Time dependence on Financial Operations of Investment

David Ceballos Hornero
Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial.
Universitat de Barcelona
ceballos@eco.ub.es

Dynamic analysis of a Financial Operation of Investment (OFI) consists in studying Time dependence on variables that define the OFI: quantities (inputs and outputs), terms and interest rate. In spite of the study of an OFI can be objective or subjective, its dynamic analysis can be systematised by means of a map that shows dependence with regards to Time of an OFI. With this end in view, we will consider four ways of Time dependence: in relation to quantities (values and locations), to interest rate (financial environment), to moment of valuation (evolution Term Structure of Interest Rate and terms), and to temporal horizon (period of analysis, financial regimes).

KEYWORDS: Financial Operation of Investment (OFI), Time, Uncertainty.

0. INTRODUCCIÓN.

Los problemas que interesan en Teoría de Finanzas se pueden resumir en tres: modelización y predicción del comportamiento de los precios de los activos financieros, valoración de activos financieros y la selección de carteras (toma de decisiones financieras). El estudio de una Operación Financiera de Inversión (OFI) se engloba dentro de la valoración de activos financieros, pues éste se concreta en estimar y calcular toda una serie de indicadores de su rentabilidad o viabilidad financiera y/o de su valor para un inversor con recursos excedentarios.

Una OFI se define de forma tradicional y operativa como un conjunto de flujos monetarios (capitales financieros) futuros (pagos y cobros) dispuestos en diferentes momentos del tiempo. Estos flujos monetarios son *a priori* inciertos en tanto que son generalmente estimaciones, más o menos objetivas, y que al compararlos financieramente tienden a mostrar un desequilibrio a favor de los cobros (OFI rentable) o de los pagos (OFI no rentable). La comparación financiera consiste en la homogeneización temporal de los diferentes flujos a través de una Estructura Temporal de Tipos de Interés.

En el párrafo anterior se pone de manifiesto la relevancia del tiempo en las OFI, al ser una variable que afecta tanto a su definición como a su operativa. Ello obliga a que todo análisis de una OFI haya de ser dinámico, es decir, deba considerarse el tiempo como una variable relevante. Se podría afirmar que el tiempo diferencia la matemática financiera de la general, donde los números son homogéneos temporalmente.

El tiempo aparece en el estudio de una OFI de dos formas posibles.

(i) Como instante: inicio, final, momentos intermedios donde se sitúan los flujos o capitales financieros que la caracterizan y el momento de valoración o donde se homogeneizan todos los capitales financieros.

(ii) Como intervalo: diferimiento de los distintos capitales (separación temporal de cada capital con el origen de la operación), plazo de la operación y otras medidas temporales como el Plazo Financiero Medio y la función Duratio.

El estudio de una OFI se realiza a través de tres variables: cuantía, tipo de interés y diferimiento. Las mismas se ven afectadas en el tiempo: el paso del tiempo permite su variación; y por el tiempo: no son indiferentes, financieramente hablando, al momento o instante en que se sitúan.

El análisis de estas posibilidades temporales en las tres variables que definen una OFI es lo que el autor agrupa en el análisis dinámico de una OFI, a saber, el estudio de sus *dependencias temporales*.

Dicho análisis dinámico está parcelado, ya que el mismo está diversificado en diferentes apartados como el estudio de rentas financieras, el cálculo del plazo de retorno, el cálculo de la Duratio, el cálculo del Plazo Financiero Medio, el estudio de la Estructura Temporal de Tipos de Interés (ETTI) y de su evolución, la comparación de OFI con diferente plazo, etc. Lo que se propone en la presente comunicación es reunir bajo un mismo epígrafe todo este análisis y clasificarlo según las tres variables que definen una OFI, lo que se denomina *análisis dinámico* de una OFI. Como se ha comentado este análisis puede plantearse desde el paso del tiempo y desde el cambio de situación. El autor deriva así cuatro dependencias temporales: de la cuantía, del tipo de interés, del momento de valoración y del horizonte temporal. Las dos últimas dependencias surgen al dividir el análisis respecto el tiempo en su doble naturaleza de instante y de intervalo.

En este trabajo se partirá de la terminología y el modelo del Dr. A. Rodríguez (1994), presentando inicialmente la definición y descripción de una OFI a partir de sus variables y magnitudes más significativas. Luego se desarrollará el apartado de las dependencias temporales a nivel teórico, tanto para una modelización objetiva como subjetiva. Se terminará con una discusión sobre las posibles definiciones de tiempo que se pueden utilizar en el análisis dinámico presentado.

1. LA OPERACIÓN FINANCIERA DE INVERSIÓN.

Una Operación Financiera (OF)[1] es un ente matemático complejo y binario cuyas componentes, denominadas miembros de la operación, son subconjuntos o partes del conjunto financiero universal U, comprensivo de todos los elementos financieros primarios, sean capitales (discreto) o flujos (continuo), ciertos o inciertos. Formalmente, (M, N), $\forall M, N \subset U$.

Ante una relación[2] de equivalencia financiera, en una OF o bien ambos miembros son equivalentes $M \sim N$, o bien no lo son M n N. En el primer caso se habla de una

[1] Vid. Rodríguez Rodríguez, A. (1997), pág. 1.
[2] Jurídica a efectos prácticos.

Operación Financiera de Financiación (OFF) y en el segundo de una Operación Financiera de Inversión (OFI).

El estudio “científico” o formal de una OFI se puede realizar de forma objetiva, es decir, mediante una base matemática, o de forma subjetiva o de experiencia, a saber, aplicación de reglas de experiencia y de inferencia y las costumbres.

Si todos los elementos pertenecientes a M y N son ciertos la OF es cierta, en otro caso es incierta, correspondiendo la incertidumbre al conocimiento probable, vago, inexacto o aproximado[3]. Estos tipos de incertidumbre epistémica son ex-ante en una OFI al interesar su rentabilidad y desarrollo futuros y no la evaluación de una OF pasada que no aporte beneficio alguno.

Si en M y N no participan flujos financieros la OF es discreta, siendo en otro caso continua. Si ambos miembros de la OF, M y N, son conjuntos unitarios, la OF es elemental, siendo compleja en otro caso (existencia de más de un período de análisis). Las OF complejas las podemos dividir en complicadas y caóticas. En el primer caso cuando el mayor número de capitales financieros sólo aporta mayores cálculos, donde los errores de precisión son despreciables. En el segundo caso, pequeños errores en los cálculos pueden llevar a resultados totalmente dispares.

De esta manera, una primera clasificación de las OFI[4] según su modelización es:

[3] Vid. Ramírez Sarrió, D. (1994).
[4] Se parte del esquema de Rodríguez Rodríguez, A. (1994), pág. 2.

1. OBJETIVA
   - CIERTA
     - discreta
       - elemental
       - compleja
         - complicada
         - caótica
     - continua
       - complicada
       - caótica
   - INCIERTA
     - probable
     - borrosa
     - inexacta
     - aproximada
2. SUBJETIVA o DE EXPERIENCIA

Desde la Matemática Financiera se prima un estudio matemático de las OFI y, por tanto, una modelización objetiva de las mismas con independencia de quién las lleve a cabo y del contexto.

La descripción de una OFI se realiza a partir de los capitales financieros que la componen, M y N, y del precio estricto del tipo de interés de valoración, ρ. Un capital financiero no es más que el par matemático compuesto por la cuantía monetaria del capital (C_i) y, por otra parte, del diferimiento (T_i). Los capitales financieros en una OFI se clasifican según supongan una aportación para el inversor, input, o un ingreso o cobro, output, haciéndose el neto o compensación de los mismos para cada instante. El tipo de interés de valoración que se considera es el precio estricto del dinero ρ, a saber, $\rho = \ln(1+I)$. El tipo de interés anual, I, mide el valor temporal del dinero, el cual es positivo por el principio de la preferencia por la liquidez[5], supuesto de partida en el modelo del Dr. A. Rodríguez (1994).

A la hora de analizar una OFI se sintetiza la información aportada por los capitales financieros que la constituyen mediante su reducción financiera, es decir, su reducción a una OFI elemental donde los inputs netos se sintetizan en el capital financiero de su suma financiera: de cuantía la suma aritmética de las cuantías de los inputs netos (**C**) y de

[5] Si (C, T) ~ (C', T'), entonces signo {C' – C} = signo {T' - T}. O ante la igualdad de cuantías se prefiere el capital financiero más próximo en el tiempo.

diferimiento el Diferimiento Medio (DM) de los inputs (**T**). Con los outputs se realiza la misma reducción resultando (**C'**, **T'**) como suma financiera, de tal modo que: (**C**, **T**) ∩(**C'**, **T'**) para ρ.

El DM es el diferimiento que cumple la equivalencia: $\left(\sum C_i, DM\right) \sim \{(C_i, T_i)\}_{i=1,..n}$, que para una OFI cierta, discreta y compleja en un ambiente financiero definido por una ley estacionaria es en el caso de los inputs: $\mathbf{T} = \frac{\ln\left(\mathbf{C}/V_0\right)}{\rho}$, donde **C** es la suma de inputs y V_0 su valor actual.

El PFM de una OFI se define como la diferencia entre el DM de los outputs menos el DM de los inputs: PFM = **T' – T**.

Una importante magnitud descriptiva de una OFI es la Inmovilización Financiera (IF), que no es más que el par compuesto por el input neto agregado **C** y por el PFM de la OFI. Este par matemático (**C**, PFM) indica la cuantía “inmovilizada” por el inversor por las aportaciones que tendrá que hacer y el tiempo “promedio” de dicha inmovilización (PFM). El Coste financiero de la inversión se calcularía a partir de los intereses generados por la inmovilización financiera anterior:

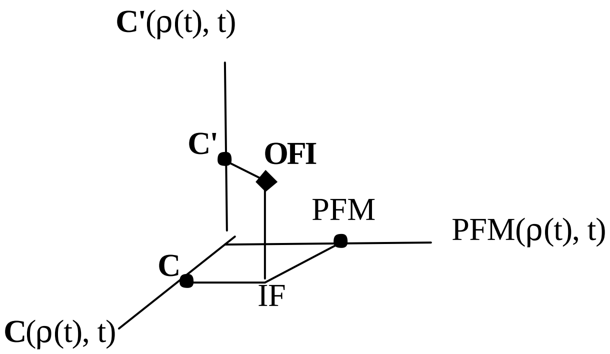
$$CF = \mathbf{C} \cdot f(\mathbf{T}, \mathbf{T'}) - \mathbf{C}\,.$$

Aunque para el cálculo de la rentabilidad de la OFI se tendría también en cuenta el output neto agregado **C'**, definiéndose las tasas de rentabilidad, sobre la inmovilización, estricta efectiva bruta y neta como:

$$\bar{\rho} = \frac{\ln\left(\mathbf{C'}/\mathbf{C}\right)}{PFM} \text{ (bruta) y } \hat{\rho} = \frac{\ln\left(\mathbf{C'}/\mathbf{C''}\right)}{PFM} = \frac{\ln\left(\frac{\mathbf{C'}}{\mathbf{C}\cdot e^{\rho\cdot PFM}}\right)}{PFM} \text{ (neta),}$$

que muestran las tasas de rentabilidad instantánea periodificada a la unidad temporal de cálculo del PFM, sin deducción $(\bar{\rho})$ o deduciendo $(\hat{\rho})$ los costes financieros del beneficio.

Por tanto, se puede terminar este apartado señalando que las variables que definen una OFI son únicamente tres: la cuantía (inputs y outputs), el tipo de interés (ρ) y el diferimiento, a partir del cual se conocen el plazo de la OF y la ubicación de los capitales financieros. Estas tres variables dependen del tiempo (t) y se pueden esquematizar en las magnitudes de output agregado **C'**, input agregado **C** y plazo financiero medio PFM calculados a un tipo de interés ρ, de manera que ante la coincidencia de esta tripleta de valores las OFI serían consideradas semejantes o indiferentes desde la Matemática Financiera.



2. LAS DEPENDENCIAS TEMPORALES DE UNA OFI.

A partir de la sistematización de las OFI en el modelo del Dr. A. Rodríguez, de su definición, clasificación y descripción, se puede plantear el estudio de sus dependencias temporales, esto es, de cómo se ve afectada en y por el tiempo al cambiar las distintas variables que intervienen en una OFI: cuantías, tipo de interés y diferimientos.

Partiendo de una OFI compleja y de su reducción financiera, (**C**, **T**) n (**C'**, **T'**) para ρ. A partir de aquí se puede analizar cómo se ve afectada una OFI por la variabilidad de sus componentes en y por el tiempo, lo cual se desarrollará clasificando los posibles efectos del paso del tiempo y las variaciones de ubicación temporal en cuatro tipos, cada uno de los cuales se ha denominado *dependencia temporal* por la influencia del tiempo en los cambios en la descripción de la OFI. Estas dependencias temporales se analizarán desde el estudio de la variación en las magnitudes del rendimiento absoluto bruto, $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{C}' - \mathbf{C}$, de las tasas estrictas nominal bruta de rentabilidad sobre la inmovilización, $\bar{\rho} = \frac{\ln\left(\mathbf{C}'/\mathbf{C}\right)}{\text{PFM}}$, y neta, $\hat{\rho} = \frac{\ln\left(\mathbf{C}'/\mathbf{C}''\right)}{\text{PFM}}$, y del PFM, $\text{PFM} = \frac{1}{\rho} \cdot \left[\ln\left(\mathbf{C}'/\mathbf{C}\right) - \ln\left(\text{V}'/\text{V}\right)\right]$. La justificación es que se considera que estas cuatro magnitudes ofrecen una descripción de la OFI bastante completa.

El estudio objetivo de las dependencias temporales de una OFI se realizará principalmente a través de la magnitud del Plazo Financiero Medio, para cuyo cálculo intervienen las tres variables que definen una OFI: cuantías (C_i y C_i’), tipo de interés (ρ) y diferimientos (T_i y T_i’).

El estudio subjetivo o de experiencia se realizará principalmente a través de un caso particular para dejar patente la especificidad de esta perspectiva para cada caso de estudio, al no plantear una metodología abstracta general.

2.1 Estudio objetivo.

La modelización objetiva de una OFI no es más que el modelo del Dr. A. Rodríguez, por lo que el análisis dinámico se centrará en presentar la variabilidad de las cuatro magnitudes financieras que se consideran representativas de la descripción de la OFI según varían en valor o localización las tres variables que la definen. El estudio de los resultados que se obtengan no es más que las dependencias temporales de una OFI.

A. **Dependencia temporal de la cuantía**:

- Cómo varían las magnitudes de una OFI cuando varía el valor de los inputs y outputs que la definen.

El valor de las cuantías puede variar, por ejemplo, por el paso del tiempo por cambios en las expectativas o estimaciones de las mismas.

El cambio en la cuantía del capital equivalente $C'_{T'}$ o C_T afecta únicamente a la diferencia entre los diferimientos de los capitales financieros equivalentes, que se puede considerar como análogo al efecto sobre el PFM de una reducción en los capitales equivalentes. No tiene sentido en las tasas de rentabilidad definidas porque se calculan las mismas a partir de las sumas financieras de input y output.

$$\frac{\partial(T'-T)}{\partial C'_{T'}}+\frac{\partial(T'-T)}{\partial C_T}=\frac{1}{\rho\cdot C'_{T'}}-\frac{1}{\rho\cdot C_T}>0 \text{ si } C'_{T'}<C_T.$$

Se observa que ante aumentos del capital financiero equivalente de los outputs se incrementa su diferimiento y la diferencia entre los diferimientos aumentará cuando se incremente el capital financiero equivalente de los outputs y disminuya el de los inputs o en caso de aumentar ambos cuando el segundo capital sea superior al primero.

Si se supone que el capital financiero equivalente tanto al input como al output es siempre su suma financiera, se diferencia entre las variaciones de los outputs y de los inputs, puesto que las magnitudes consideradas son funciones separables en dichas variables, debido a que en cada instante hay un input o un output, al suponer la compensación de capitales en cada momento el modelo del Dr. A. Rodríguez.

$$\frac{\partial PFM}{\partial C_i}=\frac{\partial\left[\frac{1}{\rho}\cdot\left(\ln\frac{\sum_i C_i'}{\sum_i C_i}-\ln\frac{\sum_i C_i'\cdot e^{-\rho\cdot T_i'}}{\sum_i C_i\cdot e^{-\rho\cdot T_i}}\right)\right]}{\partial C_i}=\frac{1}{\rho}\cdot\left(-\frac{1}{\mathbf{C}}+\frac{e^{-\rho\cdot T_i}}{V}\right)=\begin{cases}<0 & \text{si } T_i>\mathbf{T}\\ =0 & \text{si } T_i=\mathbf{T}\\ >0 & \text{si } T_i<\mathbf{T}\end{cases}$$

$$\frac{\partial PFM}{\partial C_i'} = \frac{\partial\left[\frac{1}{\rho}\cdot\left(\ln\frac{\sum_i C_i'}{\sum_i C_i} - \ln\frac{\sum_i C_i' \cdot e^{-\rho\cdot T_i'}}{\sum_i C_i \cdot e^{-\rho\cdot T_i}}\right)\right]}{\partial C_i'} = \frac{1}{\rho}\cdot\left(\frac{1}{\mathbf{C'}} - \frac{e^{-\rho\cdot T_i'}}{V'}\right) = \begin{cases} <0 & \text{si } T_i' < \mathbf{T'} \\ =0 & \text{si } T_i' = \mathbf{T'} \\ >0 & \text{si } T_i' > \mathbf{T'} \end{cases}$$

$$\frac{\partial PFM}{\partial C_i'} + \frac{\partial PFM}{\partial C_i} > 0 \Rightarrow \quad V'\cdot\left[e^{-\rho\cdot T_i} - V/\mathbf{C}\right] > V\cdot\left[e^{-\rho\cdot T_i'} - V'/\mathbf{C'}\right]$$

Es decir, el PFM de la OFI aumentará cuando las cuantías que se incrementen en el caso de los inputs estén situadas antes del DM de los inputs y en el caso de los outputs cuando el incremento se dé con posterioridad a su DM. Si ambas variaciones están en orden opuesto respecto al correspondiente DM, ante un aumento de las cuantías el PFM disminuirá. Finalmente, si sólo uno de ellos está en orden opuesto dependerá de los valores actuales, de manera que en OFI rentables (V’ > V) cuenta más la variación del input que la del output ante una misma desviación absoluta respecto a sus correspondientes DM.

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{R}}}{\partial C_i'} + \frac{\partial \overline{\mathbf{R}}}{\partial C_i} > 0 \quad \text{si} \quad \Delta C_i' > \Delta C_i$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial C_i'} + \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial C_i} > 0 \quad \text{si} \quad \frac{1}{\mathbf{C'}} - \frac{1}{\mathbf{C}} < \overline{\rho}\cdot\left(\frac{\partial PFM}{\partial C_i'} + \frac{\partial PFM}{\partial C_i}\right) < 0 \quad \text{en OFI rentables.}$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial C_i'} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial C_i} > 0 \quad \text{si} \quad \frac{1}{\mathbf{C'}} - \frac{e^{-\rho\cdot T_i}}{V} < \hat{\rho}\cdot\left(\frac{\partial PFM}{\partial C_i'} + \frac{\partial PFM}{\partial C_i}\right) < 0 \quad \text{en OFI rentables.}$$

La variación en el valor de las cuantías afecta de una forma compleja a las magnitudes de rentabilidad. En OFI rentables la medida de dicha variabilidad viene, sobre todo, dada por el efecto sobre el PFM.

- Cómo varían las magnitudes de una OFI según cambia la ubicación temporal de las cuantías. Es decir, se considera una variación en la localización de las cuantías.

La variación de la ubicación de las cuantías o su variación por el tiempo, de nuevo se puede justificar por cambios en las expectativas, estimaciones, etc.

El cambio de la localización (t_j) provoca una variación de los diferimientos en la misma cuantía: $\frac{\partial T_j}{\partial t_j} = 1$.

Puesto que $\frac{\partial \overline{\mathbf{R}}}{\partial T_j} = 0$, el rendimiento absoluto bruto no se ve afectado por la ubicación temporal de las cuantías.

$$\frac{\partial PFM}{\partial T_i'} + \frac{\partial PFM}{\partial T_i} < 0 \quad \text{si} \quad \text{con distinto signo} \quad |T_i' - T_i| < \left| \frac{1}{\rho} \cdot \left[\ln\left(V'/_V \right) - \ln\left(C_i'/_{C_i} \right) \right] \right|$$

Siempre y cuando las diferencias entre las cuantías que varían del input y del output no sean muy dispares y en OFI rentables, el PFM se incrementará cuando el output que varía es posterior al input que varía.

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial T_i'} + \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial T_i} > 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial PFM}{\partial T_i'} + \frac{\partial PFM}{\partial T_i} > 0 \quad \text{en OFI rentables.}$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial T_i'} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial T_i} > 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial PFM}{\partial T_i'} + \frac{\partial PFM}{\partial T_i} > 0 \quad \text{en OFI rentables y no degeneradas.}$$

De nuevo la variabilidad de las tasas de rentabilidad estrictas nominales viene marcada por la variabilidad del PFM.

B. **Dependencia temporal del tipo de interés**:

- Cómo varía la valoración de una OFI según cambia el tipo de interés en función del plazo considerado o de la naturaleza de la operación financiera que se realiza (actualización o capitalización).

Existen diferentes ambientes financieros dependiendo de la Estructura Temporal de Tipos de interés existente, es decir, de los tipos de interés para cada plazo. Si éste es único estamos ante un ambiente financiero simple. Este es el caso hasta ahora analizado en ambiente de certeza. En expresión:

$$\frac{\partial \mathrm{PFM}}{\partial \rho} = -\frac{\ln\left(\frac{\mathbf{C'}}{\mathbf{C}}\right) - \ln\left(\frac{V'}{V}\right)}{\rho^2} + \frac{\frac{\sum_i C_i' \cdot t_i' \cdot e^{-\rho \cdot T_i'}}{V'} - \frac{\sum_i C_i \cdot t_i \cdot e^{-\rho \cdot T_i}}{V}}{\rho} = \frac{\mathrm{DUR} - \mathrm{PFM}}{\rho}$$

Es decir, una variación al alza del tipo de interés incrementará el PFM de una OFI cuando su Duratio, la duración de la operación en términos de un título cupón cero, es superior al PFM, la duración de la operación en términos de sus sumas financieras equivalentes de input y output. Es decir, el PFM como función del tipo de interés es creciente cuando la Duratio es superior al PFM para el tipo de interés escogido, excepto si el tipo de interés estricto es negativo, resultando en este caso la situación opuesta.

Respecto a la rentabilidad:

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \rho} = 0$$

$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \rho} = -\frac{\ln\left(\frac{\mathbf{C'}}{\mathbf{C}}\right) \cdot \frac{\mathrm{DUR} - \mathrm{PFM}}{\rho}}{\mathrm{PFM}^2} < 0$ si la OFI es rentable y signo{DUR-PFM} es igual al signo$\{\rho\}$. $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho} = -\left(1 + \frac{\overline{\rho}}{\mathrm{PFM}} \cdot \frac{\mathrm{DUR} - \mathrm{PFM}}{\rho \cdot \mathrm{PFM}^2}\right) = -\left(1 - \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \rho}\right)$, ya que $\frac{\partial \rho}{\partial \rho} = 1 = \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \rho} - \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho}$.

El rendimiento absoluto bruto no depende del tipo de interés y por eso no se ve afectado por la forma y cambios de la ETTI. En las tasas estrictas nominales, el signo de la derivada depende de varios factores como el signo{DUR-PFM}, si la OFI es o no degenerada, el signo$\{\rho\}$ y si es rentable o no.

El ambiente financiero cambia cuando el tipo de interés es diferente para cada plazo: ambiente financiero compuesto. En este caso hay que distinguir cuando la Estructura Temporal de Tipos de Interés es escindible (continuo por interpolación) de cuando no lo es. También el ambiente financiero se puede diferenciar según operaciones de actualización (descuento) y de capitalización (interés): ambiente financiero completo. Finalmente, está el ambiente financiero continuo, cuando el tipo de interés varía de forma continua según el plazo.

Partiendo de las igualdades básicas de la reducción financiera:

$\sum_{i} C_i' e^{plazo_i' \cdot \rho(plazo')} = \mathbf{C'}$ y $\sum_{i} C_i \cdot e^{plazo_i \cdot \rho(plazo)} = \mathbf{C}$, siendo $plazo_i' = \mathbf{T'} - T_i'$, $plazo_i = \mathbf{T} - T_i$ y $PFM = \mathbf{T'} - \mathbf{T}$.

La ETTI muestra los tipos de interés para cada plazo, definido este último a partir de la distancia temporal de cada diferimiento con el DM correspondiente, ya que los DM son la base de la reducción financiera. Si el ambiente financiero es compuesto no escindible, entonces se tienen los siguientes casos:

- Si la variación del tipo de interés no afecta al escalón de la ETTI aplicado a cada capital financiero, entonces las derivadas coinciden con las del ambiente financiero simple. Si para alguno de los capitales cambia la ley financiera, habrá que añadir los correspondientes efectos en el cambio del cálculo del PFM:

$$\sum_{i} C_i' e^{plazo_i' \cdot \rho(plazo')} + C_i' e^{plazo_i' \cdot \rho(plazo_i')} \cdot \left[e^{plazo_i' \cdot \Delta\rho(plazo_i')} - 1\right] = \mathbf{C'} \quad y$$

$$\sum_{i} C_i' e^{plazo_i \cdot \rho(plazo_i)} + C_i' e^{plazo_i \cdot \rho(plazo_i)} \cdot \left[e^{plazo_i \cdot \Delta\rho(plazo_i)} - 1\right] = \mathbf{C}$$

El efecto es similar a una reducción del capital financiero equivalente. Como se comentó en la dependencia temporal de las cuantías, este efecto afecta al diferimiento asociado: $\frac{\partial T'}{\partial C'_{T'}} = \frac{1}{\rho \cdot C'_{T'}}$ y $\frac{\partial T}{\partial C_T} = \frac{1}{\rho \cdot C_T}$, es decir, que un cambio en el valor o forma del output e input globales varía los Diferimientos Medios correspondientes de una forma directamente proporcional a dicho cambio. Esto aplicado al caso analizado:

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \rho(\tau)} = 0; \quad \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \rho(\tau)} = -\frac{\overline{\rho}}{PFM} \cdot \frac{\partial PFM}{\partial \rho(\tau)}; \quad \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho(\tau)} = -1 + \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \rho(\tau)}$$

$$\frac{\partial PFM}{\partial\rho(\tau)}=\frac{\partial \mathbf{T'}}{\partial\rho(\tau)}-\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial\rho(\tau)}=\frac{D'-\mathbf{T'}}{\rho(\theta')}+\sum_i C_i'\cdot e^{plazo_i'\cdot\rho(plazo_i')}\cdot\left[e^{plazo_i'\cdot\Delta\rho(plazo_i')}-1\right]\cdot\frac{1}{\rho(\theta')\cdot\mathbf{C'}}+$$
$$-\left[\frac{D-\mathbf{T}}{\rho(\theta)}+\sum_i C_i\cdot e^{plazo_i\cdot\rho(plazo_i)}\cdot\left[e^{plazo_i\cdot\Delta\rho(plazo_i)}-1\right]\cdot\frac{1}{\rho(\theta)\cdot\mathbf{C}}\right],\quad \text{siendo:}$$

$$\rho(\theta')=\frac{\int_0^{\mathbf{T}}\rho(\tau')\cdot d\tau'}{\mathbf{T'}},\quad \rho(\theta)=\frac{\int_0^{\mathbf{T}}\rho(\tau)\cdot d\tau}{\mathbf{T}},\quad DUR=D'-D\quad y\quad PFM=\mathbf{T'}-\mathbf{T}$$

Nuevamente, una variación de la ETTI afecta a las magnitudes que describen una OFI principalmente a través del PFM.

- Otro caso es el de ambiente financiero completo, es decir, cuando se diferencia según el signo del plazo en operaciones de descuento (negativo) y de interés (positivo). En un régimen financiero de interés (I) y de descuento (d) compuesto, la relación entre los mismos es la siguiente: $I=\frac{d}{1-d}$. Su relación con el precio de interés estricto es: $\rho=\ln(1+I)=-\ln(1-d);\quad 0\le d\le 1$

En este caso, considerando separadamente las operaciones de descuento en el cálculo del PFM (capitales situados con posterioridad a **T’** o **T** dependiendo si son outputs o inputs) y las operaciones de interés, se tiene:

$$\frac{\partial\overline{R}}{\partial\rho(\tau)}=0;\quad \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\rho(\tau)}=-\frac{\overline{\rho}}{PFM}\cdot\frac{\partial PFM}{\partial\rho(\tau)};\quad \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\rho(\tau)}=-1+\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\rho(\tau)}$$

$$\frac{\partial PFM}{\partial\rho(\tau)}=\frac{D'-\mathbf{T'}}{\rho(\theta_c')}+\sum_i C_i'\cdot e^{plazo_i'\cdot\rho_{plazo_i'}}\cdot\left[e^{plazo_i'\cdot\Delta\rho_{plazo_i'}}-1\right]\cdot\frac{1}{\rho(\theta_c')\cdot\mathbf{C'}}+$$
$$-\left[\frac{D-\mathbf{T}}{\rho(\theta_c)}+\sum_i C_i\cdot e^{plazo_i\cdot\rho_{plazo_i}}\cdot\left[e^{plazo_i\cdot\Delta\rho_{plazo_i}}-1\right]\frac{1}{\rho(\theta_C)\cdot\mathbf{C}}\right]$$

$$\rho(\theta_c')=\frac{\int_{\mathbf{T}\le T_i'}\rho_d(\tau)\cdot d\tau+\int_{\mathbf{T}>T_i'}\rho_i(\tau)\cdot d\tau}{\mathbf{T'}}\quad y\quad \rho(\theta_c)=\frac{\int_{\mathbf{T}\le T_i}\rho_d(\tau)\cdot d\tau+\int_{\mathbf{T}>T_i}\rho_i(\tau)\cdot d\tau}{\mathbf{T}}$$

Esta situación se puede ver como un ambiente financiero compuesto, pero con un tipo de interés positivo para plazos positivos (capitalización) y negativo para plazos negativos (actualización). Como serán diferentes los tipos a aplicar, de nuevo hay que tener en cuenta que un cambio de los DM del input o del output que cambia el signo de los diferimientos, se analizaría como un ajuste de variación del capital financiero equivalente. De nuevo hay que tratar separadamente el input y el output a la hora de calcular los plazos.

También se puede ampliar al ambiente financiero compuesto y completo teniendo varios tipos de interés y varias tasas de descuento según la duración de los plazos y suponer en vez de capitales discretos unos continuos, aunque el caso habitual son capitales discretos con una mayor o menor frecuencia.

- En un ambiente financiero continuo el precio estricto del tipo de interés es una función continua del plazo. De aquí se deriva que el factor financiero es escindible y la indiferencia del momento respecto al cual se establecen los plazos porque los tipos implícitos entre plazos "obligan" a una indiferencia financiera de los resultados respecto al susodicho momento de referencia.

$$\rho(\text{plazo}) = \int_0^{\text{plazo}} \rho(\tau)\cdot d\tau; \quad \text{con} \quad f(T_j, T_l) = e^{(T_l - T_j)\cdot \int_0^{T_l - T_j} \rho(\tau)\cdot d\tau} = f(T_j, T_k)\cdot f(T_k, T_l) \quad \forall j, l, k .$$

En el caso de una ETTI continua, lo tradicional es analizar dos casos: un desplazamiento de la ETTI o un cambio de pendiente de la misma. La escindibilidad del factor financiero y la continuidad del tipo de interés provoca que variaciones individuales afecten a todo un intervalo para mantener la escinbilidad del factor financiero. Con estos dos casos, más o menos, se recogen todos los posibles en cuanto que éstos se pueden explicar como composición de los dos primeros. Actualmente también se estudia lo que se denomina la "chepa" o curvatura de la ETTI, que recoge cambios en la forma de la ETTI.

El caso de un desplazamiento paralelo de la ETTI se modeliza: $\rho(\text{plazo}) = \int_0^{\text{plazo}} [\rho(\tau) + a] \cdot d\tau$,

añadiendo una constante, que será positiva o negativa dependiendo de si el desplazamiento es hacia arriba o hacia abajo, respectivamente. Entonces la ecuación base cambia a:

$$\int_0^{\text{Max}\{T'\}} c(T') \cdot e^{-(\mathbf{T}-T') \cdot \int_0^{\text{plazo}'} [\rho(\tau')+a] \cdot d\tau'} \cdot dT' = \mathbf{C'} \quad \text{con plazo}' = \mathbf{T'} - T'$$

$$\int_0^{\text{Max}\{T\}} c(T) \cdot e^{-(\mathbf{T}-T) \cdot \int_0^{\text{plazo}} [\rho(\tau)+a] \cdot d\tau} \cdot dT = \mathbf{C} \quad \text{con plazo} = \mathbf{T} - T$$

Se supone que los capitales son continuos como generalización, aunque es similar para capitales discretos, con la única variación de que la primera integral sería un sumatorio.

Una ETTI continua no se observa en el mercado, donde sólo cotizan tipos de interés para unos cuantos plazos conocidos, pero mediante diferentes técnicas de ajuste como interpolación lineal, *bootstrapping*, utilización de polinomios, *splines* o funciones parsimoniosas, se "rellenan" los espacios.

Un desplazamiento de la ETTI afecta al cálculo del PFM de la OFI como una variación del input y output globales a los que se reduce toda OFI cierta.

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \rho(\tau)} = 0; \quad \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \rho(\tau)} = -\frac{\overline{\rho}}{PFM} \cdot \frac{\partial PFM}{\partial \rho(\tau)}; \quad \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho(\tau)} = -1 + \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial \rho(\tau)}$$

$$\frac{\partial PFM}{\partial \rho(\tau)} = \frac{\partial \mathbf{T'}}{\partial \rho(\tau)} - \frac{\partial \mathbf{T'}}{\partial \rho(\tau)} = \frac{1}{\rho(\theta') \cdot \mathbf{C'}} \cdot \int_0^{\text{Max}\{T'\}} c(T') \cdot e^{-(\mathbf{T}-T') \cdot \int_0^{\text{plazo}'} \rho(\tau') \cdot d\tau'} \cdot \left[e^{-a \cdot (\mathbf{T}-T')^2} - 1 \right] \cdot dT' +$$

$$- \frac{1}{\rho(\theta) \cdot \mathbf{C}} \cdot \int_0^{\text{Max}\{T\}} c(T) \cdot e^{-(\mathbf{T}-T) \cdot \int_0^{\text{plazo}} \rho(\tau) \cdot d\tau} \cdot \left[e^{-a \cdot (\mathbf{T}-T)^2} - 1 \right] \cdot dT$$

Un cambio de pendiente puede ser descrito a través de la multiplicación de la ETTI por un escalar b. En expresión:

$$\int_{0}^{Max\{T'\}} c(T')\cdot e^{-(\mathbf{T}-T')\cdot\int_0^{plazo'} b\cdot\rho(\tau')\cdot d\tau'}\cdot dT' = \mathbf{C'} \quad y \quad \int_{0}^{Max\{T\}} c(T)\cdot e^{-(\mathbf{T}-T)\cdot\int_0^{plazo} b\cdot\rho(\tau)\cdot d\tau}\cdot dT = \mathbf{C}$$

Ahora el efecto sobre el PFM de la OFI es:

$$\frac{\partial PFM}{\partial\rho(\tau)} = \frac{\partial \mathbf{T'}}{\partial\rho(\tau)} - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial\rho(\tau)} = \left(e^{-b}-1\right)\cdot\left[\frac{1}{\rho(\theta')} - \frac{1}{\rho(\theta)}\right]$$

Un caso particular de estudio cuando se invierte la pendiente de la ETTI porque es el que mayores riesgos comporta y más que no su inclinación. Ello se modelizaría cambiando de signo la pendiente de la ETTI, es decir, multiplicándola por menos uno y sumando el máximo de los diferimientos del input y del output (max{T} y max{T'}). Generalizando el cambio de pendiente a un cambio no totalmente inverso, pero sí de crecimiento a decrecimiento o viceversa, sería el cambio de la ETTI $\rho(plazo) = \int_0^{plazo}\left[a - b\cdot\rho(\tau)\right]\cdot d\tau$. Es decir, una agregación de los dos casos anteriores.

El caso del cambio de la "chepa" o curvatura de la ETTI se podría introducir con un cambio de pendiente, pero únicamente para ciertos plazos, los intermedios. Normalmente se estudia a través de *spreads* o diferencias entre un tipo de medio plazo (plazo intermedio) y los tipos a corto y largo plazo, aunque también puede analizarse estudiando las variaciones en las variables que describen una ETTI y su evolución. De esta manera, si la integral que define la derivada del PFM respecto del precio estricto de interés se divide en una serie de sumandos, los sumandos intermedios recogerían la curvatura de la ETTI.

De este modo, la suma de todos esos efectos se podría considerar como una buena aproximación a la variación del PFM ante un cambio de precio estricto del tipo de interés en un ambiente financiero dinámico.

Se ha supuesto una misma estructura de tipos de interés para el input y el output, aunque hay autores que defienden el uso de diferentes costes del capital según su naturaleza: activo y pasivo y su disponibilidad: corto o largo plazo, exigible o no, ya que el coste que tiene para la empresa o para el inversor es diferente. Pero dado que se está estudiando una OFI abstracta, cuyos capitales no responden a diferentes operaciones financieras y económicas, sino que son todas monetarias provenientes de las mismas fuentes: los cobros y pagos de un proyecto de inversión, es asumible el supuesto de una ETTI igual para inputs y outputs.

C. **Dependencia temporal del momento de valoración**:

- Cómo cambia el escenario de previsiones y magnitudes de una OFI según se evalúe desde uno u otro momento con diferente información y expectativas.

El cambio del momento de valoración puede cambiar la definición de los diferimientos, lo cual es significativo en regímenes financieros no escindibles como ya se ha visto. También pueden cambiar las cuantías esperadas en el futuro por variación de las previsiones, lo que ya se explicó en la dependencia temporal de las cuantías. El último efecto sobre la OFI de esta dependencia del inicio o del momento de valoración se encuentra en la variación del tipo de interés, lo cual se sintetiza en el estudio de la evolución de la ETTI o su dinámica[6].

La dependencia del inicio se hará a través de modificaciones de los diferimientos, tipos de interés y cuantías: las variables que describen una OFI. La variación de los tipos de interés es un tema bastante analizado existiendo varios estudios evolutivos de la ETTI suponiendo su dependencia del inicio, en tanto que la misma cambia a lo largo del tiempo.

La evolución de la ETTI se suele representar por ecuaciones diferenciales estocásticas de variación de los tipos de interés al contado o *spot*, aunque también es posible trabajar con tipos a futuro o *forward*, para estimar la función de descuento y la función de un bono cupón cero para cualquier plazo (base de la ETTI). Hay modelos de uno, dos o tres factores dependiendo de si la ley dinámica estocástica de evolución es la misma para todos los tipos de interés con independencia de su plazo (idea de desplazamiento paralelo), si de

[6] Vid. Galisteo Rodríguez, M. (2000).

distingue el largo del corto plazo (idea de cambio de pendiente) y si además añade posibles variaciones intermedias o de *spreads* (idea de cambios en la curvatura de la ETTI). Generalmente se trabaja con movimientos brownianos o procesos de Ornstein-Uhlenbeck: $dI_t = \beta(I,t)\cdot dt + \sigma(I,t)\cdot dW_t$ y $dI_t = \beta\cdot(\mu - I_t)\cdot dt + \sigma\cdot I_t^{\gamma}\cdot dW_t$, siendo I el tipo de interés efectivo una función del plazo (ETTI): $\rho(\tau) = \ln[1 + I(\tau)]$, en el caso de un sólo factor. La parte estocástica de la evolución de la ETTI recoge la incertidumbre de los cambios futuros que por cuestiones operativas y por ser lo menos arriesgado cuando no se tiene más información (aplicación del Teorema Central del Límite), se supone que es un ruido blanco, es decir, una variable aleatoria con distribución de probabilidad normal.

En las anteriores dependencias temporales analizadas se ha supuesto el caso cierto, pero la metodología presentada es aplicable, como se expresó en la introducción, al caso de incertidumbre, sea probable (probabilidad, posibilidad, creencia), vaga (números borrosos), inexacta o aproximada. Las fórmulas serían análogas a las deducidas.

Lo que realmente varía con el paso del tiempo es el tipo de interés y los plazos. Respecto al tipo de interés ya se ha mostrado la variación del PFM, de lo cual también se puede derivar la variación del resto de magnitudes que dependen directamente de la misma. La variación del tipo de interés está parametrizada, con lo que la variación del PFM también es calculable. Por ejemplo:

$$\text{Si} \quad dI_t = \mu\cdot dt + \sigma\cdot dW_t \Rightarrow \rho(\tau) = \rho^0 + \frac{2\cdot\mu\cdot(1+I_t) - \sigma^2}{2\cdot(1+I_t)^2}\cdot t + \frac{\sigma}{1+I_t}\cdot W_t; \quad W_t \sim N(0,1)$$

$$\text{Si} \quad dI_t = \mu\cdot I_t\cdot dt + \sigma\cdot I_t\cdot dW_t \Rightarrow \rho(\tau) = \rho^0 + \frac{2\cdot\mu\cdot I_t\cdot(1+I_t) - \sigma^2\cdot I_t^2}{2\cdot(1+I_t)^2}\cdot t + \frac{\sigma\cdot I_t}{1+I_t}\cdot W_t$$

$$dPFM = \frac{\partial PFM}{\partial\rho(\tau)}\cdot d\rho(\tau) = \frac{\partial PFM}{\partial\rho(\tau)}\cdot\left[\frac{2\cdot\mu\cdot I_t\cdot(1+I_t) - \sigma^2\cdot I_t^2}{2\cdot(1+I_t)^2}\cdot dt + \frac{\sigma\cdot I_t}{1+I_t}\cdot dW_t\right]$$

Se observa la complicación de la interpretación de las variaciones, que tiene una parte determinista que indica la tendencia de evolución temporal y una parte estocástica, que muestra la importancia de las desviaciones respecto a la tendencia.

D. **Dependencia temporal del horizonte temporal**:

- Cómo varían las magnitudes de la OFI según cambie el plazo o período de análisis: corto o largo plazo.

Ante un incremento del plazo que aumente el número de capitales financieros el PFM se verá afectado de la siguiente forma:

$$\mathrm{PFM} = \frac{1}{\rho}\cdot\left[\ln\left(\frac{\mathbf{C}' + \sum_{\text{nuevos}} C_i'}{\mathbf{C} + \sum_{\text{nuevos}} C_i}\right) - \ln\left(\frac{V' + \sum_{\text{nuevos}} C_i'\cdot e^{-\rho\cdot t_i'}}{V + \sum_{\text{nuevos}} C_i \cdot e^{-\rho\cdot t_i}}\right)\right]$$

$$\Delta\mathrm{PFM} = \frac{1}{\rho}\cdot\left[\ln\left(\frac{\%\Delta\mathbf{C}'}{\%\Delta V'}\right) - \ln\left(\frac{\%\Delta\mathbf{C}}{\%\Delta V}\right)\right]$$

La variación del PFM depende de los porcentajes de variación de las cuantías acumuladas y de su valor actual. En caso de reducción del horizonte temporal de análisis la variación en el PFM sería análoga, pero de signo contrario.

Por otro lado, el cambio del plazo puede cambiar el régimen financiero a aplicar. Legalmente a corto plazo se utiliza el régimen de interés simple (hasta 376 días) y a largo plazo (más de un año) se utiliza el régimen de interés compuesto. La relación con el precio estricto es:

$$\rho = \ln(1+I) \quad \text{en interés compuesto} \quad \frac{\partial\rho}{\partial I} = \frac{1}{1+I} \quad \text{y}$$

$$\rho = \ln(1+I\cdot t)\big/ t \quad \text{en interés simple} \quad \frac{\partial\rho}{\partial I} = \frac{1}{1+I\cdot t}$$

En este caso variaciones de las tres variables afectan igual en ambos casos, pero teniendo en cuenta que a igualdad de tipo de interés “I”, el precio estricto es diferente.

Un resumen de las cuatro dependencias temporales de una OFI defendidas por el autor se presenta en el siguiente cuadro:

VARIABLES OFI	VARIACIÓN EN EL TIEMPO	VARIACIÓN POR EL TIEMPO
CUANTÍA	Previsiones cuantías / rentas	Ubicación cuantías
	DEPENDENCIA TEMPORAL DE LA CUANTÍA	
TIPO DE INTERÉS	Estructura Temporal de Tipos de Interés	Evolución ETTI
	DEPENDENCIA TEMPORAL DEL TIPO DE INTERÉS	DEPENDENCIA TEMPORAL DEL MOMENTO DE VALORACIÓN
DIFERIMIENTO	Distintos plazos según el momento de valoración	Corto o largo plazo y regímenes financieros
	DEPENDENCIA TEMPORAL DEL MOMENTO DE VALORACIÓN	DEPENDENCIA TEMPORAL DEL HORIZONTE TEMPORAL

2.2 Ejemplo de modelización subjetiva.

Las reglas de experiencia y las de inferencia se basan en el conocimiento adquirido y la aplicación del razonamiento sobre el mismo[7]. Las de experiencia describen de una forma universal, aunque no son generales, lo observado. Tienen una capacidad explicativa débil porque se basan en la síntesis de las repeticiones observadas. Estas reglas pueden ser verdaderas o falsas según se fundamenten en un hecho cíclico o que transitoriamente se ha repetido en el pasado, pero un cambio en las condiciones hace que ya no se repita. En cuanto a las reglas de inferencia son prescriptivas, es decir, plantean como debería ser la Realidad y no cómo es. Generalmente se basan en la aplicación de una lógica, es decir, de un razonamiento que se considere válido. Ahora bien, su aplicación a la Realidad dependerá del grado de correspondencia entre lo supuesto (lo que debería ser) y lo observado (lo que es). En un mundo tan complejo e incierto como el financiero normalmente la aplicación de dichas reglas no conceden la seguridad absoluta porque para las de experiencia es normal que cambien las situaciones y, por tanto, ya no sean válidas (no generales). En el segundo caso los supuestos de partida pueden ser muy distantes de la Realidad y las deducciones y razonamientos realizados no ser aplicables.

[7] Vid. Ramírez Sarrió, D. (1998).

En este caso no se pueden plantear las relaciones algebraicas porque el modelo no se fundamenta en una representación matemática única de las OFI, sino que en cada caso se plantearán unos supuestos diferentes. Se presentará un ejemplo para el caso de un aparcamiento privado de coches[8].

Se toman zonas circulares de 200 metros de radio y se cuentan el número de viviendas de cada zona, considerando la necesidad de una plaza de aparcamiento por vivienda[9]. Se cuenta el número de plazas de aparcamiento en superficie y en viviendas existentes y se calcula el déficit respecto a la cifra anterior:
Déficit = nº viviendas – (Plazas superficie + Plazas vivienda)

Se estima que la demanda de aparcamientos de pago será un tercio del déficit. Otras consideraciones son el precio de los aparcamientos nuevos que se estima en un 40% más elevado sobre los costes de construcción. Finalmente, el porcentaje de venta de los mismos se estima en la mitad al finalizar la obra y el otro 50% durante el año siguiente[10].

Pero esta metodología ha de estar de acuerdo con los precios y estándares del mercado, de manera que si los aparcamientos nuevos de referencia (por ejemplo, los de la última construcción de la zona o los de una zona cercana) son más altos que el precio final de venta (margen bruto de beneficio del 40% más costes) se podría aumentar el precio hasta igualarlo, si los aparcamientos que se ofertan son homogéneos. Si el precio es inferior, según cual sea el umbral del margen bruto de beneficio, o bien se baja el margen o bien se desestima el proyecto por no rentable.

---

[8] Metodología habitual de trabajo en la evaluación de la viabilidad de este tipo de inversiones en Consorcios y Sociedades de Inversión.
[9] Dependiendo de las reglas de experiencia y de inferencia con que se trabajen el ratio necesidad de plazas de aparcamiento por vivienda puede variar según la zona analizada, por ejemplo, siendo función del nivel de renta.
[10] De nuevo, dependiendo del conocimiento, las reglas de experiencia y de inferencia que se tengan y se utilicen el coeficiente de demanda, el margen de beneficio bruto y el plazo de venta pueden variar según épocas y zonas.

La modelización matemática sería:

Período / Capitales	**Ingresos**	**Costes**
Año 0	(0’7/3)·[nv – (ps + pv)]·cu	(1/3)·[nv – (ps + pv)]·cu
Año 1	(0’7/3)·[nv – (ps + pv)]·cu	0
Año 2	0	0’35·(0’4/3)·[nv – (ps + pv)]·cu

nv: nº viviendas; ps: plazas en superficie; pv: plazas vivienda; cu: coste unitario.

Para el caso presentado se supone que los aparcamientos se venden 50% al final obra y el resto al año siguiente, y que los costes se acumulan todos al final de la obra. Ello se puede justificar porque lo que se analizan son los pagos y cobros monetarios que siempre son posteriores a los ingresos y gastos realizados y es práctica habitual acumularlos todos durante un mismo período del año o del mes. También se supone que el IVA se liquida de forma inmediata, según se cobra se traslada a Hacienda y que no hay costes de transacción, ni deducciones de impuestos a excepción de las pérdidas que se pueden deducir durante los 3 años siguientes.

En esta caso las tasas de rentabilidad de una OFI serían:

Si A = [nv – (ps + pv)]·cu/3

Rendimiento absoluto bruto: 0’26·A

Valor Actual Neto: $A\cdot[0'3 - 0'7\cdot e^{-\rho} + 0'14\cdot e^{-2\rho}]$

$$PFM = \frac{1}{\rho}\cdot\left[\ln\left(0'7 / 0'44\right) - \ln\left(0'7\cdot e^{-\rho} / 0'3 + 0'14\cdot e^{-2\cdot\rho}\right)\right]$$

$$\overline{\rho} = \frac{\ln\left(0'7 / 0'44\right)}{\frac{1}{\rho}\cdot\left[\ln\left(0'7 / 0'44\right) - \ln\left(0'7\cdot e^{-\rho} / 0'3 + 0'14\cdot e^{-2\cdot\rho}\right)\right]}$$

$$\hat{\rho} = \frac{\ln\left(0'7 / 0'44\cdot e^{\rho\cdot PFM}\right)}{PFM}$$

El estudio subjetivo o de experiencia, en cada caso tendrá su equivalente en el estudio objetivo. De este modo, las dependencias temporales de una OFI se pueden generalizar también al estudio subjetivo, aunque no la forma algebraica de sus variaciones. En el siguiente cuadro se resumen dichas dependencias:

Dependencia temporal cuantías	**Dependencia temporal tipo de interés**	**Dependencia temporal momento valoración**	**Dependencia temporal horizonte temporal**
Aumentos cobros aumentan margen, y aumentos pagos disminuyen margen. Variación de rentabilidad.	Aumentos de tipos de interés aumentan cargas financieras y disminuyen margen. Descenso rentabilidad.	Cambios en las expectativas de cuantías y tipo de interés de financiación.	Cambios en la confianza de la valoración realizada. Mayor confianza a corto plazo. Menor volumen ingresos esperados.

En un estudio subjetivo, las OFI se describen por otras magnitudes distintas a las objetivas, como son el margen. Generalmente, los criterios financieros se obvian imponiendo márgenes lo suficientemente grandes como para asegurar una rentabilidad neta positiva con independencia de la situación de los cobros y pagos.

3. TIEMPO COMO VARIACIÓN.

Las dependencias temporales se han definido a partir de las variaciones en las variables y magnitudes de una OFI provocadas por el paso del tiempo y el cambio de localización. Es decir, se ha utilizado tiempo como sinónimo de variación. El concepto de tiempo se relaciona con el cambio a través de su medida. Esta medida puede basarse en un tiempo homogéneo (tiempo físico), igual para todos los instantes; en un tiempo dependiente de la relevancia de los acontecimientos (tiempo histórico); o de un tiempo que diferencie los instantes según alguna característica financiera (tiempo financiero).

Todo el análisis presentado se ha realizado considerando el *Tiempo físico*, es decir, como si el tiempo fuese un simple contador que por diferencia numérica daría la distancia temporal. El inconveniente de utilizar el tiempo físico es que se reduce todo a la óptica del pasado, es decir, se analizan los acontecimientos o la OFI como si ya hubiese ocurrido. Otra posibilidad de análisis es trabajar con el *Tiempo histórico*[11], cuyo paso lo da los

[11] Vid. Nieto de Alba, U. (1998).

momentos importantes. En este caso, el análisis del pasado tiene una correspondencia directa con el tiempo físico, no así con el futuro. La correspondencia sólo se puede determinar ex-post porque el paso del tiempo futuro no está determinado. El Tiempo histórico pasa a distintas velocidades en función de la fluctuación de la serie, de manera que en intervalos de mayor fluctuación pasa más rápidamente. En los mismos se localizan más momentos importantes.

Una última opción de análisis temporal es el *Tiempo financiero*[12] que tiene una dimensión fractal y que diferencia cualitativamente los momentos con pérdidas, de aquéllos en los que hay ganancias y de los de sin pérdidas ni ganancias significativas. Esto se puede aplicar, en el caso de una OFI, para momentos individuales (input, output o nada) o por intervalos (pérdida acumulada, ganancia acumulada, rentabilidad acumulada cercana a cero), tratándose financieramente de diferente manera.

4. CONCLUSIONES.

Una Operación Financiera de Inversión (OFI) requiere de un análisis dinámico para comprenderla porque el tiempo influye en la misma tanto por el desarrollo de toda OFI en el tiempo como por su variabilidad en el mismo. Una OFI se define a partir de tres variables: cuantía, tipo de interés y plazo, las cuales pueden variar con el paso del tiempo su valor y por otro lado, las magnitudes que describen la OFI tampoco son indiferentes numéricamente a cambios de ubicación temporal de los valores de las variables.

Cada variabilidad de valor o de posición de los estados de las tres mencionadas variables da lugar a una OFI distinta en el sentido de que su descripción en términos de rentabilidad y de plazo promedio (PFM) cambia. Esta variabilidad está en función del tiempo y analizando estas dependencias temporales se divide el análisis dinámico de una OFI en

[12] Vid. Ceballos Hornero, D. (2001).

cuatro tipos: dependencia temporal de la cuantía, dependencia temporal del tipo de interés, dependencia temporal del momento de valoración y dependencia temporal del horizonte temporal.

Los resultados obtenidos estudiando las cuatro dependencias temporales para una OFI definida desde el modelo del Dr. A. Rodríguez son relativos a unas variaciones temporales mínimas, ya que en cuanto la OFI sea excesivamente compleja por la disposición de sus capitales financieros y/o las variaciones que se estudien sean amplias, las derivadas deducidas y analizadas dejan de ser representativas.

Este análisis dinámico, aunque algebraicamente obtenga mejores resultados desde un estudio objetivo también se puede plantear para una modelización subjetiva. Por otro lado, tampoco es necesario utilizar una definición física del tiempo.

5. BIBLIOGRAFÍA.

- Ceballos Hornero, D. 2001. "An Approach to Financial Time" en Proceedings 4th Italian-Spanish Conference on Financial Mathematics. Alghero, pp. 112-126.
- Galisteo Rodríguez, M. 2000. Dinámica de la Estructura Temporal de Tipos de Interés: un modelo de tres factores. Tesis doctoral UB. Barcelona.
- Gil Peláez, L. 1992. Matemática de las Operaciones Financieras. 9ª edición. Madrid.
- Nieto de Alba, U. 1998. Historia del Tiempo en Economía. Madrid.
- Ramírez Sarrió, D. 1994. "A Valuation of Uncertainty in Approximate Knowledge" en Proceedings Inter. AMSE Symposium, Lyon, pp. 117-120.
- Ramírez Sarrió, D. 1998. "Llei i Regla". Col·loquis de Vic II, pp. 79-101.
- Rodríguez Rodríguez, A. 1994. Matemáticas de las Operaciones Financieras (MOF). Barcelona.
- Rodríguez Rodríguez, A. 1997. Matemática de la Inversión. Barcelona.
- Suárez Suárez, A. 1996. Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa. 18ª edición. Madrid.