ubicación temporal de las cuantías.

$$\frac{\partial PFM}{\partial T_i'} + \frac{\partial PFM}{\partial T_i} < 0 \quad \text{si} \quad \text{con distinto signo} \quad \left|T_i' - T_i\right| < \left|\frac{1}{\rho}\cdot\left[\ln\left(V'/V\right) - \ln\left(C_i'/C_i\right)\right]\right|$$

La variación del PFM cuando varían la ubicación de los capitales financieros depende de los instantes y cuantías afectados, además del tipo de interés y de los valores actuales.

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial T_i'} + \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial T_i} > 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial PFM}{\partial T_i'} + \frac{\partial PFM}{\partial T_i} > 0 \quad \text{en OFI rentables.}$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial T_i'} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial T_i} > 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial PFM}{\partial T_i'} + \frac{\partial PFM}{\partial T_i} > 0 \quad \text{en OFI rentables y no degeneradas.}$$

De nuevo la variabilidad de las tasas de rentabilidad estrictas nominales viene marcada por la variabilidad del PFM.

2.1 **Dependencia temporal del tipo de interés**:

Se analiza los efectos sobre la descripción de una OFI de un cambio en el tipo de interés, en función del plazo considerado, de la naturaleza de la operación financiera que se realiza (descuento o interés) y de su escindibilidad.

Existen diferentes ambientes financieros dependiendo de la Estructura Temporal de Tipos de interés existente, es decir, de los tipos de interés para cada plazo. Si éste es único estamos ante un *ambiente financiero simple*. Este es el caso hasta ahora analizado en ambiente de certeza. En expresión:

$$\frac{\partial PFM}{\partial \rho} = -\frac{\ln\left(\frac{\mathbf{C'}}{\mathbf{C}}\right) - \ln\left(\frac{V'}{V}\right)}{\rho^2} + \frac{\frac{\sum_i C_i'\cdot t_i'\cdot e^{-\rho\cdot T_i'}}{V'} - \frac{\sum_i C_i\cdot t_i\cdot e^{-\rho\cdot T_i}}{V}}{\rho} = \frac{DUR - PFM}{\rho}$$

Una variación del tipo de interés cambiará el PFM en función de los valores iniciales de la función Duratio, del PFM y del tipo de interés.

Respecto a la rentabilidad:

$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \rho} = 0$; $\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \rho} = -\frac{\ln\left(\frac{\mathbf{C'}}{\mathbf{C}}\right) \cdot \frac{DUR - PFM}{\rho}}{PFM^2} < 0$ si la OFI es rentable y coinciden los signos de {ρ} y de {DUR-PFM}; $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho} = -\left(1 + \frac{\overline{\rho}}{PFM} \cdot \frac{DUR - PFM}{\rho \cdot PFM^2}\right) = -\left(1 - \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \rho}\right)$, $\frac{\partial \rho}{\partial \rho} = 1 = \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \rho} - \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho}$.

El rendimiento absoluto bruto no depende del tipo de interés y por eso no se ve afectado por la forma y cambios de la ETTI. En las tasas estrictas nominales, su variación es función de la tasa bruta, además de la variación del PFM.

El ambiente financiero cambia cuando el tipo de interés es diferente para cada plazo: ambiente financiero compuesto. En este caso hay que distinguir cuando la Estructura Temporal de Tipos de Interés es escindible de cuando no lo es. También el ambiente financiero se puede diferenciar según operaciones de descuento y de interés: ambiente financiero completo. Finalmente, está el ambiente financiero continuo, cuando el tipo de interés varía de forma continua según el plazo.

Partiendo de las igualdades básicas de la reducción financiera:

$\sum_i C_i' e^{plazo_i' \cdot \rho(plazo')} = \mathbf{C'}$ y $\sum_i C_i \cdot e^{plazo_i \cdot \rho(plazo)} = \mathbf{C}$, siendo plazo$_i$' = **T'** – T$_i$',

plazo$_i$ = **T** – T$_i$ y PFM = **T'** – **T**.

- En un *ambiente financiero compuesto*, la ETTI muestra los tipos de interés para cada plazo, definido este último a partir de la distancia temporal de cada diferimiento con el DM correspondiente. Si la variación del tipo de interés no afecta al escalón de la ETTI aplicado a cada capital financiero, entonces las derivadas coinciden con las del ambiente financiero simple. Si para alguno de los capitales cambia la ley financiera, habrá que añadir los correspondientes efectos en el cambio del cálculo del PFM:

$$\sum_i C_i' e^{plazo_i' \cdot \rho(plazo')} + C_i' e^{plazo_i' \cdot \rho(plazo_i')} \cdot \left[e^{plazo_i' \cdot \Delta\rho(plazo_i')} - 1\right] = \mathbf{C'} \quad \text{y}$$

$$\sum_i C_i' e^{plazo_i \cdot \rho(plazo_i)} + C_i' e^{plazo_i \cdot \rho(plazo_i)} \cdot \left[e^{plazo_i \cdot \Delta\rho(plazo_i)} - 1\right] = \mathbf{C}$$

El efecto es similar a una reducción del capital financiero equivalente. Aplicado al caso analizado: $\frac{\partial \overline{R}}{\partial \rho(\tau)} = 0; \quad \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \rho(\tau)} = -\frac{\overline{\rho}}{PFM} \cdot \frac{\partial PFM}{\partial \rho(\tau)}; \quad \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho(\tau)} = -1 + \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \rho(\tau)}$

$$\frac{\partial PFM}{\partial \rho(\tau)} = \frac{\partial \mathbf{T'}}{\partial \rho(\tau)} - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \rho(\tau)} = \frac{D' - \mathbf{T'}}{\rho(\theta')} + \sum_i C_i' \cdot e^{plazo_i' \cdot \rho(plazo_i')} \cdot \left[e^{plazo_i' \cdot \Delta\rho(plazo_i')} - 1 \right] \cdot \frac{1}{\rho(\theta') \cdot \mathbf{C'}} +$$

$$- \left[\frac{D - \mathbf{T}}{\rho(\theta)} + \sum_i C_i \cdot e^{plazo_i \cdot \rho(plazo_i)} \cdot \left[e^{plazo_i \cdot \Delta\rho(plazo_i)} - 1 \right] \cdot \frac{1}{\rho(\theta) \cdot \mathbf{C}} \right], \quad \text{siendo:}$$

$$\rho(\theta') = \frac{\int_0^{\mathbf{T}} \rho(\tau') \cdot d\tau'}{\mathbf{T'}}, \quad \rho(\theta) = \frac{\int_0^{\mathbf{T}} \rho(\tau) \cdot d\tau}{\mathbf{T}}, \quad DUR = D' - D \quad y \quad PFM = \mathbf{T'} - \mathbf{T}$$

Nuevamente, una variación de la ETTI afecta a las magnitudes que describen una OFI principalmente a través del PFM.

- Otro caso es el de ambiente financiero completo, es decir, cuando se diferencia según el signo del plazo en operaciones de descuento (negativo) y de interés (positivo). En un régimen financiero de interés (i) y de descuento (d) compuesto, la relación entre los mismos es la siguiente: $i = \frac{d}{1-d}$. Su relación con el precio de interés estricto es: $\rho = \ln(1+i) = -\ln(1-d); \quad 0 \le d \le 1$.

En este caso, considerando separadamente las operaciones de descuento en el cálculo del PFM (capitales situados con posterioridad a **T'** o **T** dependiendo si son outputs o inputs) y las operaciones de interés, se tiene:

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \rho(\tau)} = 0; \quad \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \rho(\tau)} = -\frac{\overline{\rho}}{PFM} \cdot \frac{\partial PFM}{\partial \rho(\tau)}; \quad \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho(\tau)} = -1 + \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \rho(\tau)}$$

$$\frac{\partial PFM}{\partial\rho(\tau)}=\frac{D'-\mathbf{T'}}{\rho(\theta_c')}+\sum_i C_i'\cdot e^{plazo_i'\cdot\rho_{plazo_i'}}\cdot\left[e^{plazo_i'\cdot\Delta\rho_{plazo_i'}}-1\right]\cdot\frac{1}{\rho(\theta_c')\cdot\mathbf{C'}}+$$

$$-\left[\frac{D-\mathbf{T}}{\rho(\theta_c)}+\sum_i C_i\cdot e^{plazo_i\cdot\rho_{plazo_i}}\cdot\left[e^{plazo_i\cdot\Delta\rho_{plazo_i}}-1\right]\frac{1}{\rho(\theta_C)\cdot\mathbf{C}}\right]$$

$$\rho(\theta_c')=\frac{\int_{\mathbf{T}\le T_i'}\rho_d(\tau)\cdot d\tau+\int_{\mathbf{T}>T_i'}\rho_i(\tau)\cdot d\tau}{\mathbf{T'}}\quad y\quad \rho(\theta_c)=\frac{\int_{\mathbf{T}\le T_i}\rho_d(\tau)\cdot d\tau+\int_{\mathbf{T}>T_i}\rho_i(\tau)\cdot d\tau}{\mathbf{T}}$$

Esta situación se puede ver como un ambiente financiero compuesto, pero con una ETTI dependiente de la naturaleza de la OF y no de la medida del plazo. También se puede ampliar al ambiente financiero compuesto y completo teniendo varios tipos de interés y varias tasas de descuento según la duración de los plazos y suponer en vez de capitales discretos unos continuos.

- En un ambiente financiero continuo el precio estricto del tipo de interés es una función continua del plazo. De aquí se deriva que el factor financiero es escindible y la indiferencia del momento respecto al cual se establecen los plazos porque los tipos implícitos entre plazos "obligan" a una indiferencia financiera de los resultados respecto al susodicho momento de referencia.

En el caso de una ETTI continua, lo tradicional es analizar dos casos: un desplazamiento de la ETTI o un cambio de pendiente de la misma. Con estos dos casos, más o menos, se recogen todos los posibles en cuanto que éstos se pueden explicar como composición de los dos primeros. Actualmente también se estudia lo que se denomina la "chepa" o curvatura de la ETTI, que recoge cambios en su forma.

El caso de un desplazamiento paralelo de la ETTI se modeliza añadiendo una constante:

$$\rho(plazo)=\int_0^{plazo}\left[\rho(\tau)+a\right]\cdot d\tau\,.$$

Se supone que los capitales son continuos como generalización, aunque es similar para capitales discretos, con la única variación de que la primera integral sería un sumatorio.

Un desplazamiento de la ETTI afecta al cálculo del PFM de la OFI como una variación del input y output globales a los que se reduce toda OFI cierta.

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \rho(\tau)} = 0; \quad \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \rho(\tau)} = -\frac{\overline{\rho}}{PFM} \cdot \frac{\partial PFM}{\partial \rho(\tau)}; \quad \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho(\tau)} = -1 + \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \rho(\tau)}$$

$$\frac{\partial PFM}{\partial \rho(\tau)} = \frac{\partial \mathbf{T'}}{\partial \rho(\tau)} - \frac{\partial \mathbf{T'}}{\partial \rho(\tau)} = \frac{1}{\rho(\theta')\cdot \mathbf{C'}} \cdot \int_0^{Max\{T'\}} c(T')\cdot e^{-(\mathbf{T}-T')\cdot \int_0^{plazo'} \rho(\tau')\cdot d\tau'} \cdot \left[e^{-a\cdot(\mathbf{T}-T')^2} - 1 \right] \cdot dT' +$$

$$- \frac{1}{\rho(\theta)\cdot \mathbf{C}} \cdot \int_0^{Max\{T\}} c(T)\cdot e^{-(\mathbf{T}-T)\cdot \int_0^{plazo} \rho(\tau)\cdot d\tau} \cdot \left[e^{-a\cdot(\mathbf{T}-T)^2} - 1 \right] \cdot dT$$

Un cambio de pendiente puede ser descrito a través de la multiplicación de la ETTI por un escalar b, siendo el efecto sobre el PFM:

$$\frac{\partial PFM}{\partial \rho(\tau)} = \frac{\partial \mathbf{T'}}{\partial \rho(\tau)} - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \rho(\tau)} = \left(e^{-b} - 1\right) \cdot \left[\frac{1}{\rho(\theta')} - \frac{1}{\rho(\theta)} \right]$$

Un caso particular de estudio es cuando se invierte la pendiente de la ETTI porque es el que mayores riesgos comporta y más que su inclinación. Ello se modelizaría cambiando de signo la pendiente de la ETTI, es decir, multiplicándola por menos uno y sumando el máximo de los diferimientos del input y del output. Generalizando el cambio de pendiente a un cambio no totalmente inverso, pero sí de crecimiento a decrecimiento o viceversa, sería el cambio de la ETTI $\rho(plazo) = \int_0^{plazo} [a - b\cdot\rho(\tau)]\cdot d\tau$, que es una agregación de los dos casos anteriores.

El caso del cambio de la "chepa" o curvatura de la ETTI se podría introducir con un cambio de pendiente, pero únicamente para ciertos plazos, los intermedios. De esta manera, si la integral que define la derivada del PFM respecto del precio estricto de interés se divide en una serie de sumandos, los sumandos intermedios recogerían la curvatura de la ETTI.

De este modo, la suma de todos esos efectos se podría considerar como una buena aproximación a la variación de las magnitudes de una OFI ante un cambio de precio estricto del tipo de interés en un ambiente financiero dinámico.

Se ha supuesto una misma estructura de tipos de interés para el input y el output, aunque hay autores que defienden el uso de diferentes costes del capital según su naturaleza: activo y pasivo y su disponibilidad: corto o largo plazo, exigible o no, ya que el coste que tiene para la empresa o para el inversor es diferente. Pero dado que se está estudiando una OFI abstracta, cuyos capitales no responden a diferentes operaciones financieras y económicas, sino que son todas monetarias y, por tanto, homogéneas, es asumible el supuesto de una ETTI igual para inputs y outputs.

2.2 **Dependencia temporal del momento de valoración**:

Se analiza los efectos sobre la descripción de una OFI según se evalúe desde uno u otro momento con diferente información y expectativas.

El cambio del momento de valoración puede cambiar la definición de los diferimientos, lo cual es significativo en regímenes financieros no escindibles como ya se ha visto. También pueden cambiar las cuantías esperadas en el futuro por variación de las previsiones, lo que ya se explicó en la dependencia temporal de las cuantías. El último efecto sobre la OFI de esta dependencia del inicio o del momento de valoración se encuentra en la variación del tipo de interés, lo cual se sintetiza en el estudio de la evolución de la ETTI o su dinámica[8].

Los estudios evolutivos de la ETTI suponen la dependencia del inicio, en tanto que la misma cambia a lo largo del tiempo. La evolución de la ETTI se suele representar por

[8] Vid. Galisteo Rodríguez, M. (2000).

ecuaciones diferenciales estocásticas de variación de los tipos de interés al contado o *spot*, aunque también es posible trabajar con tipos a futuro o *forward*. Generalmente se trabaja con movimientos brownianos o procesos de Ornstein-Uhlenbeck: $dI_t = \beta(I,t) \cdot dt + \sigma(I,t) \cdot dW_t$ y $dI_t = \beta \cdot (\mu - I_t) \cdot dt + \sigma \cdot I_t^{\gamma} \cdot dW_t$. La parte estocástica de la evolución de la ETTI, $W_t \sim N(0,t)$, recoge la incertidumbre sobre los cambios futuros.

En las dependencias temporales analizadas se ha supuesto el caso cierto, pero la metodología presentada es aplicable, como se expresó en la introducción, al caso de incertidumbre.

El cambio del momento de valoración puede llevar a cambios en el tipo de interés y los plazos. Respecto al tipo de interés ya se ha analizado su dependencia temporal, por lo que conocida basta conocer su variación respecto al inicio:

$$\text{Si} \quad di_t = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW_t \Rightarrow \rho(\tau) = \rho^0 + \frac{2 \cdot \mu \cdot (1+i_t) - \sigma^2}{2 \cdot (1+i_t)^2} \cdot t + \frac{\sigma}{1+i_t} \cdot W_t; \quad W_t \sim N(0,t)$$

$$\text{Si} \quad di_t = \mu \cdot I_t \cdot dt + \sigma \cdot i_t \cdot dW_t \Rightarrow \rho(\tau) = \rho^0 + \frac{2 \cdot \mu \cdot i_t \cdot (1+i_t) - \sigma^2 \cdot i_t^{\,2}}{2 \cdot (1+i_t)^2} \cdot t + \frac{\sigma \cdot i_t}{1+i_t} \cdot W_t$$

$$dPFM = \frac{\partial PFM}{\partial \rho(\tau)} \cdot d\rho(\tau) = \frac{\partial PFM}{\partial \rho(\tau)} \cdot \left[\frac{2 \cdot \mu \cdot i_t \cdot (1+i_t) - \sigma^2 \cdot i_t^2}{2 \cdot (1+i_t)^2} \cdot dt + \frac{\sigma \cdot i_t}{1+i_t} \cdot dW_t \right]$$

Se observa la complicación de la interpretación de las variaciones, que tiene una parte determinista que indica la tendencia de evolución temporal y una parte estocástica, que muestra la importancia de las desviaciones respecto a la tendencia.

2.3 **Dependencia temporal del horizonte temporal**:

Se analiza los efectos sobre la descripción de una OFI cuando varía el plazo o período de análisis: corto o largo plazo.

Ante un incremento del plazo que aumente el número de capitales financieros el PFM se verá afectado de la siguiente forma:

$$\mathrm{PFM}=\frac{1}{\rho}\cdot\left[\ln\left(\frac{\mathbf{C}'+\sum\limits_{\text{nuevos}}C_i'}{\mathbf{C}+\sum\limits_{\text{nuevos}}C_i}\right)-\ln\left(\frac{V'+\sum\limits_{\text{nuevos}}C_i'\,e^{-\rho\cdot t_i'}}{V+\sum\limits_{\text{nuevos}}C_i\cdot e^{-\rho\cdot t_i}}\right)\right]$$

$$\Delta\mathrm{PFM}=\frac{1}{\rho}\cdot\left[\ln\left(\frac{\%\Delta\mathbf{C}'}{\%\Delta V'}\right)-\ln\left(\frac{\%\Delta\mathbf{C}}{\%\Delta V}\right)\right]$$

La variación del PFM depende de los porcentajes de variación de las cuantías acumuladas y de su valor actual. En caso de reducción del horizonte temporal de análisis la variación en el PFM sería análoga, pero de signo contrario.

Por otro lado, el cambio del plazo puede cambiar el régimen financiero a aplicar. Legalmente a corto plazo se utiliza el régimen de interés simple (hasta 376 días) y a largo plazo se utiliza el régimen de interés compuesto. La relación con el precio estricto es:

$$\rho=\ln(1+i)\quad \text{en interés compuesto}\quad \frac{\partial\rho}{\partial i}=\frac{1}{1+i}\quad \text{y}$$

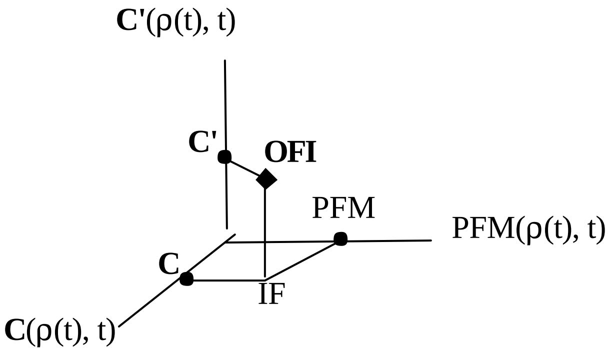
$$\rho=\ln(1+i\cdot t)\big/t\quad \text{en interés simple}\quad \frac{\partial\rho}{\partial I}=\frac{1}{1+i\cdot t}$$

En este caso variaciones de las tres variables afectan igual en ambos casos, pero teniendo en cuenta que a igualdad de tipo de interés i, el precio estricto es diferente.

Un resumen de las cuatro dependencias temporales de una OFI defendidas en la comunicación se presenta en el siguiente cuadro:

VARIABLES OFI	VARIACIÓN EN EL TIEMPO	VARIACIÓN POR EL TIEMPO
CUANTÍA	Previsiones cuantías / rentas	Ubicación cuantías
	DEPENDENCIA TEMPORAL DE LA CUANTÍA	
TIPO DE INTERÉS	Estructura Temporal de Tipos de Interés	Evolución ETTI
	DEPENDENCIA TEMPORAL DEL TIPO DE INTERÉS	DEPENDENCIA TEMPORAL DEL MOMENTO DE VALORACIÓN
DIFERIMIENTO	Distintos plazos según el momento de valoración	Corto o largo plazo y regímenes financieros
	DEPENDENCIA TEMPORAL DEL MOMENTO DE VALORACIÓN	DEPENDENCIA TEMPORAL DEL HORIZONTE TEMPORAL

En resumen, las variables que definen una OFI son tres: la cuantía, el tipo de interés y el diferimiento, a partir del cual se conocen el plazo de la OF y la ubicación de los capitales financieros. Estas variables dependen del tiempo (t) y se pueden esquematizar en las magnitudes de output agregado **C'**, input agregado **C** y plazo financiero medio PFM calculados para una ETTI $\rho(\tau)$.



3. CONCLUSIONES.

Una Operación Financiera de Inversión (OFI) requiere de un análisis dinámico para comprenderla porque el tiempo influye en la misma tanto por el desarrollo de toda OFI en el tiempo como por su variabilidad en el mismo. Una OFI se define a partir de tres variables: cuantía, tipo de interés y diferimiento, las cuales pueden variar con el paso del tiempo su valor y por otro lado, las magnitudes que describen la OFI tampoco son indiferentes a cambios de ubicación temporal de los valores de las variables.

Cada cambio de valor o de posición de las mencionadas variables da lugar a una OFI distinta en el sentido de que su descripción en términos de rentabilidad y de plazo promedio (PFM) cambia. Dicho cambio está en función del tiempo y analizando estas dependencias temporales se divide el análisis dinámico de una OFI en cuatro tipos: la de la cuantía, la del tipo de interés, la del momento de valoración y la del horizonte temporal.

Los resultados obtenidos estudiando las cuatro dependencias temporales para una OFI definida desde el modelo del Dr. A. Rodríguez son relativos a unos cambios de valor o de posición mínimos, porque cuando la OFI sea caótica por la disposición de sus capitales financieros o porque las variaciones que se estudien sean amplias, las derivadas deducidas dejan de ser representativas. Pero en todo caso las mismas indican las variables que influyen en dichos cambios.

5. BIBLIOGRAFÍA.

- Ceballos Hornero, D. 2001. "An Approach to Financial Time" en Proceedings 4th Italian-Spanish Conference on Financial Mathematics. Alghero, pp. 112-126.
- Galisteo Rodríguez, M. 2000. Dinámica de la Estructura Temporal de Tipos de Interés: un modelo de tres factores. Tesis doctoral UB. Barcelona.
- Nieto de Alba, U. 1998. Historia del Tiempo en Economía. Madrid. McGraw-Hill.
- Ramírez Sarrió, D. 1994. "A Valuation of Uncertainty in Approximate Knowledge" en Proceedings Inter. AMSE Symposium, Lyon, pp. 117-120.
- Rodríguez Rodríguez, A. 1994. Matemáticas de las Operaciones Financieras (MOF). Barcelona.
- Rodríguez Rodríguez, A. 1997. Matemática de la Inversión. Barcelona.