RENTAS FINANCIERAS. EJERCICIOS SOLUCIONADOS

1. Sea una renta constante de 40 términos trimestrales de 500 € cada uno de ellos, valorada en régimen financiero de interés compuesto al 4% anual capitalizable trimestralmente. Calcular el valor actual bajo los siguientes supuestos:
(a) Renta vencida e inmediata.
(b) Renta anticipada e inmediata.
(c) Renta vencida y diferida 3 trimestres.

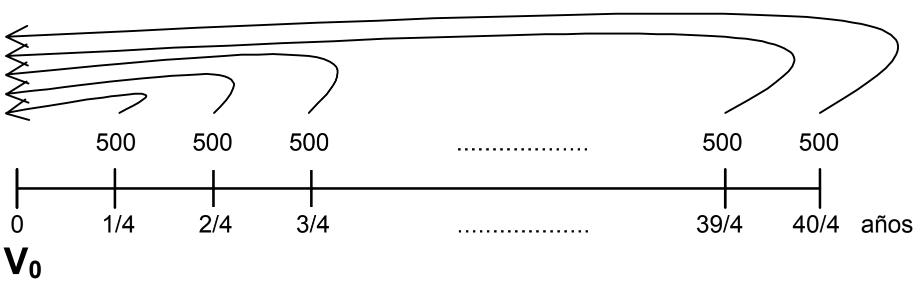
Solución:
Los datos del ejercicio son:

- $C = 500$ €
- $m = 4$
- $n = 40$
- $i_4 = 0,04 \Rightarrow I_4 = \frac{i_4}{4} = 0,01$. Para valorar la renta se tiene que utilizar el tanto efectivo trimestral

ya que la frecuencia del tanto efectivo de interés tiene que coincidir con la frecuencia de la renta.

(a) Renta vencida e inmediata

El esquema temporal de la renta es:



Para calcular el valor de esta renta en $T = 0$ se tiene que aplicar la fórmula deducida para la renta constante, inmediata, vencida y temporal:

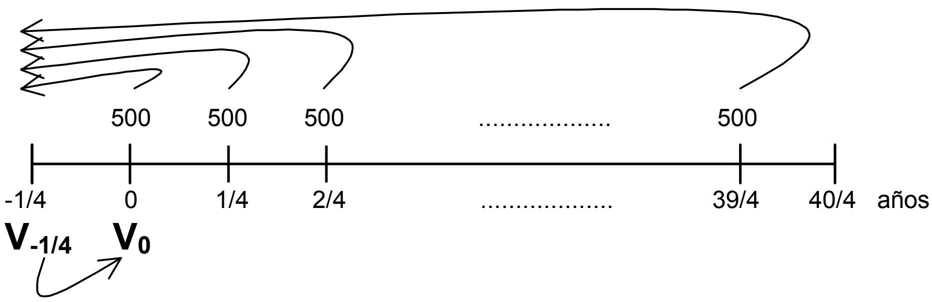
$$V_0 = C \cdot a_{\overline{n|}\, I_m} = C \cdot \frac{1-(1+I_m)^{-n}}{I_m}$$

que obtiene el valor de la renta un periodo antes de donde se localiza el primer término de la renta, esto es, en $T = 0$. En este caso:

$$V_0 = 500 \cdot a_{\overline{40|}\, I_4} = 500 \cdot \frac{1-1{,}01^{-40}}{0{,}01} = 16.417{,}34 \text{ €}$$

(b) Renta anticipada e inmediata

El esquema temporal de la renta es:



En este caso, el resultado de aplicar la fórmula de la renta constante, $500 \cdot a_{\overline{40|}\, I_4}$, proporciona la cuantía de un capital situado un periodo antes de donde se encuentra localizado el primer término de la renta, es decir, en $T = -1/4$:

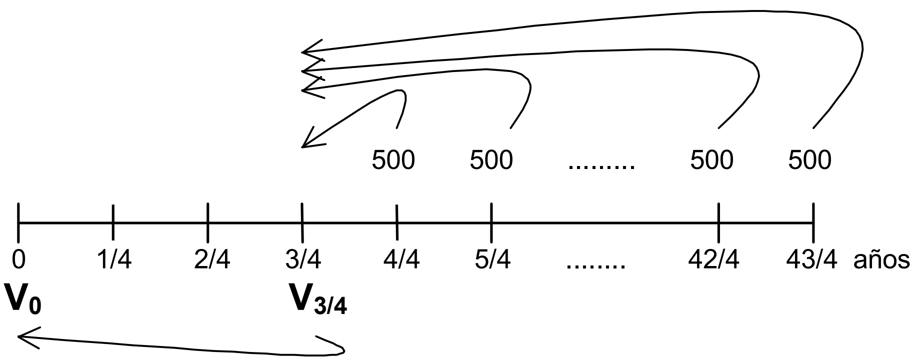
$$V_{-1/4} = 500 \cdot a_{\overline{40|}\, I_4} = 16.417{,}34 \text{ €}$$

Por tanto, para obtener el valor en $T = 0$ se debe capitalizar el resultado anterior un periodo de la renta, un trimestre:

$$V_0 = \underbrace{500 \cdot a_{\overline{40}|I_4}}_{V_{-1/4}} \cdot (1+I_4) = 16.581{,}52 \text{ €}$$

(c) Renta vencida y diferida 3 trimestres

El esquema temporal de la operación es:



Para hallar el valor de esta renta en $T = 0$, V_0, se debe aplicar la fórmula del valor actual de la renta constante, inmediata, vencida y temporal añadiendo la corrección necesaria para contemplar la existencia del diferimiento, que en este caso es $d = 3$ trimestres.

Al aplicar la fórmula $500 \cdot a_{\overline{40}|I_4}$ se obtiene el valor de la renta en $T = 3/4$, por tanto, se debe actualizar el resultado obtenido, $V_{3/4}$, tres trimestres para poder obtener el valor en el origen de la operación:

$$V_0 = \underbrace{500 \cdot a_{\overline{40}|I_4}}_{V_{3/4}} \cdot (1+I_4)^{-3} = 15.934{,}51 \text{ €}$$

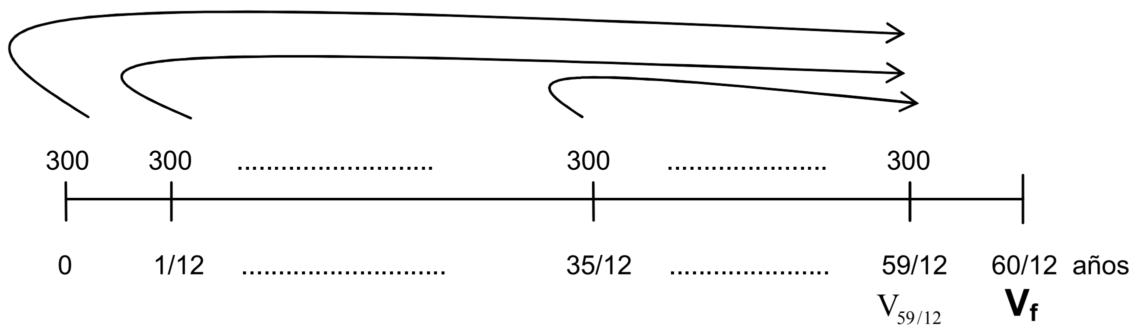
2. Hace 5 años se abrió una cuenta bancaria en la que se han ido realizando imposiciones constantes de 300 € al inicio de cada mes. Calcular el saldo acumulado hoy si la cuenta se ha retribuido al 2,5% efectivo anual.

Solución:

Los datos del ejercicio son:

- $C = 300$ €
- $m = 12$
- $n = 12 \cdot 5 = 60$
- $I_1 = 0{,}025 \sim I_{12} = (1+I_1)^{1/12} - 1 = 0{,}002059$. Para valorar la renta se tiene que utilizar el tanto efectivo mensual ya que la frecuencia del tanto efectivo de interés tiene que coincidir con la frecuencia de la renta.

El esquema temporal de la operación es:



De la aplicación inmediata de la fórmula del valor final de la renta constante, vencida, inmediata y temporal, $C \cdot s_{\overline{n|}\, I_m}$, se obtiene la cuantía de un capital situado un periodo antes de donde finaliza la operación, esto es, en $T = 59/12$. Por lo tanto, para obtener el saldo acumulado en la cuenta, es decir, el valor final de la renta en $T = 60/12$, basta capitalizar el resultado obtenido en $T = 59/12$ un periodo de la renta, un mes:

$$V_f = \underbrace{300 \cdot s_{\overline{60|}\, I_{12}}}_{V_{59/12}} \cdot (1+I_{12}) = 300 \cdot \frac{(1+I_{12})^{60} - 1}{I_{12}} \cdot (1+I_{12}) = 19.178{,}40 \text{ €}$$

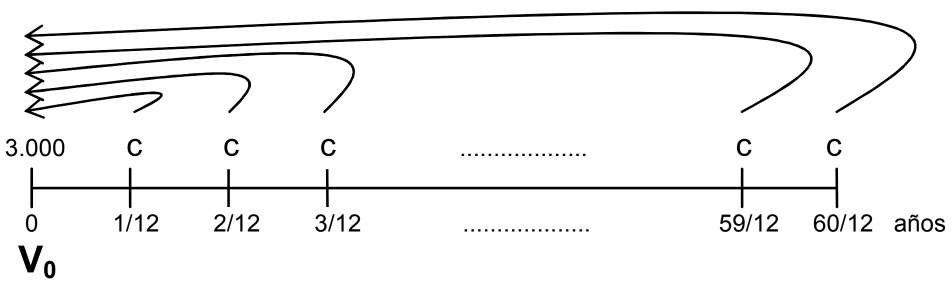
3. La compra de una moto de competición, cuyo precio hoy asciende a 30.000 €, se financia pagando al contado el 10% de su precio y el resto mediante el pago de 60 mensualidades constantes pagaderas por vencido. Calcular el importe de las mensualidades si la operación se ha pactado a un 7,5% anual capitalizable mensualmente.

Solución:

Los datos del ejercicio son:

- Pago al contado = 3.000 €
- Importe de las mensualidades constantes = C?
- $m = 12$
- $n = 60$
- $i_{12} = 0{,}075 \Rightarrow I_{12} = \dfrac{i_{12}}{12} = 0{,}00625$. Para valorar la renta se tiene que utilizar el tanto efectivo mensual ya que la frecuencia del tanto efectivo de interés tiene que coincidir con la frecuencia de la renta.

El esquema temporal de la operación es:



El valor de la operación en $T = 0$ asciende a 30.000 €, esto es, $V_0 = 30.000$ €. Esta cuantía es el resultado de sumar el pago al contado más el valor en $T = 0$ de las 60 mensualidades constantes, que constituyen una renta constante, inmediata, temporal y vencida:

$$V_0 = 30.000 = 3.000 + C \cdot \frac{1 - (1 + I_{12})^{-60}}{I_{12}}$$

de donde C es,

$$C = \frac{27.000 \cdot I_{12}}{1-\left(1+I_{12}\right)^{-60}} = 541{,}02 \text{ €}$$

4. Sea una renta de 24 términos trimestrales crecientes en un 2% trimestral acumulativo. Si el primer término asciende a 2.500 € y la valoración se efectúa en régimen financiero de interés compuesto al 3% efectivo semestral, calcular el valor de la renta en el origen de la operación, bajo los siguientes supuestos:

(a) Renta vencida y diferida 3 trimestres.

(b) Renta anticipada y diferida 3 trimestres.

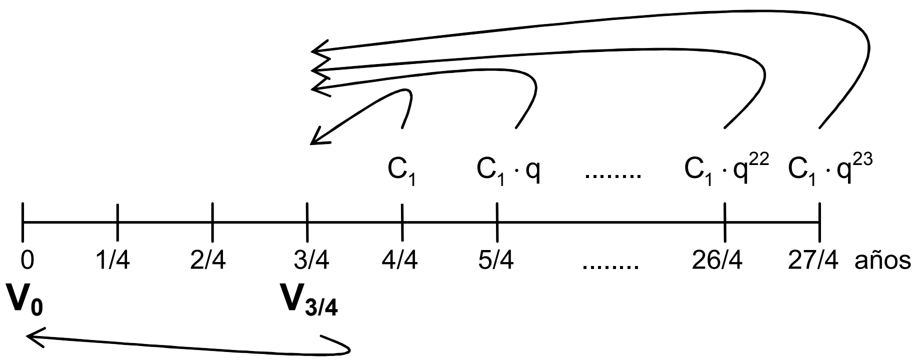
Solución:

Los datos del ejercicio son:

- $C_1 = 2.500$ €
- $m = 4$
- $q = 1{,}02$
- $I_2 = 0{,}03 \sim I_4 = \left(1+I_2\right)^{1/2} - 1 = 0{,}014889$. Para valorar la renta se tiene que utilizar el tanto efectivo trimestral ya que la frecuencia del tanto efectivo de interés tiene que coincidir con la frecuencia de la renta. Se comprueba que $1+I_4 \neq q$.
- $n = 24$
- d = 3 trimestres

(a) Renta vencida y diferida 3 trimestres

El esquema temporal de la operación es:



Para hallar el valor de esta renta en $T = 0$, V_0, se debe de aplicar la fórmula del valor actual de la renta geométrica, inmediata, vencida y temporal, $C_1 \cdot \frac{1-q^n \cdot (1+I_m)^{-n}}{1+I_m - q}$, y luego corregir el diferimiento, que en este caso es $d = 3$ trimestres.

Al aplicar la fórmula de la renta geométrica, inmediata, temporal y vencida se obtiene el valor de la renta un semestre antes del momento en que se localiza el primer término, es decir, en $T = 3/4$:

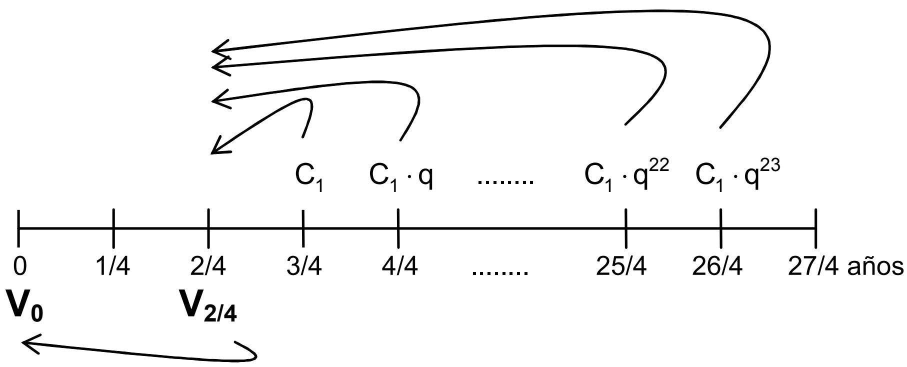
$$V_{3/4} = 2.500 \cdot \frac{1-1{,}02^{24} \cdot 1{,}014889^{-24}}{1{,}014889 - 1{,}02} = 62.673{,}50 \text{ €}$$

Por tanto, se debe de corregir el resultado obtenido, $V_{3/4}$, actualizándolo tres trimestres para poder obtener el valor en el origen de la operación:

$$V_0 = V_{3/4} \cdot 1{,}014889^{-3} = 59.955{,}40 \text{ €}$$

(b) Renta anticipada y diferida 3 trimestres

El esquema temporal de la operación es:



Para hallar el valor de esta renta en $T = 0$, V_0, se debe de aplicar la fórmula del valor actual de la renta geométrica, inmediata, vencida y temporal, $C_1 \cdot \frac{1-q^n \cdot (1+I_m)^{-n}}{1+I_m - q}$, y luego corregir el diferimiento, que en este caso es $d = 2$ trimestres.

Al aplicar la fórmula de la renta geométrica, inmediata, temporal y vencida se obtiene el valor de la renta un semestre antes del momento en que se localiza el primer término, es decir, en $T = 2/4$:

$$V_{2/4} = 2.500 \cdot \frac{1 - 1{,}02^{24} \cdot 1{,}014889^{-24}}{1{,}014889 - 1{,}02} = 62.673{,}50 \text{ €}$$

Por tanto, se debe de corregir el resultado obtenido, $V_{2/4}$, actualizándolo dos trimestres para poder obtener el valor en el origen de la operación:

$$V_0 = V_{2/4} \cdot 1{,}014889^{-2} = 60.848{,}08 \text{ €}$$

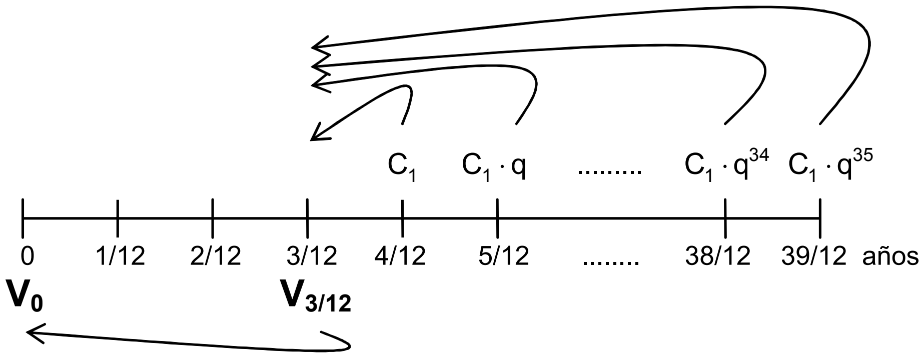
5. La compra de un equipo informático, cuyo precio al contado es 3.000 €, se financiará mediante el pago de 36 cuotas mensuales crecientes a razón de un 1% acumulativo mensual. Calcular el importe de la primera y última mensualidad si la operación se ha pactado a un 0,75% efectivo mensual en régimen financiero de interés compuesto y el primer pago se realiza 4 meses después de la compra.

Solución:

Los datos del ejercicio son:

- Precio al contado es el valor actual de la operación. $V_0 = 3.000$ €
- $m = 12$
- $q = 1{,}01$
- $I_{12} = 0{,}0075$. Para valorar la renta se tiene que utilizar el tanto efectivo mensual ya que la frecuencia del tanto efectivo de interés tiene que coincidir con la frecuencia de la renta. Se comprueba que $1 + I_{12} \neq q$.
- $n = 36$
- d = 3 meses

El esquema temporal de la operación es:



Para hallar el valor de esta operación en $T = 0$, V_0, se debe aplicar la fórmula del valor actual de la renta geométrica, inmediata, vencida y temporal añadiendo la corrección necesaria para contemplar la existencia del diferimiento, que en este caso es $d = 3$ meses.

Al aplicar la fórmula $C_1 \cdot \dfrac{1 - q^n \cdot (1 + I_m)^{-n}}{1 + I_m - q}$ se obtiene el valor de la renta en $T = 3/12$, por tanto, se debe actualizar el resultado obtenido, $V_{3/12}$, tres meses para poder obtener el valor en el origen de la operación:

$$V_0 = 3.000 = \underbrace{C_1 \cdot \frac{1 - 1{,}01^{36} \cdot 1{,}0075^{-36}}{1{,}0075 - 1{,}01}}_{V_{3/12}} \cdot 1{,}0075^{-3}$$

Despejando C_1 se obtiene el importe de la primera mensualidad:

$$C_1 = 3.000 \cdot 1{,}0075^3 \cdot \frac{1{,}0075 - 1{,}01}{1 - 1{,}01^{36} \cdot 1{,}0075^{-36}} = 82{,}19\ €$$

y teniendo en cuenta que la expresión del término general de una renta variable en progresión geométrica es:

$$C_r = C_1 \cdot q^{r-1} \quad \text{con} \quad r = 1, 2, \ldots, n$$

la última mensualidad, que es el término C_{36}, asciende a:

$$C_{36} = C_1 \cdot q^{36-1} = 82{,}19 \cdot 1{,}01^{35} = 116{,}43$$

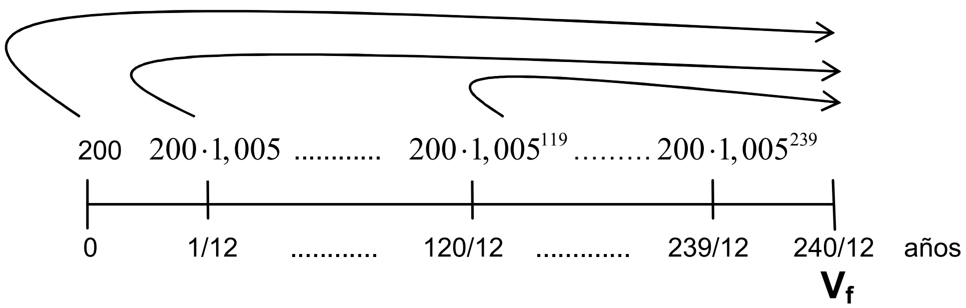
6. Al cumplir 35 años un particular inicia un plan de ahorro, en el que realizará aportaciones mensuales y crecientes en un 0,5% mensual acumulativo, con el objetivo de disponer del saldo acumulado cuando cumpla 55 años. Calcular el importe del capital acumulado si la primera imposición ha sido de 200 € y la última imposición se realiza un mes antes de cumplir 55 años. Tipo de interés de interés compuesto 4% efectivo anual.

Solución:

Los datos del ejercicio son:

- $C_1 = 200$ €
- $m = 12$
- $q = 1{,}005$
- $I_1 = 0{,}04 \sim I_{12} = \left(1+I_1\right)^{1/12} - 1 = 0{,}00327$. Para valorar la renta se tiene que utilizar el tanto efectivo mensual ya que la frecuencia del tanto efectivo de interés tiene que coincidir con la frecuencia de la renta. Se comprueba que $1+I_{12} \neq q$.
- $n = 240$

El esquema temporal de la operación es:



De la aplicación inmediata de la fórmula del valor actual de una renta variable geométricamente, inmediata, temporal y vencida, $C_1 \cdot \dfrac{1 - q^n \cdot \left(1+I_m\right)^{-n}}{1+I_m - q}$, se obtiene el valor de la renta un mes antes de donde se localiza el primer término de la renta, es decir, en $T = -1/12$, por tanto para obtener el valor al final de la operación, en $T = 240/12$, basta capitalizar el resultado obtenido 241 meses:

$$S_{240/12} = 200 \cdot \frac{1 - 1{,}005^{240} \cdot 1{,}00327^{-240}}{1{,}00327 - 1{,}005} \cdot 1{,}00327^{241} = 130.023{,}87 \text{ €}$$

7. Sea una renta de 20 términos semestrales crecientes 30 € cada semestre. Si el primer término asciende a 400 € y la valoración se efectúa en régimen financiero de interés compuesto al 5% anual capitalizable semestralmente, calcular el valor actual de la renta bajo los siguientes supuestos:

(a) Renta vencida e inmediata.

(b) Renta anticipada e inmediata.

(c) Renta vencida y diferida 3 semestres.

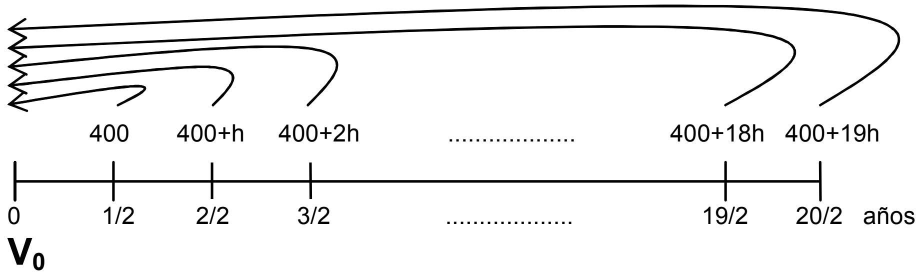
Solución:

Los datos del ejercicio son:

- $C_1 = 400$ €
- $h = 30$
- $m = 2$
- $n = 20$
- $i_2 = 0{,}05 \Rightarrow I_2 = \frac{i_2}{2} = 0{,}025$. Para valorar la renta se tiene que utilizar el tanto efectivo semestral ya que la frecuencia del tanto efectivo de interés tiene que coincidir con la frecuencia de la renta.

(a) Renta vencida e inmediata

El esquema temporal de la renta es:



Para calcular el valor actual de esta renta en $T = 0$ se tiene que aplicar la fórmula deducida para la renta variable linealmente, inmediata, vencida y temporal :

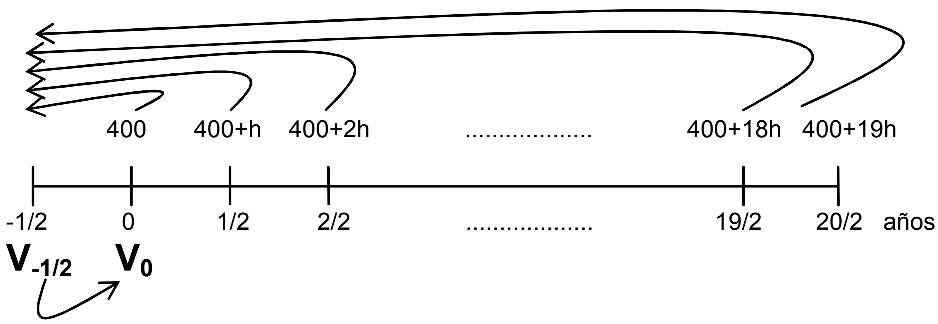
$$V_0 = \left(C_1 + \frac{h}{I_m} + n \cdot h \right) \cdot a_{\overline{n}|I_m} - \frac{n \cdot h}{I_m}$$

que en este caso es:

$$V_0 = \left(400 + \frac{30}{I_2} + 20 \cdot 30 \right) \cdot a_{\overline{20}|I_2} - \frac{20 \cdot 30}{I_2} = 10.296{,}15 \text{ €}$$

(b) Renta anticipada e inmediata

El esquema temporal de la renta es:



En este caso, el resultado de aplicar la fórmula de la renta lineal, inmediata, vencida y temporal proporciona la cuantía de un capital situado un periodo antes de donde se encuentra localizado el primer término de la renta, es decir, en $T = -1/2$:

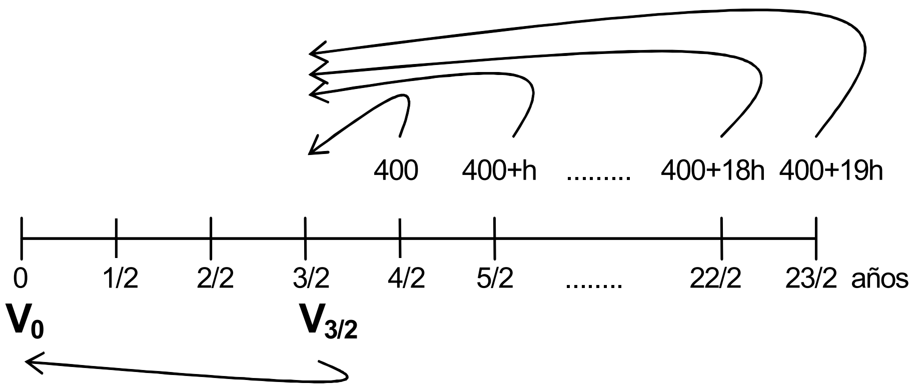
$$V_{-1/2} = \left(400 + \frac{30}{I_2} + 20 \cdot 30 \right) \cdot a_{\overline{20}|I_2} - \frac{20 \cdot 30}{I_2} = 10.296{,}15 \text{ €}$$

Por tanto, para obtener el valor en $T = 0$ se debe capitalizar el resultado anterior un semestre:

$$V_0 = V_{-1/2} \cdot \left(1 + I_2\right) = 10.553{,}55 \text{ €}$$

(c) Renta vencida y diferida 3 semestres

El esquema temporal de la operación es:



Para hallar el valor de esta renta en $T = 0$, V_0, se debe de aplicar la fórmula del valor actual de la renta lineal, inmediata, vencida y temporal y luego corregir el diferimiento, que en este caso es $d = 3$ semestres.

Al aplicar la fórmula de la renta lineal inmediata, temporal y vencida se obtiene el valor de la renta un semestre antes del momento en que se localiza el primer término, es decir, en $T = 3/2$:

$$V_{3/2} = \left(400 + \frac{30}{I_2} + 20 \cdot 30\right) \cdot a_{\overline{20|}\, I_2} - \frac{20 \cdot 30}{I_2} = 10.296{,}15 \text{ €}$$

Por tanto, se debe de corregir el resultado obtenido, $V_{3/2}$, actualizándolo tres semestres para poder obtener el valor en el origen de la operación:

$$V_0 = V_{3/2} \cdot \left(1 + I_2\right)^{-3} = 9.560{,}99 \text{ €}$$

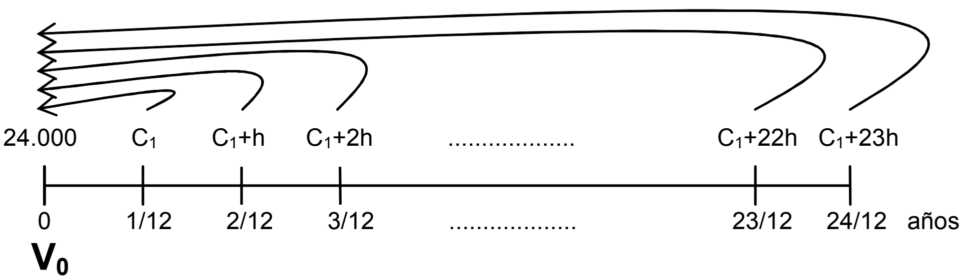
8. La compra de un coche, que tiene un precio al contado de 30.000 €, se financia con una entrada de 6.000 €, en el momento de la compra, y el resto con 24 cuotas mensuales, vencidas y decrecientes en 4 € cada mes. Calcular el importe de la primera cuota mensual si el tipo de interés compuesto aplicado es un 6% anual capitalizable mensualmente.

Solución:

Los datos del ejercicio son:

- El valor actual de la operación es la cantidad financiada. $V_0 = 24.000$ €
- $h = -4$
- $m = 12$
- $n = 24$
- $i_{12} = 0,06 \Rightarrow I_{12} = \frac{i_{12}}{12} = 0,005$. Para valorar la renta se tiene que utilizar el tanto efectivo mensual ya que la frecuencia del tanto efectivo de interés tiene que coincidir con la frecuencia de la renta.

El esquema temporal de la operación es:



La ecuación de equilibrio que permite determinar la cuantía de la primera cuota mensual, C, debe plantearse en el origen de la operación ya que se conoce el valor actual de la misma, siendo las 24 cuotas mensuales una renta lineal, inmediata, vencida y temporal:

$$V_0 = 24.000 = \left(C_1 + \frac{(-4)}{I_{12}} + 24 \cdot (-4) \right) \cdot a_{\overline{24|}\, I_{12}} - \frac{(-4) \cdot 24}{I_{12}}$$

Despejando la C_1 resulta:

$$C_1 = \left[\frac{24.000 + \frac{(-4) \cdot 24}{I_{12}}}{a_{\overline{24|}\, I_{12}}} \right] + \frac{4}{I_{12}} + 24 \cdot 4 = 1.108,73 \text{ €}$$

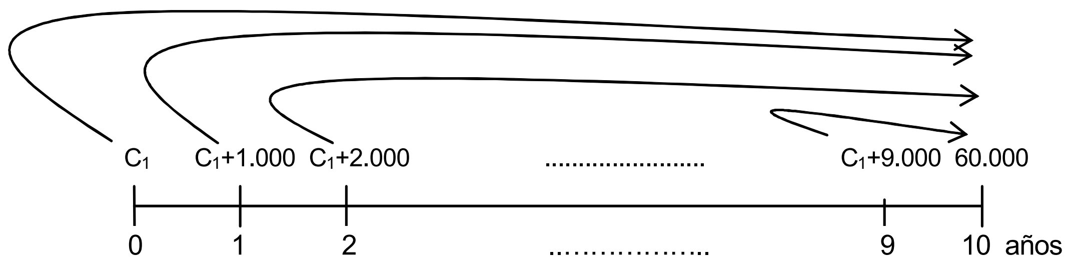
9. Una persona quiere hoy realizar la primera aportación a un plan de ahorro con el objetivo de disponer, dentro de 10 años, de un capital de 60.000 €. El plan estará constituido con aportaciones anuales y crecientes en 1.000 € cada año y proporcionará un interés fijo y garantizado para todo el plazo del 3,5% efectivo anual de interés compuesto. Calcular el importe de la primera aportación anual al plan de ahorro.

Solución:

Los datos del ejercicio son:

- $h = 1.000$
- $m = 1$
- $n = 10$
- $I_1 = 0,035$
- El capital constituido a los diez años es el valor de la renta en $T = 10$ años.
  $V_{10} = 60.000$ €.

El esquema temporal de la operación es:



La ecuación de equilibrio de esta operación se debe plantear en el décimo año ya que el capital que se desea constituir, 60.000 €, es el valor de la renta en $T = 10$ años. En este caso, las imposiciones constituyen una renta lineal, anticipada, inmediata y temporal, de modo que al aplicar la fórmula de la renta lineal, inmediata, vencida y temporal se obtiene el valor de la renta un año antes del momento en que se localiza el primer término, por lo tanto para obtener el valor al final de la operación, en $T = 10$, V_{10} , basta capitalizar el resultado obtenido 11 años:

$$V_{10} = \left[\left(C_1 + \frac{1.000}{I_1} + 10 \cdot 1.000 \right) \cdot a_{\overline{10|}\, I_1} - \frac{10 \cdot 1.000}{I_1} \right] \cdot (1 + I_1)^{11} = 60.000 \text{ €}$$

despejando C_1:

$$C_1 = \left[\frac{\dfrac{60.000}{(1+I_1)^{11}} + \dfrac{10 \cdot 1.000}{I_1}}{a_{\overline{10|}\, I_1}} \right] - \left(\frac{1.000}{I_1} + 10 \cdot 1.000 \right) = 724{,}77\,€$$

10. Sea una renta de 40 términos trimestrales, variables a razón de un 4% anual acumulativo. El primer año cada término trimestral asciende a 12.000 €. Hallar el valor actual de la renta, si el tipo de interés compuesto es del 5% efectivo anual, bajo los siguientes supuestos:

(a) Renta vencida e inmediata.

(b) Renta anticipada e inmediata.

(c) Renta vencida y diferida 6 trimestres.

Solución:

Las características de la renta son:

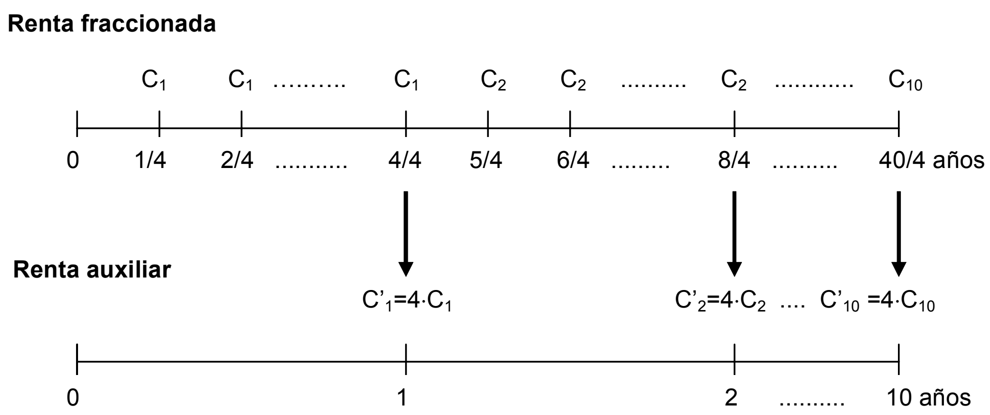
- Periodo de pago de la renta: $P = 1/4 \Rightarrow m = 4$
- Periodo de variación: $P' = 1 \Rightarrow M = 1$
- Al ser $P \neq P'$ se trata de una renta fraccionada.
- Número de términos de la renta: $n = 40$
- Número de términos de igual cuantía dentro de cada periodo de variación: $K = \dfrac{\overbrace{4}^{m}}{\underbrace{1}_{M}} = \dfrac{\overbrace{40}^{n}}{\underbrace{10}_{N}} = 4$
- Número de términos de cuantía diferente: $N = \dfrac{n}{k} = \dfrac{40}{4} = 10$
- $I_1 = 0{,}05 \sim I_4 = (1+I_1)^{1/4} - 1 = 0{,}01227 \Rightarrow i_4 = I_4 \cdot 4 = 0{,}04908$
- $q = 1{,}04$
- Durante el primer año, cada término trimestral asciende a 12.000 € ($C_1 = 12.000$ €). Durante el segundo año se incrementará dicho término un 4% con respecto al del año anterior, esto es, $C_2 = 1{,}04 \cdot C_1 = 12.480$ €, cumpliéndose que $C_r = C_1 \cdot 1{,}04^{\,r-1}$ con $r = 1, 2, 3, \ldots\ 10$.

(a) Renta vencida e inmediata

Las características de la renta auxiliar son:

- Periodo de la renta: $P' = 1 \Rightarrow M = 1$
- Número de términos: $N = 10$
- El primer término es $C'_1 = k \cdot C_1 = 4 \cdot C_1 = 48.000$ € y está situado al final del primer año de la renta, que es precisamente donde está situado el último término de cuantía C_1. El segundo término es $C'_2 = k \cdot C_2 = 4 \cdot C_2 = 4 \cdot 1{,}04 \cdot C_1 = 1{,}04 \cdot C'_1$. Como puede apreciarse, la variación del término de la renta auxiliar es la misma que la de la renta fraccionada. Este resultado puede generalizarse al resto de los términos y ello permite expresar el término general como $C'_r = C'_1 \cdot 1{,}04^{\,r-1} = 4 \cdot C_1 \cdot 1{,}04^{\,r-1}$ con $r = 1, 2, 3, ..., 10$. Por tanto, la renta auxiliar es una renta de variación geométrica.

Los esquemas temporales correspondientes a la renta fraccionada y auxiliar son:



Para calcular el valor actual de la renta fraccionada en $T = 0$, se debe aplicar la fórmula de la renta geométrica, inmediata, vencida y temporal para el caso $q \neq 1 + I_1$, y corregirla por el fraccionamiento:

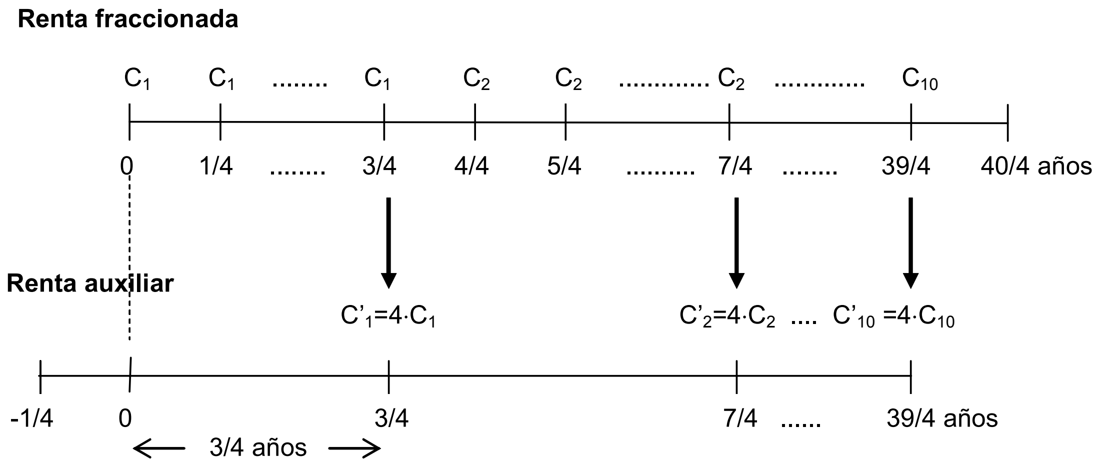
$$V_0^f = \frac{i_M}{i_m} \cdot C'_1 \cdot \frac{1 - q^N \cdot (1 + I_M)^{-N}}{1 + I_M - q}$$

En este caso:

$$V_0^f = \frac{i_1}{i_{12}} \cdot \underbrace{\overbrace{48.000}^{C_1'} \cdot \frac{1-1{,}04^{10} \cdot (1+I_1)^{-10}}{(1+I_1)-1{,}04}}_{V_0^{auxiliar}} = 446.160{,}51 \text{ €}$$

(b) Renta anticipada e inmediata

Las características de la renta auxiliar son las mismas que en el apartado anterior.
Los esquemas temporales correspondientes a la renta fraccionada y auxiliar son:



En este caso, si se aplica la fórmula de la renta geométrica, inmediata, vencida y temporal, para el caso $q \neq 1+I_1$, se obtiene el valor de la renta auxiliar un trimestre antes del origen, en $T=-1/4$, por tanto, para tener el valor de la renta en $T=0$ se deberá capitalizar el resultado obtenido un trimestre y hacer la corrección por fraccionamiento:

$$V_0^f = \frac{i_M}{i_m} \cdot C_1' \cdot \frac{1-q^N \cdot (1+I_M)^{-N}}{1+I_M-q} \cdot (1+I_m)$$

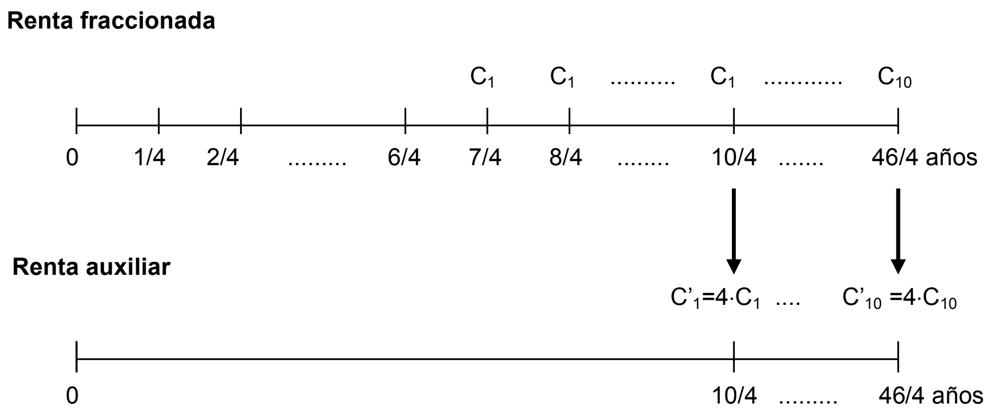
En este caso:

$$V_0^f = \frac{i_1}{i_{12}} \cdot \underbrace{\overbrace{48.000}^{C_1'} \cdot \frac{1-1{,}04^{10} \cdot (1+I_1)^{-10}}{(1+I_1)-1{,}04} \cdot (1+I_4)}_{V_0^{auxiliar}} = 451.636{,}01 \text{ €}$$

(c) Renta vencida y diferida 6 trimestres

Las características de la renta auxiliar son mismas que en el apartado (a).

Los esquemas temporales correspondientes a la renta fraccionada y auxiliar son:



En este caso, si se aplica la fórmula de la renta geométrica, inmediata, vencida y temporal, para el caso $q \neq 1+I_1$, se obtiene el valor de la renta auxiliar en $T=6/4$, por tanto, para obtener el valor de la renta en $T=0$ se deberá actualizar el resultado obtenido 6 trimestres y hacer la corrección por fraccionamiento:

$$V_0^f = \frac{i_1}{i_{12}} \cdot \underbrace{\overbrace{48.000}^{C_1'} \cdot \frac{1-1{,}04^{10} \cdot \left(1+I_1\right)^{-10}}{\left(1+I_1\right)-1{,}04} \cdot \left(1+I_1\right)^{-6/4}}_{V_0^{auxiliar}} = 414.674{,}36 \text{ €}$$

11. El pago de un equipo de esquí, cuyo precio al contado es de 900 €, se realizará mediante 36 cuotas mensuales crecientes semestralmente a razón de un 6% acumulativo. Calcular el importe de la primera y la última mensualidad si el tipo de interés es el 5% efectivo anual y el primer pago se realiza un mes después de la compra.

Solución:

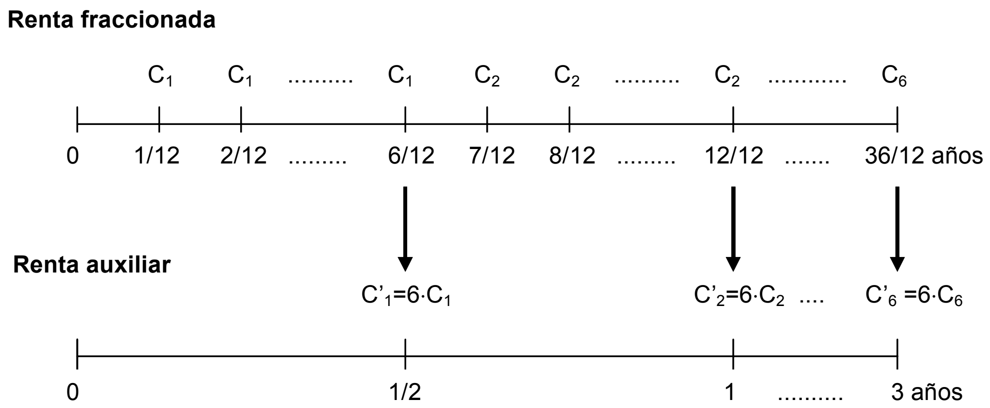
Las características de la renta fraccionada son:

- Periodo de la renta: $P = 1/12 \Rightarrow m = 12$
- Periodo de variación: $P' = \frac{1}{2} \Rightarrow M = 2$
- Número de términos de la renta: $n = 36$
- Número de términos de cuantía diferente: $N = 6$
- Número de términos de igual cuantía dentro de cada periodo de variación:

$$K = \frac{\overbrace{12}^{m}}{\underbrace{2}_{M}} = \frac{\overbrace{36}^{n}}{\underbrace{6}_{N}} = 6$$

- $I_1 = 0,05 \sim I_2 = (1+I_1)^{1/2} - 1 = 0,02469 \Rightarrow i_2 = I_2 \cdot 2 = 0,04939$
- $I_1 = 0,05 \sim I_{12} = (1+I_1)^{1/12} - 1 = 0,00407 \Rightarrow i_{12} = I_{12} \cdot 12 = 0,04888$
- $q = 1,06$
- Durante el primer semestre cada término mensual asciende a C_1. Durante el segundo semestre se incrementará dicho término un 6% con respecto al del semestre anterior, esto es, $C_2 = 1,06 \cdot C_1$, cumpliéndose que $C_r = C_1 \cdot 1,06^{r-1}$ con $r = 1,2,...,6$.
- En cuanto a los términos de la renta auxiliar, el primer término se obtiene como $C'_1 = k \cdot C_1 = 6 \cdot C_1$ que está situado precisamente donde está situado el último término de cuantía C_1. El segundo término es $C'_2 = k \cdot C_2 = 6 \cdot C_2 = 6 \cdot (C_1 \cdot 1,06)$. Como puede apreciarse, la variación del término de la renta auxiliar es la misma que la de la renta fraccionada y ello permite expresar el término general como $C'_r = C'_1 \cdot 1,06^{r-1}$ con $r = 1,2,3,...,6$. La renta auxiliar es una renta de variación geométrica.
- $V_0^f = 900$ €

Los esquemas temporales correspondientes a la renta fraccionada y auxiliar son:



La ecuación de equilibrio que permite determinar la cuantía de la primera cuota mensual, C_1, debe plantearse en el origen de la operación ya que se conoce el valor actual de la misma. Para calcular el valor actual de la renta fraccionada en $T = 0$, se debe aplicar la fórmula de la renta geométrica, inmediata, vencida y temporal para el caso $q \neq 1 + I_2$ y corregirla por el fraccionamiento:

$$V_0^f = \frac{i_M}{i_m} \cdot C_1' \cdot \frac{1 - q^N \cdot (1 + I_M)^{-N}}{1 + I_M - q}$$

En este caso,

$$V_0^f = 900 = \frac{i_2}{i_{12}} \cdot \underbrace{C_1' \cdot \frac{1 - 1{,}06^6 \cdot (1 + I_2)^{-6}}{(1 + I_2) - 1{,}06}}_{V_0^{\text{auxiliar}}}$$

y despejando C_1' resulta:

$$C_1' = \frac{900 \cdot i_{12} \cdot (1 + I_2 - 1{,}06)}{\left(1 - 1{,}06^6 \cdot (1 + I_2)^{-6}\right) \cdot i_2} = 140{,}98 \text{ €}$$

de donde,

$$C_1 = \frac{C_1'}{6} = 23{,}5 \text{ €}$$
$$C_6 = C_1 \cdot 1{,}06^5 = 31{,}44 \text{ €}$$

12. Se inicia hoy un plan de ahorro con el fin de disponer de 300.000 € dentro de 20 años. Las imposiciones se realizarán mensualmente y crecerán anualmente en 60 € cada mes respecto al mismo mes del año anterior. Si la cuenta se retribuye al 3,5% efectivo anual de interés compuesto, calcular el importe de la primera y última imposición.

Solución:

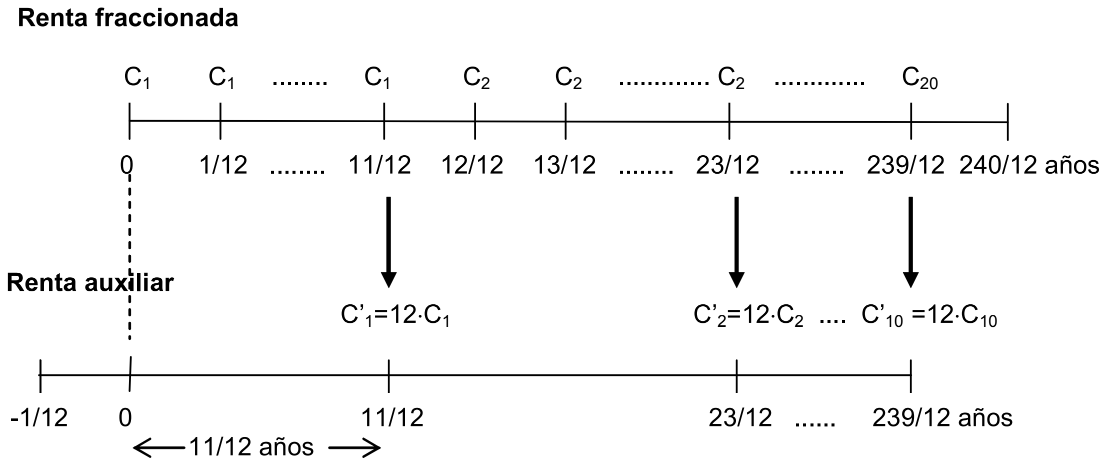
Las características de la renta fraccionada son:

- Periodo de la renta: $P = 1/12 \Rightarrow m = 12$
- Periodo de la variación: $P' = 1 \Rightarrow M = 1$
- Número de términos de la renta: $n = 240$
- Número de términos de cuantía diferente: $N = 20$
- Número de términos de igual cuantía dentro de cada periodo de variación:

$$K = \frac{\overbrace{12}^{m}}{\underbrace{1}_{M}} = \frac{\overbrace{240}^{n}}{\underbrace{20}_{N}} = 12$$

- $I_1 = i_1 = 0{,}035 \sim I_{12} = \left(1 + I_1\right)^{1/12} - 1 = 0{,}00287 \Rightarrow i_{12} = I_{12} \cdot 12 = 0{,}03445$
- Durante el primer año, cada término mensual asciende a C_1. Durante el segundo año se incrementará cada término en 60 € con respecto al mismo mes del año anterior, siendo $C_2 = C_1 + 60$. Esto es, se cumplirá que $C_r = C_1 + 60 \cdot (r-1)$ con $r = 1,2,...,20$.
- $h = 60 \Rightarrow H = 60 \cdot 12 = 720$ €, siendo H la diferencia de la variación de la renta auxiliar.
- En cuanto a los términos de la renta auxiliar, el primer término se obtiene como $C'_1 = k \cdot C_1 = 12 \cdot C_1$ que está situado precisamente donde se encuentra el último término de cuantía C_1. El segundo término es $C'_2 = k \cdot C_2 = 12 \cdot C_2 = 12 \cdot \left(C_1 + 60\right) = \underbrace{12 \cdot C_1}_{C'_1} + \underbrace{12 \cdot 60}_{H}$. Como puede apreciarse, la variación del término de la renta auxiliar es la de la renta fraccionada multiplicada por el número de términos de igual cuantía dentro de cada periodo de variación que en este caso es 12. Este resultado puede generalizarse al resto de los términos de modo que $C'_r = C'_1 + 12 \cdot 60 \cdot (r-1)$ con $r = 1,2,3,...,20$. La renta auxiliar es una renta de variación aritmética.
- $V_{20\,\text{años}} = 300.000$ €

Los esquemas temporales correspondientes a la renta fraccionada y auxiliar son:



Para calcular el importe de la primera imposición mensual se deberá plantear la ecuación de equilibrio en el vigésimo año, ya que el capital que se desea constituir no es más que el valor de la renta en $T = 20$. En este caso, si se aplica la fórmula de la renta lineal, inmediata, vencida y temporal se obtiene el valor de la renta auxiliar un mes antes del origen, en $T = -1/12$, por tanto, para obtener el valor de la renta en $T = 20$ se deberá capitalizar el resultado obtenido 241 meses y hacer la corrección por fraccionamiento:

$$V_{20} = \underbrace{\left(\left(C_1' + \frac{720}{I_1} + 20 \cdot 720 \right) \cdot a_{\overline{20}|\, I_1} - \frac{20 \cdot 720}{I_1} \right) \cdot \frac{i_1}{i_{12}}}_{V^f_{-1/12}} \cdot \left(1 + I_{12}\right)^{241} = 300.000 \text{ €}$$

despejando C_1':

$$C_1' = \left[\frac{\dfrac{300.000}{\left(1+I_{12}\right)^{241}} \cdot \dfrac{i_{12}}{i_1} + \dfrac{20 \cdot 720}{I_1}}{a_{\overline{20}|\, I_1}} \right] - \left(\frac{720}{I_1} + 720 \cdot 20 \right) = 4.389{,}02 \text{ €}$$

de donde resulta que el importe de la primera y última imposición son:

$$C_1 = 365{,}75 \text{ €}$$
$$C_{20} = C_1 + 60 \cdot (20 - 1) = 1.505{,}75 \text{ €}$$

13. Un empresario financia la compra de maquinaria para su empresa con el saldo de dos cuentas bancarias y con un préstamo.

<u>Cuenta bancaria A.</u> En esta cuenta se han ingresado, por anticipado, 24 términos trimestrales crecientes en 50 € cada trimestre. El último ingreso ha ascendido a 1.750 €. Tipo de interés compuesto del 3% anual capitalizable trimestralmente.

<u>Cuenta bancaria B</u>. La cuenta se inició hace 42 meses y durante el primer semestre se ingresaron 100 € cada mes, por anticipado. Las imposiciones crecieron en un 3% semestral acumulativo. Tipo de interés compuesto del 2,5 % anual capitalizable mensualmente.

Por la cantidad restante necesaria para la compra de la maquinaria, que se estima en 8.000 €, solicita un préstamo amortizable mediante el pago de 42 mensualidades constantes pagaderas por vencido. Tipo de interés compuesto del 7% anual capitalizable mensualmente.

Calcular:

(a) El saldo de la cuenta bancaria A.

(b) El saldo de la cuenta bancaria B.

(c) El importe de las mensualidades constantes que amortizan el préstamo.

(d) El precio de la maquinaria.

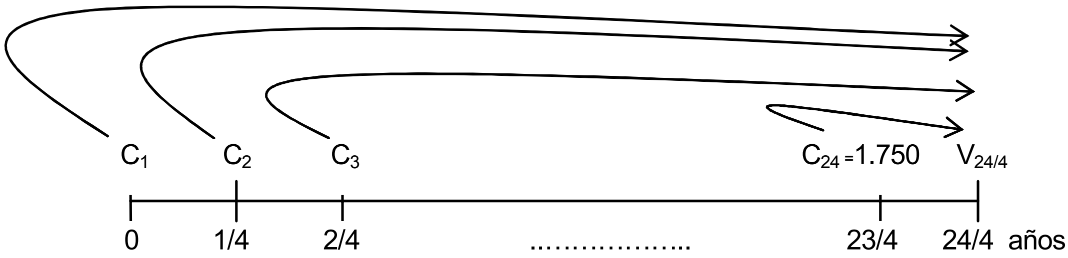
Solución:

(a) Saldo de la cuenta bancaria A

Los datos de la cuenta bancaria A son:

- Importe de la última imposición $C_{24} = 1.750$ €
- $m = 4$
- $h = 50$
- $n = 24$
- $i_4 = 0{,}03 \Rightarrow I_4 = \frac{i_4}{4} = 0{,}0075$. Para valorar la renta se tiene que utilizar el tanto efectivo trimestral ya que la frecuencia del tanto efectivo de interés tiene que coincidir con la frecuencia de la renta.

El esquema temporal de la operación es:



El saldo de la cuenta bancaria A viene dado por el valor de la renta en $T = 24/4$, $V_{24/4}$, y para poderlo calcular es necesario cuantificar el primer término de la renta C_1, el cual se obtiene de la expresión del término general de la renta variable linealmente:

$$C_r = C_1 + h \cdot (r-1) \qquad r = 1, 2, ..., 24$$

En nuestro caso para r = 24:

$$C_{24} = 1.750 = C_1 + 50 \cdot 23$$

de donde,

$$C_1 = 1.750 - 50 \cdot 23 = 600 \text{ €}$$

Al tratarse de una renta anticipada, el valor de la renta lineal, inmediata, vencida y temporal se obtiene un trimestre antes del origen, en $T = -1/4$, por tanto, para obtener el valor de la renta en $T = 24/4$ se deberá capitalizar el resultado obtenido 25 trimestres:

$$V_{24/4} = \left[\left(600 + \frac{50}{I_4} + 24 \cdot 50 \right) \cdot a_{\overline{24|}\, I_4} - \frac{24 \cdot 50}{I_4} \right] \cdot (1 + I_4)^{25} = 30.530,15 \text{ €}$$

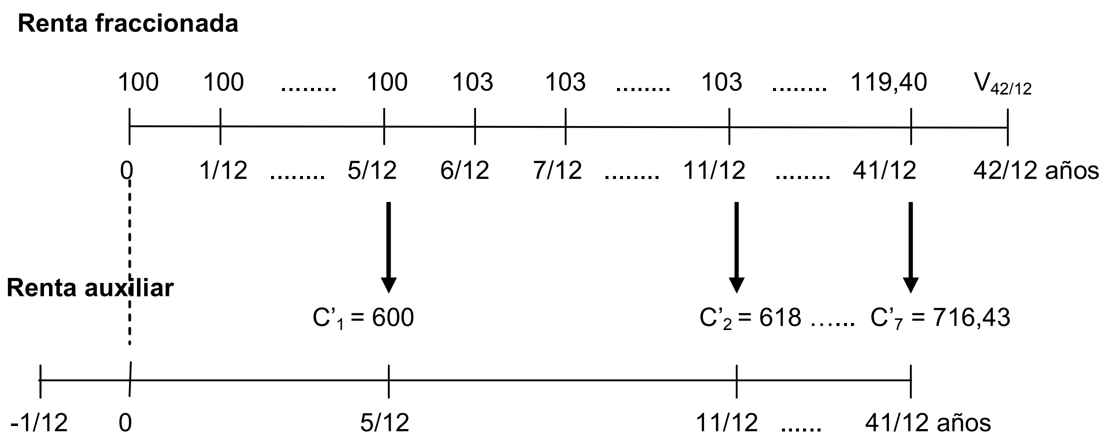
(b) Saldo de la cuenta bancaria B

Los datos de la cuenta bancaria B son:

- Periodo de pago de la renta: $P = 1/12 \Rightarrow m = 12$
- Periodo de variación : $P' = 1/2 \Rightarrow M = 2$

- Al ser $P \neq P'$ las imposiciones de la cuenta B constituyen una renta fraccionada geométrica.
- Número de términos de la renta: $n = 42$
- Número de términos de igual cuantía dentro de cada periodo de variación: $K = \frac{m}{M} = \frac{12}{2} = 6$
- Número de términos de cuantía diferente: $N = \frac{n}{k} = \frac{42}{6} = 7$
- Durante el primer semestre, cada término mensual asciende a 100 € ($C_1 = 100$ €). Durante el segundo semestre se incrementará dicho término en un 3% con respecto al del semestre anterior, de modo que $C_2 = C_1 \cdot 1{,}03 = 103$ €, cumpliéndose que $C_r = 100 \cdot 1{,}03^{r-1}$ con $r = 1, 2, 3, \ldots, 7$
- $i_{12} = 0{,}025 \Rightarrow I_{12} = \frac{i_{12}}{12} = 0{,}0020833$.
- $I_{12} = 0{,}0020833 \sim I_2 = (1 + I_{12})^{1/6} = 0{,}012565 \Rightarrow i_2 = \frac{I_2}{2} = 0{,}006283$

Los esquemas temporales correspondientes a la renta fraccionada y auxiliar son:



El saldo de la cuenta bancaria B viene dado por el valor de la renta fraccionada en $T = 42/12$, $V_{42/12}$. Si se aplica la fórmula de la renta lineal, inmediata, vencida y temporal se obtiene el valor de la renta auxiliar un mes antes del origen, en $T = -1/12$, por tanto, para obtener el valor de la renta en $T = 42/12$ se deberá capitalizar el resultado obtenido 43 meses y hacer la corrección por fraccionamiento:

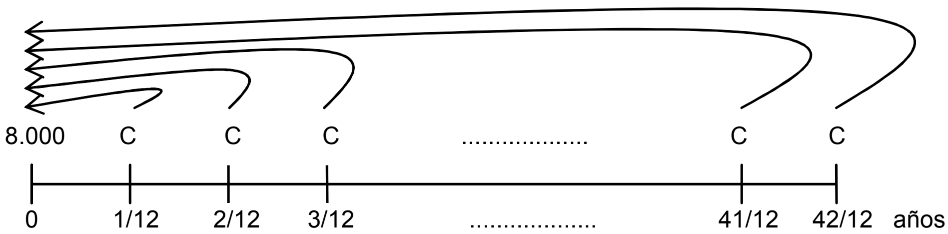
$$V_{42/12}=\frac{\overbrace{0,00628264}^{i_2}}{\underbrace{0,00208333}_{i_{12}}}\cdot\left(\overbrace{600}^{C'_1}\cdot\frac{1-1,03^7\cdot 1,01256528^{-7}}{1,01256528-1,03}\right)\cdot(1,0020833)^{43}=14.406,89\text{ €}$$

(c) Importe de las mensualidades del préstamo

Los datos del préstamo son:

- El importe del préstamo es el valor actual de la renta. $V_0=8.000$ €
- $m=12$
- $i_{12}=0,07\Rightarrow I_{12}=\frac{i_{12}}{12}=0,005833$
- $n=42$

El esquema temporal de la operación es:



Al tratarse de una renta constante, vencida, inmediata y temporal la fórmula proporciona directamente el valor de la renta en el momento $T=0$. Por tanto, la ecuación de equilibrio que permite determinar el importe de las mensualidades C es:

$$V_0=8.000=C\cdot a_{\overline{42|}I_{12}}$$

de donde C:

$$C=\frac{8.000}{a_{\overline{42|}I_{12}}}=215,31\text{ €}$$

(d) Precio de la maquinaria

El precio de la maquinaria viene dado por el saldo de las dos cuentas bancarias y por el importe del préstamo:

Precio de la maquinaria = Saldo cuenta bancaria A + Saldo cuenta bancaria B + 8.000 €

Precio de la maquinaria = 30.530,15 € +14.406,89 € + 8.000 € = 52.937,04 €

14. La sociedad X ha obtenido la concesión para la construcción y explotación de un parking durante 40 años, al cabo de los cuales revertirá al organismo público correspondiente.
La construcción tiene una duración prevista de 2 años. Para hacer frente a los gastos iniciales ocasionados por la misma la sociedad X cancela una cuenta que inició hace 6 años, en la cual había realizado las siguientes imposiciones mensuales, por anticipado: 600 € mensuales el primer año, 900 € mensuales el segundo año, 1.200 € mensuales el tercer año, y así sucesivamente. Tipo de interés compuesto 6% anual capitalizable mensualmente.
El importe restante para llevar a cabo la construcción, que se estima en 600.000 €, se financiará mediante el pago de 20 semestralidades constantes y pagaderas por vencido. Tipo de interés compuesto 5% anual capitalizable semestralmente.
Finalizada la construcción el parking entrará en funcionamiento y se prevé que generará unos beneficios de explotación, anualmente y por vencido, durante los 5 primeros años constantes, ascendiendo a 480.000 € cada año y que a partir del sexto año crecientes linealmente a razón de 60.000 € cada año.
Calcular:
(a) Saldo acumulado en la cuenta bancaria.
(b) Importe de las 20 semestralidades constantes.
(c) Calcular el beneficio neto de explotación actualizado esperado al inicio de la explotación. Tanto de valoración 3% efectivo anual de interés compuesto.

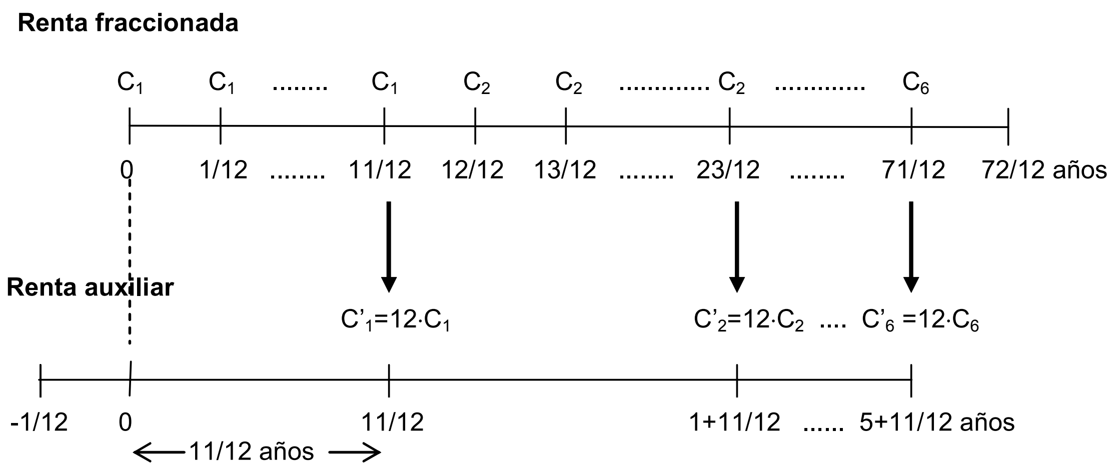
Solución:

(a) Saldo acumulado en la cuenta bancaria

Los datos de la cuenta bancaria son:

- Periodo de pago de la renta: $P = 1/12 \Rightarrow m = 12$
- Periodo de variación : $P' = 1 \Rightarrow M = 1$
- Al ser $P \neq P'$ las imposiciones de la cuenta constituyen una renta fraccionada
- Número de términos de la renta: $n = 72$
- Número de términos de igual cuantía dentro de cada periodo de variación: $K = \frac{m}{M} = \frac{12}{1} = 12$
- Número de términos de cuantía diferente: $N = \frac{n}{k} = \frac{72}{12} = 6$
- Durante el primer año, cada término mensual asciende a 600 € ($C_1 = 600$ €). Durante el segundo año cada término mensual asciende a 900 € ($C_2 = 900$ €), durante el tercer año cada término mensual asciende a 1.200 € y así sucesivamente. En definitiva, se cumplirá que $C_r = C_1 + 300 \cdot (r-1)$ con $r = 1,2,...,6$.
- El primer término de la renta auxiliar es $C'_1 = 12 \cdot C_1 = 7.200$ €, que está situado precisamente donde está situado el último término de cuantía C_1. El segundo término es $C'_2 = 12 \cdot C_2 = 12 \cdot (C_1 + 300) = 12 \cdot C'_1 + 12 \cdot 300 = 10.800$ €. Como puede apreciarse, la variación del término de la renta auxiliar es $H = 12 \cdot 300 = 3.600$ €. Este resultado puede generalizarse al resto de los términos y ello permite expresar el término general de la renta auxiliar como $C'_r = C'_1 + 3.600 \cdot (r-1)$ con $r = 1,2,3,...,6$, siendo una renta de variación lineal.
- $i_{12} = 0,06 \Rightarrow I_{12} = \frac{i_{12}}{12} = 0,005 \sim I_1 = (1 + I_{12})^{1/12} - 1 = 0,061678$

Los esquemas temporales correspondientes a las rentas fraccionada y auxiliar son:



El saldo de la cuenta viene dado por el valor de la renta fraccionada en $T = 72/12$, $V_{72/12}$. Si se aplica la fórmula de la renta lineal, inmediata, vencida y temporal se obtiene el valor de la renta auxiliar un mes antes del origen, en $T = -1/12$, por tanto, para tener el valor de la renta en $T = 72/12$ se deberá capitalizar el resultado obtenido 73 meses y hacer la corrección por fraccionamiento:

$$V_0^f = \frac{\overbrace{0,061678}^{i_1}}{\underbrace{0,06}_{i_{12}}} \cdot \left(\left(7.200 + \frac{3.600}{0,061678} + 3.600 \cdot 6 \right) \cdot \frac{1-(1,061678)^{-6}}{0,061678} - \frac{3.600 \cdot 6}{0,061678} \right) \cdot 1,005^{73} =$$

$$= 518.113,62 \text{ €}$$

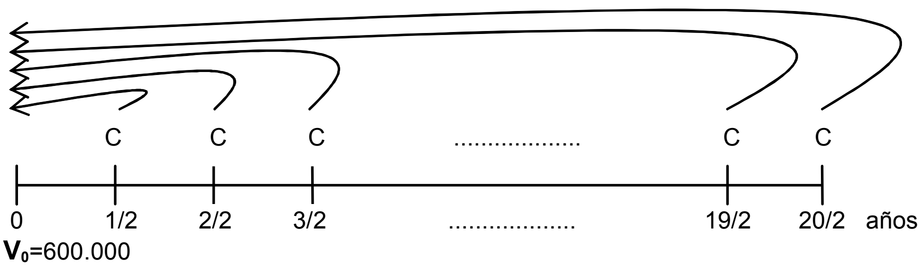
(b) Importe de las 20 semestralidades constantes

Los datos de este apartado son:

- $C = ?$
- $V_0 = 600.000$ €
- $m = 2$
- $n = 20$

- $i_2 = 0{,}05 \Rightarrow I_2 = \frac{i_2}{2} = 0{,}025$. Para valorar la renta se tiene que utilizar el tanto efectivo semestral ya que la frecuencia del tanto efectivo de interés tiene que coincidir con la frecuencia de la renta.

El esquema temporal de la operación es:



El valor en $T = 0$ de la operación asciende a 600.000 €, esto es, $V_0 = 600.000$ €, esta cuantía es el valor en $T = 0$ de las 20 semestralidades constantes, que constituyen una renta constante, inmediata, temporal y vencida:

$$V_0 = 600.000 = C \cdot \frac{1-(1+I_2)^{-20}}{I_2}$$

de donde C es,

$$C = \frac{600.000 \cdot I_2}{1-(1+I_2)^{-20}} = 38.488{,}28 \text{ €}$$

(c) Beneficio neto de explotación

Los datos respecto a los beneficios de explotación se pueden dividir en dos tramos, los 5 primeros años y los 33 últimos años.

Los datos para los 5 primeros años son:

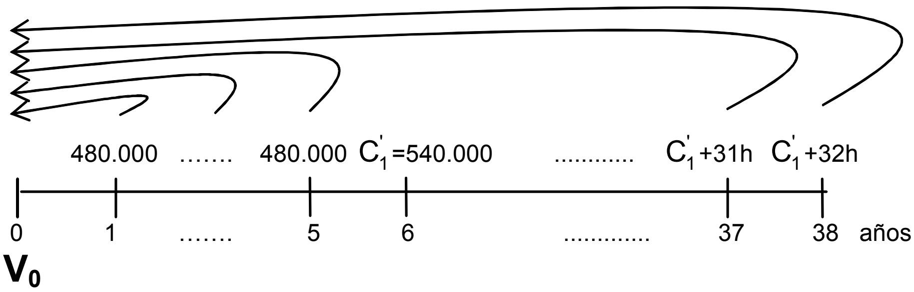
- $C = 480.000$ €
- $m = 1$
- $n = 5$
- $I_1 = 0{,}03$. Para valorar la renta se tiene que utilizar el tanto efectivo anual ya que la

frecuencia del tanto efectivo de interés tiene que coincidir con la frecuencia de la renta.

Los datos para los 33 últimos años son:

- $C'_1 = 480.000 + 60.000 = 540.000$ €
- $h = 60.000$ €
- $m = 1$
- $n = 33$
- $I_1 = 0,03$
- $d = 5$ años

El esquema temporal de los beneficios de explotación es:



Para calcular el valor actual de los cinco primeros términos de esta renta en $T = 0$ se tiene que aplicar la fórmula deducida para la renta constante, inmediata, vencida y temporal:

$$V_0 = 480.000 \cdot a_{\overline{5}|I_1} = 480.000 \cdot \frac{1 - 1{,}03^{-5}}{0{,}03} = 2.198.259{,}45 \text{ €}$$

Para hallar el valor de los últimos 33 términos esta renta en $T = 0$, V_0, se debe de aplicar la fórmula del valor actual de la renta lineal, inmediata, vencida y temporal y luego corregir el diferimiento, que en este caso es $d = 5$ años.

Al aplicar la fórmula de la renta lineal, inmediata, temporal y vencida se obtiene el valor de la renta un semestre antes del momento en que se localiza el primer término, es decir, en $T = 5$, por tanto, se debe corregir el resultado obtenido, V_5, actualizándolo 5 años para poder obtener el valor en el origen de la operación:

$$V_0 = \left(\left(540.000 + \frac{60.000}{I_1} + 60.000 \cdot 33 \right) \cdot a_{\overline{33|}\, I_1} - \frac{60.000 \cdot 33}{I_1} \right) \cdot \left(1 + I_1\right)^{-5} = 24.033.470{,}14 \text{ €}$$

De manera que el beneficio neto de explotación previsto ascenderá a:

$$2.198.259{,}45 + 24.033.470{,}14 = 26.231.729{,}59 \text{ €}$$