SOBRE EL GRUPO DE LASCAR

Rodrigo Peláez

Universitat de Barcelona. 2004.

Índice

1 Introducción

Los grupos de automorfismos asociados a los modelos de las teorías han sido estudiados a menudo por la Teoría de Modelos y han permitido solucionar antiguos problemas y abrir nuevas líneas de investigación. En particular se ha visto que pueden asignarse sistemáticamente a cada teoría ciertos grupos topológicos, conocidos como grupos de Galois generalizados. Actualmente siguen sin resolverse problemas importantes alrededor de estos grupos, como, por ejemplo, en qué casos coinciden y qué propiedades de las teorías son necesarias y suficientes para que esto se dé.

El primero en introducir este tipo de grupos fue Poizat a principio de los años ochenta. Su trabajo consistió en lo siguiente. Dados un modelo saturado M de la teoría T de cardinalidad $|M| > |T|$, y un subconjunto de parámetros $A \subset M$ con $|A| < |M|$, consideró el conjunto de las aplicaciones elementales f de la clausura algebraica de A, $acl(A)$, en sí misma, que son la identidad en A. Este conjunto resulta coincidir con las restricciones a $acl(A)$ de los automorfismos de M que son la identidad en A, y se conoce como el *grupo de Poizat sobre* A, denotado por $Aut(acl(A)/A)$. Este grupo es un grupo topológico Hausdorff, compacto y totalmente disconexo, donde los abiertos básicos están dados por los conjuntos

$$O_{a,b} = \{f \in Aut(acl(A)/A) : f(a) = b\}\,,$$

para ciertas tuplas a y b de elementos de M. Resulta ser que cuando la teoría considerada tiene eliminación de imaginarios, es decir, cuando todo imaginario es interdefinible con una tupla de elementos reales, se tiene una correspondencia de Galois entre los subgrupos cerrados de $Aut(acl(A)/A)$ y los subconjuntos B tales que $A \subseteq B \subseteq acl(A)$ y $B = dcl(B)$.

La segunda propuesta de un grupo de Galois generalizado fue debido a Lascar en [7]. Dado un modelo saturado N de la teoría T, $|N| > |T|$ y un conjunto finito de parámetros $A \subseteq N$, considera primero el subgrupo $Autf(N/A)$ de $Aut(N/A)$ generado por aquellos automorfismos que son la identidad en algún submodelo $M \prec N$ de cardinalidad menor que $|N|$ y que contiene a A. Éste resulta ser un subgrupo normal de $Aut(N/A)$ y define entonces el *grupo de Lascar de* N *sobre* A como el cociente

$$G(N/A) = Aut(N/A)/Autf(N/A),$$

que resulta ser independiente del modelo saturado inicialmente elegido. Lascar definió una topología en este grupo trabajando bajo la hipótesis de G-compacidad y caracterizando los cerrados por medio de ultraproductos. Obtuvo entonces que en este caso $G(N/A)$ era un grupo topológico Hausdorff compacto, que en algunos casos interesantes resultaba, además, totalmente disconexo.

Por otro lado, Lascar y Pillay en [8] definieron una topología en $G(N/A)$ sin hacer uso de la hipótesis de G-compacidad, caracterizando los cerrados en términos de tipo-definibilidad de ciertas órbitas de elementos bajo automorfismos. En caso de que la teoría es G-compacta, éste coincide con el grupo de Lascar recién mencionado.

En este trabajo se abordan los problemas tratados por Lascar en [7] en el contexto más general de los modelos $|T|^+$-resplandecientes y se simplifican significativamente algunas pruebas allí expuestas. Estos modelos existen siempre en cardinales arbitrariamente grandes sin añadir ninguna hipótesis conjuntista adicional a ZF. El uso de las propiedades de estos modelos se centra principalmente en la capacidad que tienen, jugando con el lenguaje, para extender funciones elementales parciales a automorfismos del modelo. Se generalizan también algunos resultados permitiendo que los conjuntos de parámetros A con los que se trabaja alcancen la cardinalidad de la teoría.

En la siguiente sección se introducen los modelos $|T|^+$-resplandecientes con los que se trabajará a lo largo de todo el trabajo y se observa que el contexto en el que se trabaja es interesante y generaliza al que utilizó Lascar originalmente. En la tercera sección se introducen los subgrupos muy normales, noción que generaliza el concepto de subgrupo normal y resulta útil para extender los automorfismos de una buena manera a las extensiones elementales de los modelos $|T|^+$-resplandecientes. En las dos secciones siguientes (4 y 5), se introduce el grupo $G(N/A)$ y el concepto de G-compacidad necesario para poder definir en la sexta sección el grupo topológico de Lascar, y tratar sus principales propiedades. Finalmente, en la última sección se introduce una nueva topología para $G(N/A)$, la de Lascar y Pillay en [8], y se observa que bajo la hipótesis de G-compacidad, ésta coincide con la anterior.

Se denotará por $\mathbb{C}$ al *modelo monstruo* de la teoría, un modelo saturado cuyo universo es una clase propia. Todo modelo de la teoría se verá como un submodelo elemental de $\mathbb{C}$ y todo conjunto de parámetros se verá como un subconjunto de $\mathbb{C}$. Si B es un conjunto cualquiera, se denotará por $\mathcal{P}_f(B)$ al conjunto de todos los subconjuntos finitos de B.

Si a es un elemento o una sucesión de elementos y A es un conjunto de parámetros, se denotará por $tp(a/A)$ al tipo de A sobre A, el conjunto de fórmulas con parámetros en A satisfechas por a. Se denotará por $Aut(\mathbb{C}/A)$ al conjunto de los automorfismos f de $\mathbb{C}$ que son la identidad en A. La siguiente propiedad de $\mathbb{C}$ es muy útil y frecuentemente utilizada: si dos sucesiones de elementos a y b (posiblemente infinitas) tienen el mismo tipo sobre un conjunto de parámetros A, existe entonces un automorfismo $f \in Aut(\mathbb{C}/A)$ tal que $f(a) = b$.

Dado un conjunto de parámetros $A \subseteq \mathbb{C}$, se dirá que un elemento o una sucesión de elementos a pertenece a la *clausura algebraica* de A, que se denotará por $acl(A)$, si existe una fórmula $\varphi(x)$ con parámetros en A tal que $a \models \varphi(x)$ y el conjunto de realizaciones de $\varphi(x)$ en $\mathbb{C}$, $\varphi(\mathbb{C})$, es finito. Se dirá que a pertenece a la *clausura definible* de A, que se denotará por $dcl(A)$, si existe una fórmula $\varphi(x)$ con parámetros en A tal que $\varphi(\mathbb{C}) = \{a\}$. Equivalentemente, se dice que $a \in acl(A)$ si la órbita de a bajo $Aut(\mathbb{C}/A)$ es finita y que $a \in dcl(A)$ si la órbita de a bajo $Aut(\mathbb{C}/A)$ tiene un sólo elemento.

Agradezco la valiosa y constante dirección por parte de Enrique Casanovas en la elaboración de este trabajo. Sus aportes fueron de gran importancia y profundizar en este tema con su guía ha sido maravilloso.

2 Modelos especiales y resplandecientes

Definición 2.1 (Modelos κ-resplandecientes). Se dice que un modelo M asociado al lenguaje $\mathcal{L}$ es *κ-resplandeciente* si para todo subconjunto $A \subseteq M$ ($|A| < \kappa$) y todo nuevo lenguaje $\mathcal{L}'_A \supseteq \mathcal{L}_A$ con estrictamente menos de κ nuevos símbolos, y todo conjunto de sentencias $\Sigma \subset \mathcal{L}'_A$ tal que $Th(M_A) \cup \Sigma$ es consistente, existe una expansión M' de M en el nuevo lenguaje de tal manera que $M' \models \Sigma$.

Definición 2.2 (Modelos expandibles). Se dice que un modelo M asociado al lenguaje $\mathcal{L}$ es *expandible* si para todo nuevo lenguaje $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ ($|\mathcal{L}'| \leq |M|$) y para todo conjunto de sentencias $\Sigma \subseteq \mathcal{L}'$ tal que $\Sigma \cup Th(M)$ es consistente, existe una expansión M' de M_A en $\mathcal{L}'$ que satisface Σ.

Definición 2.3 (Modelos especiales). Se dice que un modelo M es *especial* si y sólo si es la unión de una cadena elemental (M_β : β es un cardinal menor que $|M|$) donde cada M_β es β^+-saturado. A la cadena de los M_β, $\beta < |M|$ se le llama *cadena especializadora* de M.

Con respecto a los modelos especiales es importante resaltar los siguientes resultados que se encuentran en [5] y [**?**].

Proposición 2.4. *i) Todo modelo saturado es especial.*

ii) Todo modelo finito es especial.

iii) Todo modelo de tamaño un cardinal regular es saturado si y sólo si es especial.

iv) (GCH). Si T tiene modelos infinitos, entonces tiene modelos especiales en todo cardinal $\kappa > ||\mathcal{L}||$.

Si κ es un cardinal, $2^{<\kappa} = sup\left\{2^\beta : \beta < \kappa\right\}$.

Teorema 2.5 (Existencia de Modelos especiales). *Una teoría T tiene modelos especiales en cada cardinal κ tal que $\kappa > |T|$ y $\kappa = 2^{<\kappa}$.*

Teorema 2.6 (Unicidad de los modelos especiales). *Si M y N son dos modelos especiales elementalmente equivalentes de la misma cardinalidad, entonces son isomorfos.*

Se denotará por I_κ al conjunto de cardinales menores que κ.

Proposición 2.7. *Si N es un modelo especial de T y $A \subseteq N$ con $|A| < cf(|N|) < |N|$, entonces N_A es especial.*

Demostración. Sea $N = \bigcup\limits_{\beta \in I_\kappa} N_\beta$, donde $\kappa = |N|$ y cada N_β es β^+-saturado. Si κ es regular, N es saturado y entonces N_A es especial. Ahora bien, si κ es límite, nótese que $|I_\kappa| \geq cf(\kappa)$, pues se trata de un conjunto cofinal en κ y por lo tanto debe tener como mínimo cardinalidad $cf(\kappa)$.

Sea $f : A \longrightarrow \kappa$ la función dada por $f(a) = min\,\{\beta < \kappa : a \in N_\beta\}$. Nótese que $f[A]$ no es cofinal en κ, pues $|f[A]| \leq |A| < cf(\kappa)$. Entonces existe β^*, $|A| < \beta^* < \kappa$ tal que $\delta < \beta^*$ para cada $\delta \in f[A]$, con lo cual $A \subseteq N_{\beta^*}$. Considérese, para cada cardinal infinito $\beta < \kappa$, la estructura $N'_\beta = (N_{\beta^*})_A$, si $\beta \leq \beta^*$ y $N'_\beta = (N_\beta)_A$, si $\beta > \beta^*$. De esta manera se tiene que $N_A = \bigcup\limits_{\beta<\kappa} N'_\beta$ es especial. $\square$

El siguiente resultado puede encontrarse en [10].

Proposición 2.8. *Los modelos especiales son expandibles.*

Proposición 2.9. *Si M es un modelo especial tal que $cf(|N|) > |T|$, entonces M es $|T|^+$-resplandeciente.*

Demostración. Sea A un subconjunto de M ($|A| \leq |T|$), $\mathcal{L}'_A \supset \mathcal{L}_A$ un nuevo lenguaje con a lo sumo $|T|$ nuevos símbolos y Σ un conjunto de sentencias de $\mathcal{L}'_A$ consistente con $Th(M_A)$. Como M_A es especial, es expandible y existe entonces una expansión M' de M_A, y por tanto de M, que satisface Σ. □

Los próximos resultados sobre modelos resplandecientes pueden encontrarse en [2]. Claramente un modelo κ-resplandeciente es κ-saturado.

Teorema 2.10. *Si $\kappa \geq |T|$, entonces todo modelo de cardinalidad $\leq 2^\kappa$ puede sumergirse elementalmente en un modelo κ^+-resplandeciente de cardinalidad 2^κ.*

Teorema 2.11. *Si M es un modelo de T saturado de tamaño κ (es decir, κ-saturado de tamaño κ), entonces es κ-resplandeciente.*

El siguiente resultado aclara cómo se comportan los modelos $|T|^+$-resplandecientes en las teorías estables.

Teorema 2.12. *Si T es estable, todo modelo ω_1-resplandeciente y $|T|^+$-saturado es saturado.*

Nótese que en particular todo modelo $|T|^+$-resplandeciente es ω_1-resplandeciente. Y el siguiente resultado (teorema 14.11 de [2]) muestra que fuera de las teorías estables existen modelos $|T|^+$-resplandecientes que no son saturados, lo cual garantiza que el contexto en el que se lleva a cabo este trabajo es útil y la generalización de los resultados relevante.

Teorema 2.13. *Sea T una teoría con la propiedad de la independencia y λ un cardinal $\lambda \geq |T|$ de la forma $\lambda = 2^\kappa$ para algún cardinal κ. Dados un modelo M de cardinalidad a lo sumo λ y un cardinal regular $\mu \leq \kappa$, existen 2^λ extensiones elementales de M de cardinalidad λ no isomorfas dos a dos que son μ-resplandecientes y no μ^+-saturadas.*

Así, si T es estable, todo modelo $|T|^+$-resplandeciente es saturado. El siguiente resultado permite analizar la posibilidad de extender funciones elementales parciales a automorfismos en los modelos $|T|^+$- resplandecientes.

Proposición 2.14. *Sea $M \prec N$ un modelo de cardinalidad menor o igual que $|T|$, donde N es $|T|^+$-resplandeciente. Entonces todo automorfismo de M puede extenderse a un automorfismo de N.*

Demostración. Sea $f \in Aut(M)$. Considérese el nuevo lenguaje $\mathcal{L}'_M = \mathcal{L}_M \cup \{F\}$ con un nuevo símbolo funcional y sea Σ el conjunto de sentencias de $\mathcal{L}'_M$ que afirma que F es automorfismo y que $F(m) = f(m)$ para cada $m \in M$. Nótese que $\Sigma \cup Th(M_M)$ es consistente, pues de hecho f puede extenderse a un automorfismo de $\mathbb{C}$. Al ser $|T|^+$-resplandeciente, existe una expansión de N_M que satisface Σ.□

3 Subgrupos muy normales

A lo largo de esta sección N será un modelo $|T|^+$-resplandeciente y A será un subconjunto de N, con $|A| \leq |T|$.

DEFINICIÓN 3.1. Un subgrupo Γ de $Aut(N/A)$ se dice *muy normal* si para cada $f \in \Gamma$, cada $g \in Aut(N/A)$ y cada extensión $N' \succ N$, si existen $\bar{f}, \bar{g} \in Aut(N'/A)$ conjugados que extienden a f y g respectivamente, entonces $g \in \Gamma$.

PROPOSICIÓN 3.2. *Un subgrupo Γ de $Aut(N/A)$ es muy normal si y sólo si para cada $f \in \Gamma$ y cada $g \in Aut(N/A)$, si existen $\bar{f}, \bar{g} \in Aut(\mathbb{C}/A)$ conjugados que extienden a f y g respectivamente, entonces $g \in \Gamma$.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que Γ es muy normal. Sean $f \in \Gamma$, $g \in Aut(N/A)$, y $\bar{f}, \bar{g}, h \in Aut(\mathbb{C}/A)$ tales que $\bar{f} = h^{-1}\bar{g}h$, $f \subseteq \bar{f}$ y $g \subseteq \bar{g}$. Sea $N' \succ N$ una extensión de N cerrada bajo $\bar{f}, \bar{g}, h, \bar{f}^{-1}, \bar{g}^{-1}, h^{-1}$. Así, $\bar{f}_{\restriction N'}, \bar{g}_{\restriction N'}$ son elementos conjugados de $Aut(N'/A)$ que extienden a f y g. Al ser muy normal, $g \in \Gamma$.

Sean $f \in \Gamma, g \in Aut(N/A), N' \succ N$ y $\bar{f}, \bar{g}, h \in Aut(N'/A)$ tales que $f \subseteq \bar{f}, g \subseteq \bar{g}$ y $\bar{f} = h^{-1}\bar{g}h$. Sean $\bar{\bar{g}}, \bar{\bar{h}} \in Aut(\mathbb{C}/A)$ extensiones respectivas de $\bar{g}$ y h respectivamente, y defínase $\bar{\bar{f}} = \bar{\bar{h}}^{-1}\bar{\bar{g}}\bar{\bar{h}}$. Nótese que $\bar{\bar{f}}, \bar{\bar{g}} \in Aut(\mathbb{C}/A)$ son extensiones conjugadas de f, g; con lo cual, por hipótesis, $g \in \Gamma$. □

DEFINICIÓN 3.3. Se dice que $f, g \in Aut(N/A)$ son *fuertemente conjugados sobre A* ($f \approx_A g$) si existen $\bar{f}, \bar{g} \in Aut(\mathbb{C}/A)$ que extienden a f y g respectivamente y son conjugados ($\bar{f} \sim \bar{g}$). Es fácil ver que $\approx$ es una relación de equivalencia en $Aut(N/A)$.

Con las anteriores anotaciones es claro que un subgrupo Γ de $Aut(N/A)$ es *muy normal* si y sólo si es cerrado bajo conjugación fuerte sobre A.

Es fácil ver que todo subgrupo muy normal es normal y que la intersección de subgrupos muy normales es, de nuevo, un subgrupo muy normal. Llámese entonces $\Gamma_A(N)$ al mínimo subgrupo muy normal de $Aut(N/A)$.
Considérese la clase de equivalencia de la identidad en N bajo la relación $\approx_A$, $[id_N]_{\approx_A}$. Es claro que todo subgrupo muy normal de $Aut(N/A)$, al ser cerrado bajo conjugación fuerte, contiene a $[id_N]_{\approx_A}$.

PROPOSICIÓN 3.4. *Sean M y M' dos modelos arbitrarios tales que $A \subseteq M \prec M'$ y $f \in Aut(M'/M)$. Entonces $f \in [id_{M'}]_{\approx_A}$.*

DEMOSTRACIÓN. Considérese el nuevo lenguaje $\mathcal{L}'_{M'} = \mathcal{L}_{M'} \cup \{E, F, G\}$ con tres nuevos símbolos funcionales y $\Sigma \subseteq \mathcal{L}'_{M'}$ la teoría que afirma lo siguiente:

i) F, G, E son A-automorfismos

ii) $E^{-1}FE = G$

iii) $id_{M'} \subseteq G$

iv) $f \subseteq F$

Basta ver que Σ es consistente. Por compacidad, es suficiente verificar que para cada tupla finita $a \in M'$, existen $F, G, E \in Aut(\mathbb{C}/A)$ tales que $G = E^{-1}FE$, $G(a) = a$ y $F(a) = f(a)$.

Sean $a \in M$ y $p(x) = tp(a/A)$. Se verá que $p(x) \cup$ "$tp(xa/A) = tp(xf(a))$" es consistente. Basta ver que para cada $\varphi(x) \in p(x)$, $\varphi(x) \cup$ "$tp(xa/A) = tp(xf(a))$" es consistente; y esto se cumple pues para cada $\varphi \in p(x)$ existe $a' \in M$ tal que $M \models \varphi(a)$ y $f_{\restriction M} = id_M$. Esto implica que existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $a' \equiv_A a$ y $a'a \equiv_A a'f(a)$, con lo cual existen $E, F \in Aut(\mathbb{C}/A)$ tales que $E(\bar{a}) = \bar{a}'$ y $F(\bar{a}'\bar{a}) = \bar{a}'f(\bar{a})$. De esta manera, si se se define $G = E^{-1}FE$, se tiene que $G(\bar{a}) = E^{-1}FE(\bar{a}) = E^{-1}F(\bar{a}') = E^{-1}(\bar{a}') = \bar{a}$ y $F(\bar{a}) = f(\bar{a})$, como se quería ver. □

Con este resultado es sencillo ver que si N es $|T|^+$-resplandeciente, $[id_N]_{\approx_A}$ tiene tamaño mayor estricto que 1, y por lo tanto, que $\{id_N\}$ no es muy normal. Para ver esto tómese un submodelo propio M de N de la cardinalidad de $|T|$ y considérense (dado que N es $|T|^+$-resplandeciente) dos elementos distintos $a, b \in N \backslash M$ tales que $tp(a/M) = tp(b/M)$. Así, dada la $|T|^+$-saturación de N, existe $f \in Aut(N/M)$ tal que $f(a) = b$, con lo cual $f \approx_A id_N$, $f \neq id_N$, y por la proposición anterior $f \in [id_N]_{\approx_A}$.

Nótese también que si $f, g \in Aut(N/A)$ coinciden en algún submodelo M que contiene a A, entonces $f \equiv g \bmod \Gamma_A(N)$. Basta notar que $f^{-1}g$ se comporta como la identidad en M y aplicar la proposición.

Proposición 3.5. $\Gamma_A(N)$ *es generado, como grupo, por* $[id_N]_{\approx_A}$.

Demostración. Basta ver que $\langle [id_N]_{\approx_A} \rangle$, el subgrupo de $\Gamma_A(N)$ generado por la clase de la identidad bajo $\approx_A$, es muy normal. Al ser $[id_N]_{\approx_A}$ cerrado bajo conjugación fuerte ($\approx$), es también cerrado bajo conjugación ($\sim$), y es fácil ver entonces que $\langle [id_N]_{\approx_A} \rangle$ es normal.
Se verá ahora que es muy normal. Sea $f \in \langle [id_N]_{\approx_A} \rangle$, $g \in Aut(N/A)$ y $\bar{f}, \bar{g}, \varepsilon \in Aut(\mathbb{C}/A)$ tales que $f \subseteq \bar{f}, g \subseteq \bar{g}$, y $\bar{f} = \varepsilon^{-1}\bar{g}\varepsilon$. Se mostrará que $g \in \langle [id_N]_{\approx_A} \rangle$.
Sea M, $A \subset M \prec N$ un modelo de la cardinalidad de T cerrado bajo f, g, f^{-1}, g^{-1}. De esta manera, f, g extienden a ciertos $h_1, h_2 \in Aut(M/A)$. Basta ver que h_1, h_2 se pueden extender a ciertos $\bar{h_1}, \bar{h_2} \in Aut(N/A)$ que sean conjugados. De ser así, $\bar{h_1}f^{-1}, \bar{h_2}^{-1}g$ estarían en $Aut(N/M)$, y por tanto en $\langle [id_N]_{\approx_A} \rangle$ por la proposición anterior. Así, como $f \in \langle [id_N]_{\approx_A} \rangle$, $\bar{h_1}$ estaría en $\langle [id_N]_{\approx_A} \rangle$, y al ser normal, también $\bar{h_2}$; con lo cual g estaría en $\langle [id_N]_{\approx_A} \rangle$, como se quería.

Para ver que h_1, h_2 se pueden extender a ciertos $\bar{h_1}, \bar{h_2} \in Aut(N/A)$ conjugados, considérese el nuevo lenguaje $\mathcal{L}'_M = \mathcal{L}_M \cup \{E, F, G\}$ con tres nuevos símbolos funcionales y el conjunto de sentencias $\Sigma \subseteq \mathcal{L}'$ que afirma:

i) E, F, G son automorfismos

ii) $F(m) = f(m) = h_1(m), \forall m \in M$

iii) $G(m) = g(m) = h_2(m), \forall m \in M$

iv) $F = E^{-1}GE$

Nótese que $\Sigma \cup Th(N_M)$ es consistente, pues de hecho existen $\bar{f}, \bar{g} \in Aut(\mathbb{C}/A)$ que extienden a f y g respectivamente. Al ser $|T|^+$-resplandeciente, existe una expansión N'_M de N_M (y por tanto de N) en el lenguaje $\mathcal{L}'$ que satisface Σ, con lo cual se tiene lo deseado.$\square$

Definición 3.6. Dados un modelo N y $A \subseteq N$, se llamará *grupo de automorfismos fuertes de N sobre A*, $Autf(N/A)$, al grupo generado por el conjunto $\{f \in Aut(N/A) : f_{\restriction M} = id_M$, para algún $M \prec N$ tal que $A \subseteq M\}$.

Lema 3.7. *Sea* $f \in Aut(N/A)$ *y supóngase que existe una extensión* $\bar{f} \in Aut(\mathbb{C}/A)$ *de* f *tal que* $\bar{f}_{\restriction M} = id_M$ *para cierto* $A \subseteq M \prec \mathbb{C}$. *Entonces* $f \in Autf(N/A)$.

Demostración. Sea $M' \prec N$ tal que $A \subseteq M'$ y $|M'| = |T|$. Considérese el nuevo lenguaje $\mathcal{L}'_{M' \cup f[M']} = \mathcal{L}_{M' \cup f[M']} \cup \{F, U\}$ con un nuevo símbolo funcional, un nuevo predicado unario y nombres para denotar los elementos de M' y $f[M']$. Considérese el conjunto de sentencias $\Sigma \subseteq \mathcal{L}'_{M' \cup f[M']}$ que afirma:

i) F es automorfismo

ii) $F(a) = f(a)$, para cada $a \in M'$

iii) $U \prec N$; y

iv) $F_{\restriction U} = id_U$.

Nótese que $(\mathbb{C}, M, \bar{f})_{M' \cup f[M']} \models Th(N_{M' \cup f[M']}) \cup \Sigma$, con lo cual, al ser N un modelo $|T|^+$-resplandeciente, se tiene que existe un $f^* \in Autf(N/A)$. Así, cómo $f \circ {f^*}^{-1}$ restringido a M' es la identidad, se tiene que $f \circ {f^*}^{-1} \in Autf(N/A)$, y por tanto que $f \in Autf(N/A)$, como se quería ver. $\square$

Proposición 3.8. $Autf(N/A) = \Gamma_A(N)$.

Demostración. Sea f un elemento del conjunto de generadores de $Autf(N/A)$. Entonces $f_{\restriction M} = id_M$ para cierto $A \subseteq M \prec N$, con lo cual, por las proposiciones 3.4 y 3.5, $f \in \Gamma_A(N)$.

Si $f \in [id_N]_{\approx_A}$ (el conjunto de generadores de $\Gamma_A(N)$), entonces existen $\bar{f}, \bar{g}, \varepsilon \in Aut(\mathbb{C}/A)$ tales que $f \subset \bar{f}$, $id_N \subset \bar{g}$ y $\bar{f} = \varepsilon \bar{g} \varepsilon^{-1}$. Nótese que $\bar{f}$ restringido a εN es la identidad, con lo cual $\bar{f} \in Autf(\mathbb{C}/A)$. Al cumplirse las hipótesis del lema anterior, se tiene que $f \in Autf(N/A)$. $\square$

Proposición 3.9. *Sea* $f \in Aut(N/A)$ *y* $\bar{f} \in Aut(\mathbb{C}/A)$ *que extiende a* f. *Entonces* $f \in Autf(N/A)$ *sii* $\bar{f} \in Autf(\mathbb{C}/A)$.

Demostración. $\rightarrow$) Si $f \in Autf(N/A)$, entonces $f = f_1 f_2 ... f_n$ para cierto $n \in \omega$ y ciertos $f_i \in Aut(N/A)$ tales que $f_i \restriction M_i = id_{M_i}$ para cierto $M_i \prec N$ $(i = 1, ..., n)$. Sean $\bar{f}_1, \bar{f}_2, ..., \bar{f}_n \in Autf(\mathbb{C}/A)$ extensiones correspondientes de los f_i's y sea $f' = \bar{f}_1 \bar{f}_2 ... \bar{f}_n \in Autf(\mathbb{C}/A)$ su producto. Nótese $\bar{f}$ coincide con f' en N, con lo cual $\bar{f} \in Autf(\mathbb{C}/A)$.
$\leftarrow$) Supóngase ahora que $\bar{f} \in Autf(\mathbb{C}/A)$; entonces $\bar{f} = \bar{f}_1 \bar{f}_2 ... \bar{f}_n$ para cierto $n \in \omega$ y ciertos $\bar{f}_i \in Aut(N/A)$ tales que $\bar{f}_i \restriction M_i = id_{M_i}$ para cierto $M_i \prec N$ $(i = 1, ..., n)$. Sea $N' \prec N$ un modelo tal que $|N'| = |T|$ y $\bar{f}(N') = N'$. Considérese el nuevo lenguaje $\mathcal{L}'_{N'} = \mathcal{L}_{N'} \cup \{F_1, F_2, ..., F_n, G, U_1, U_2, ..., U_n\}$ con nuevos símbolos funcionales $\{F_1, \ldots, F_n, G\}$ y nuevos símbolos para predicados unarios $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Considérese también el conjunto de sentencias $\Sigma \subseteq \mathcal{L}'$ que afirma:

i) $F_1, F_2, ... F_n, G$ son automorfismos

ii) $U_1, U_2, ..., U_n$ son submodelos elementales

iii) $F_i \restriction U_i = id_{U_i}, \forall i \in \{1, ..., n\}$

iv) $G = F_1 F_2 ... F_n$

v) $G(n) = \bar{f}(n), \forall n \in N'$

Nótese que $\Sigma \cup Th(N_{N'})$ es consistente, ya que al interpretar cada F_i como el correspondiente $\bar{f}_i$, cada U_i como el correspondiente M_i, y G como $\bar{f}$, se tiene un modelo de $\Sigma \cup Th(N_{N'})$. Como N es $|T|^+$-resplandeciente, existe $g \in Autf(N/A)$ que coincide en N' con $\bar{f}$ y por tanto con f. De esta manera se tiene que $g^{-1} f_{\restriction N'} = id_{N'}$, con lo cual $g^{-1} f \in Autf(N/A)$, y por tanto $f \in Autf(N/A)$.$\square$

4 Grupos de Galois

En esta sección se define el grupo de Lascar asociado a un modelo $|T|^+$-resplandeciente N previamente fijado y se verifica que módulo isomorfismo, este grupo no depende de N.

Sea $f \in Aut(N/A)$. Nótese que si $f_1, f_2 \in Aut(\mathbb{C}/A)$ son extensiones de f, entonces $f_1 \equiv f_2 \mod Autf(\mathbb{C}/A)$. Esto permite definir un homomorfismo

$$\delta : Aut(N/A) \longrightarrow Aut(\mathbb{C}/A)/Autf(\mathbb{C}/A)$$

tal que para cada $f \in Aut(N/A)$, $\delta(f) = \bar{f} \cdot Aut(\mathbb{C}/A)$, donde $\bar{f}$ es cualquier extensión de f. Por la proposición 3.9, $Ker(\delta) = Autf(N/A)$, con lo cual se tiene un homomorfismo inyectivo

$$\delta' : Aut(N/A)/Autf(N/A) \longrightarrow Aut(\mathbb{C}/A)/AutfA(\mathbb{C}/A).$$

Se verá que se trata de un isomorfismo.

Proposición 4.1. $\delta' : Aut(N/A)/Autf(N/A) \longrightarrow Aut(\mathbb{C}/A)/Autf(\mathbb{C}/A)$ *es sobre, y por lo tanto es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $g \in Aut(\mathbb{C}/A)$. Se verá que existe $f \in Aut(N/A)$ tal que $\delta'(f \cdot Autf(N/A)) = g \cdot Autf(\mathbb{C}/A)$. Para esto se encontrará un $f \in Aut(N/A)$ tal que para cualquier $\bar{f} \in Aut(\mathbb{C}/A)$ tal que $f \subseteq \bar{f}$ se cumpla que $g \equiv \bar{f} \mod Autf(\mathbb{C}/A)$. Pues bien, sea $M \prec N$ un modelo tal que $|M| \leq |T|$ y $A \subseteq M$. Nótese que por la $|T|^+$-saturación de N (pues es $|T|^+$-resplandeciente), existe $M' \prec N$ tal que $tp(M'/M) = tp(g(M)/M)$. Sea entonces $h \in Aut(\mathbb{C}/M)$ tal que $h(g(M)) = M'$. Considérese el nuevo lenguaje $\mathcal{L}'_{M'} = \mathcal{L}_{M'} \cup \{F\}$ con un nuevo símbolo funcional y $\Sigma \subset \mathcal{L}'_{M'}$ el conjunto de sentencias que afirma:

i) F es un automorfismo

ii) $F(m) = h(g(m))$, para cada $m \in M$

Claramente $\Sigma \cup Th(N_M)$ es consistente (al interpretar F como hg en el modelo monstruo), con lo cual, al ser N $|T|^+$-resplandeciente, se tiene que existe un $f \in Aut(N/A)$ que coincide con hg en M. Esto implica que cualquier extensión $\bar{f}$ de f a $Aut(\mathbb{C}/A)$ estará en la misma clase que hg módulo $Autf(\mathbb{C}/A)$. Como $h(M) = M$, $h \in Autf(\mathbb{C}/A)$, con lo cual $g \equiv \bar{f} \mod Autf(\mathbb{C}/A)$, y entonces $\delta'(f \cdot Autf(N/A)) = g \cdot Autf(\mathbb{C}/A)$.□

Con lo anterior, $Aut(N/A)/Autf(N/A)$ no depende de N módulo isomorfismo. Se llamará *grupo de Lascar sobre* A al grupo $G(N/A) = Aut(N/A)/Autf(N/A)$. Si no se quiere mencionar N, se escribirá $G(A)$ en lugar de $G(N/A)$.

Proposición 4.2. *La cardinalidad de* $G(A)$ *no es mayor que* $2^{|T|}$.

Demostración. Sea $M \prec \mathbb{C}$ un modelo de cardinalidad $|T|$ tal que $A \subseteq M$ y sea m una enumeración de M. Sean $f, g \in Aut(\mathbb{C}/A)$. Nótese que si $tp(f(m)/M) = tp(g(m)/M)$, entonces existe $h \in Aut(\mathbb{C}/M)$ (y por tanto $h \in Autf(\mathbb{C}/A)$) tal que $g(m) = hf(m)$, con lo cual $f \equiv hf \equiv g \mod Autf(\mathbb{C}/A)$. Así, $|G(A)| \leq |S(M)| \leq 2^{|T|}$.
□

Se dirá que una relación de equivalencia es finita si tiene un número finito de clases de equivalencia.

Definición 4.3. Sea $A \subseteq \mathbb{C}$, $n \in \omega$ y $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{C}^n$. Se dice que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ *tienen el mismo tipo fuerte sobre* A ($stp(\bar{a}/A) = stp(\bar{b}/A)$) si y sólo si para cada relación de equivalencia finita R en $\mathbb{C}^n$ definible sobre A, se tiene que $\mathbb{C} \models R(\bar{a}, \bar{b})$.

Nótese que para cada modelo N que contenga a A, y cada par de tuplas $\bar{a}, \bar{b} \in N^n$, $stp(\bar{a}/A) = stp(\bar{b}/A)$) si y sólo si para cada relación de equivalencia finita R en N^n definible sobre A, se tiene que $N \models R(\bar{a}, \bar{b})$.

Definición 4.4. Dado un modelo N se define el grupo $\Gamma^*(N/A)$ como el estabilizador de los tipos fuertes sobre A, es decir,

$$\Gamma^*(N/A) = \{f \in Aut(N/A) \;:\; \text{para cada } n \in \omega, \text{ cada relación de equivalencia finita } R \text{ en } N^n \text{ definible sobre } A, \text{ y cada } \bar{a} \in N^n, \text{ se tiene que} \models R(\bar{a}, f(\bar{a}))\}$$

Ya que cada automorfismo $f \in Aut(N/A)$ se extiende de manera única a un automorfismo $\bar{f} \in Aut(N^{eq}/A)$ en el universo imaginario, abusando de la notación se denotará por $Aut(N/acl^{eq}(A))$ al conjunto de A-automorfismos de N cuyas extensiones a N^{eq} fijen $acl^{eq}(A)$.

En el siguiente resultado se verá que $\Gamma^*(N/A) = Aut(N/acl^{eq}(A))$, y en adelante se utilizará esta notación para referirse a dicho grupo. Antes se mencionará un resultado clásico y útil que se utilizará para este fin.

Lema 4.5. *Si R es una relación definible sobre un conjunto de parámetros B y es A-invariante para un cierto conjunto de elementos A, entonces R es A-definible.*

Proposición 4.6. $\Gamma^*(N/A) = Aut(N/acl^{eq}(A))$

Demostración. $\subseteq$) Sea $f \in \Gamma^*(N/A)$ y sea $e \in acl^{eq}(A)$ un elemento de la clausura imaginaria de A, es decir, $e = n/E$ para cierta tupla $n \in N$ y cierta relación de equivalencia 0-definible E de tal manera que la órbita de e bajo $Aut(N/A)$ es finita. Se verá que $nEf(n)$ y se tendrá entonces que $f(e) = e$ y por tanto que $f \in Aut(N/acl^{eq}(A))$. Sean entonces $e_1, e_2, \ldots, e_m$ los elementos de la órbita de e bajo $Aut(N/A)$, y sean $n_1 \in e_1, \ldots, n_m \in e_m$ representantes de dichas clases. Considérese la relación de equivalencia F dada por

$$\begin{aligned} xFy \quad \Leftrightarrow \quad & xEy \wedge (xEn_1 \vee xEn_2 \vee \cdots \vee xEn_m) \\ & \vee \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \neg xEn_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} \neg yEn_i \right) \end{aligned}$$

Nótese que F es una relación de equivalencia finita A-invariante, y por el lema anterior A-definible. Así, como $f \in \Gamma^*(N/A)$, se tiene que $nFf(n)$ y por tanto que $nEf(n)$, como se quería.
$\supseteq$) Sea $f \in Aut(N/acl^{eq}(A))$, E una relación de equivalencia finita sobre A y $n \in N$ una tupla cualquiera de la longitud correcta. Nótese que $n/R \in acl^{eq}(A)$, pues su órbita es finita bajo $Aut(N/A)$ al ser E finita y A-definible. Así, se tiene que $f(n/E) = n/E$ y por tanto que $N \models R(n, f(n))$, con lo cual $f \in \Gamma^*(N/A)$. □

Proposición 4.7. *$Aut(N/acl^{eq}(A))$ es un subgrupo muy normal de $Aut(N/A)$. Y por lo tanto siempre se tiene que $Autf(N/A) \subseteq Aut(N/acl^{eq}(A))$.*

Demostración. Sea $f \in Aut(N/acl^{eq}(A))$ y sea $g \in Aut(N/A)$ un conjugado fuerte de f. Se verá que $g \in Aut(N/acl^{eq}(A))$. Sea $n \in \omega$, R una relación de equivalencia finita en N^n definible sobre A y $\bar{a} \in N^n$. Al ser conjugados fuertes, existen $\bar{f}, \bar{g}, \varepsilon \in Aut(\mathbb{C}/A)$

tales que $f \subseteq \bar{f}, g \subseteq \bar{g}$ y $\bar{g} = \varepsilon \bar{f} \varepsilon^{-1}$. Sea entonces $\bar{a}' \in N^n$ tal que $R(\bar{a}, \varepsilon^{-1}(\bar{a}))$ (existe al ser R finita). Por hipótesis sobre f, se tiene que $\models R(\bar{a}', \bar{f}(\bar{a}'))$ y, al ser $\bar{f}$ un automorfismo, se tiene también que $\models R(\bar{f}(\bar{a}'), \bar{f}(\varepsilon^{-1}(\bar{a})))$. Así, $\models R(\varepsilon^{-1}(\bar{a}), \bar{f}(\varepsilon^{-1}(\bar{a})))$; y aplicando ε, se concluye que $\models R(\bar{a}, f(\bar{a}))$, como se quería. $\square$

Al estudiar estabilidad, se dice que un tipo $p \in S(A)$ es estacionario si para cada conjunto de parámetros $B \supseteq A$, p tiene una única extensión no bifurcante sobre B.

Los siguientes dos resultados son clásicos en teoría de estabilidad y son utilizados en la prueba de la proposición 4.10. Su demostración puede verse en [1].

TEOREMA 4.8 (TEOREMA DE LA RELACIÓN DE EQUIVALENCIA FINITA). *Sea $A \subseteq M$ y $p \in S_n(A)$ un tipo sobre A. Supóngase que $p_1, p_2 \in S_n(M)$ son dos extensiones distintas y no bifurcantes de p. Entonces existe una relación de equivalencia finita R definible sobre A tal que*

$$p_1(x) \wedge p_2(y) \vdash \neg R(x, y))$$

PROPOSICIÓN 4.9. *En las teorías estables los tipos fuertes son estacionarios.*

El siguiente resultado muestra que en las teorías estables tener el mismo tipo fuerte equivale a tener el mismo tipo fuerte de Lascar, noción que se introducirá en la siguiente sección.

PROPOSICIÓN 4.10. *Si T es estable, entonces $Autf(N/A) = Aut(N/acl^{eq}(A))$*

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que $Aut(N/acl^{eq}(A)) \subseteq Autf(N/A)$. Sea $f \in Aut(N/acl^{eq}(A))$. Sea M un modelo tal que $A \subseteq M$ y $N \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A M$. Nótese que para cada $a \in N$, $stp(a/A) = stp(f(a)/A)$; y además $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A M$ y $f(a) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A M$, es decir, $tp(a/M)$ y $tp(f(a)/M)$ son extensiones no bifurcantes de $tp(a/A)$ y $tp(f(a)/A)$. De esta manera, por la proposición 4.9, se tiene que $tp(a/M) = tp(f(a)/M)$, con lo que f puede extenderse a un $\bar{f} \in Aut(\mathbb{C}/M)$ y por tanto se concluye que $f \in Autf(N/A)$. $\square$

5 G-compacidad

En esta sección se trabajará con un modelo $|T|^+$-resplandeciente N fijo.

Definición 5.1. Si M es un modelo arbitrario y A es un subconjunto de M, se llamará $Laut(M/A)$ al conjunto de automorfismos de M sobre A que se pueden extender a elementos de de $Autf(\mathbb{C}/A)$.

Definición 5.2. *(G-compacidad relativa)* Sea N un modelo $|T|^+$-resplandeciente de T y A un subconjunto de N. Se dice que T es G-compacta sobre A si para toda familia $(f_i)_{i\in I}$ de $Autf(N/A)$ y todo ultrafiltro $\mathcal{U}$, se tiene que $(f_i)/\mathcal{U} \in Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$.

Definición 5.3. *(G-compacidad)* Se dice que T es G-compacta si y sólo si es G-compacta sobre todo subconjunto finito A de N un modelo $|T|^+$-resplandeciente de T.

En [9], Ziegler construyó un ejemplo de una teoría no G-compacta, cuya existencia fue un problema abierto durante mucho tiempo. Actualmente la siguiente pregunta interesante sigue sin ser respondida: ¿Si T es G-compacta, lo es también $T(A)$ para un conjunto de parámetros A arbitrario?

Observación 5.4. *Si para cualquier modelo M de T y cualquier subconjunto finito A de M, $Aut(M/acl^{eq}(A)) = Laut(M/A)$, entonces T es G-compacta.*

Demostración. Sea N un modelo $|T|^+$-resplandeciente de T. Sea $(f_i)_{i\in I} \subseteq Autf(N/A)$ una familia arbitraria de A-automorfismos y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro cualquiera sobre I. Nótese que $(f_i)/\mathcal{U} \in Aut(N^{\mathcal{U}}/acl^{eq}(A)) = Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$, con lo cual T es G-compacta. □

Proposición 5.5. *Si T es estable, entonces es G-compacta.*

Demostración. Sea N un modelo $|T|^+$-resplandeciente de T. Nótese que por la proposición 4.10, $Aut(N/acl^{eq}(A)) = Autf(N/A)$, y nótese que $Autf(N/A) = Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$ por la proposición 3.9. Se cumplen las hipótesis de la observación anterior y se concluye entonces que T es G-compacta. □

Definición 5.6. *(Tipos fuertes de Lascar).* Sea $A \subseteq \mathbb{C}$, $n \in \omega$ y $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{C}^n$. El tipo fuerte de Lascar de $\bar{a}$ sobre A, $Lstp(\bar{a}/A)$, es la órbita de $\bar{a}$ bajo $Autf(\mathbb{C}/A)$. Así, $\bar{a}$ y $\bar{b}$ tienen el mismo tipo fuerte de Lascar sobre A si y sólo si existe un $f \in Autf(\mathbb{C}/A)$ tal que $f(\bar{a}) = \bar{b}$.

$Aut(N/A)$ puede verse como un grupo topológico. Una base de abiertos para su topología está dada por $\left\{O_{\bar{a},\bar{b}} : n \in \omega, \bar{a}, \bar{b} \in N^n\right\}$, donde $O_{\bar{a},\bar{b}} = \left\{f \in Aut(N/A) : f(\bar{a}) = \bar{b}\right\}$. Para ver que se trata de una base basta notar que $O_{\bar{a},\bar{b}} \cap O_{\bar{c},\bar{d}} = O_{\overline{ac},\overline{bd}}$ y que su unión es $Aut(N/A)$. Y para verificar que se trata efectivamente de un grupo topológico, basta ver que la operación $\delta : Aut(N/A) \times Aut(N/A) \longrightarrow Aut(N/A)$ dada por $\delta(\langle f, g\rangle) = f \circ g^{-1}$ es continua. Nótese que la preimagen de un abierto básico está dada por:

$$\delta^{-1}(O_{\bar{a},\bar{b}}) = \bigcup_{\bar{c}\in N^n} (O_{\bar{c},\bar{b}} \times O_{\bar{c},\bar{a}}),$$

lo cual garantiza su continuidad.

Proposición 5.7. *Si T es G-compacta, entonces $Autf(N/A)$ es cerrado en $Aut(N/A)$.*

Demostración. Sea f un punto límite de $Autf(N/A)$. Entonces para cada subconjunto finito $s \in \mathcal{P}_f(N)$ existe $f_s \in Autf(N/A)$ tal que $f_s \restriction s = f \restriction s$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathcal{P}_f(N)$ tal que para cada $s \in \mathcal{P}_f(N)$, $\{s' \in \mathcal{P}_f(N) : s \subset s'\} \in \mathcal{U}$. De esta manera, $(f_s)/\mathcal{U}$ extiende a f y por G-compacidad pertenece a $Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$, y por tanto $f \in Autf(N/A)$ (proposición 3.9). □

Proposición 5.8. *Si T es G-compacta, entonces $Autf(\mathbb{C}/A)$ es cerrado en $Aut(\mathbb{C}/A)$.*

Demostración. Sea κ un cardinal tal que $\kappa = 2^{<\kappa}$ y $cf(k) > |T|$. (Basta, por ejemplo, tomar $\kappa = \beth_\lambda$ para un λ cardinal límite de cofinalidad suficientemente grande).

Sea $f \in Aut(\mathbb{C}/A)$ un punto límite de $Autf(\mathbb{C}/A)$. Para cada $s \in \mathcal{P}_f(\mathbb{C})$, sea entonces $f_s \in Autf(\mathbb{C}/A)$ tal que $f \restriction s = f_s \restriction s$. Se construirá un modelo especial N^* de tamaño κ de tal manera que $f \restriction N^* \in Aut(N^*/A)$ y sea un punto límite de $Autf(N^*/A)$. Así, N^* sería un modelo $|T|^+$-resplandeciente (proposición 2.9), y por el resultado anterior junto con la proposición 3.9, se tendría que $f \in Autf(\mathbb{C}/A)$, con lo cual $Autf(\mathbb{C}/A)$ sería cerrado en $Aut(\mathbb{C}/A)$.
Considérese entonces una cadena elemental de modelos

$$\left\{N^*_\beta : \omega \leq \beta < \kappa, \beta \text{ cardinal}\right\}$$

construida inductivamente de la siguiente manera:

- N_ω es un modelo ω^+-saturado de tamaño 2^ω.
- Si $\beta < \kappa$ es cardinal límite, sea $N'_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} N^*_\gamma$ y N^*_β una extensión elemental de N'_β β^+-saturada de tamaño 2^β.
- Si $\beta = \gamma^+$, sea N'_β una extensión elemental de N^*_γ cerrada bajo $\left\{f, f^{-1}, f_s, f_s^{-1} : s \in \mathcal{P}_f(N^*_\gamma)\right\}$ de la misma cardinalidad y N^*_β una extensión elemental de N'_β de tamaño 2^β.

Sea entonces $N^* = \bigcup\limits_{\beta<\kappa} N^*_\beta$. Claramente N^* es un modelo especial de tamaño κ, y por tanto $|T|^+$-resplandeciente. Es fácil ver que es cerrado bajo $\left\{f, f^{-1}, f_s, f_s^{-1} : s \in \mathcal{P}_f(N^*)\right\}$, con lo cual se tiene lo deseado. □

Proposición 5.9. *Sea A un subconjunto de N con $|A| \leq |T|$, y sean $a, b \in N$. Entonces $Lstp(a/A) = Lstp(b/A)$ sii existe $f \in Autf(N/A)$ tal que $f(a) = b$.*

Demostración. Supóngase que $Lstp(a/A) = Lstp(b/A)$ y sea $\bar{f} \in Autf(\mathbb{C}/A)$ tal que $\bar{f}(a) = \bar{f}(b)$. Sea M un modelo de cardinalidad $|T|$ tal que $A \cup \{a, b\} \subset M \prec N$. Nótese que por la $|T|^+$-saturación de N existe $M^* \prec N$ tal que $tp(m^*/M) = tp(\bar{f}(m)/M)$, donde m^*, m son enumeraciones de M^* y M respectivamente. Sea entonces $h \in Aut(\mathbb{C}/M)$ tal que $h(\bar{f}(m)) = m^*$. Considérese el nuevo lenguaje $\mathcal{L}'_M = \mathcal{L}_M \cup \{G\}$ con un nuevo símbolo funcional y considérese el conjunto de sentencias $\Sigma \subseteq \mathcal{L}'_M$ que afirma lo siguiente:

i) G es un automorfismo

ii) $\forall n \in M$, $G(n) = h(\bar{f}(n))$

iii) $G(a) = b$

Nótese que $\Sigma \cup Th(N_M)$ es consistente, interpretando en el modelo monstruo a G como $h\bar{f}$. Como N es $|T|^+$-resplandeciente, existe $f \in Aut(N/A)$ tal que $f(a) = b$ y tal que cualquier extension $f' \in Aut(\mathbb{C}/A)$ de f, coincide con $h\bar{f}$ en M. Como $h \restriction M = id_M$, se tiene que $h \in Autf(\mathbb{C}/A)$ y $h\bar{f} \in Autf(\mathbb{C}/A)$; con lo cual $f' \in Autf(\mathbb{C}/A)$ y por la proposición 3.9, $f \in Aut(N/A)$.
La otra dirección es clara. □

Se verá en las próximas proposiciones que la relación *tener el mismo tipo fuerte de Lascar sobre* A es tipo-definible si la teoría es G-compacta (sobre A).

Primero se verá que $Lstp(a/A) = Lstp(b/A)$ depende únicamente del tipo sobre A de la tupla ab. Y luego se verá que si para cada fórmula del tipo sobre A de ab existen a', b' con el mismo tipo fuerte de Lascar sobre A y tales que $a'b'$ satisface dicha fórmula, entonces $Lstp(a/A) = Lstp(b/A)$.

PROPOSICIÓN 5.10. *Sean* $A \subseteq \mathbb{C}$ *con* $|A| \leq |T|$, $a, b \in \mathbb{C}$, *y* $a', b' \in \mathbb{C}$ *tales que* $Lstp(a/A) = Lstp(b/A)$ *y* $tp(ab/A) = tp(a'b'/A)$. *Entonces* $Lstp(a'/A) = Lstp(b'/A)$.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, existen $f \in Autf(\mathbb{C}/A)$, $g \in Aut(\mathbb{C}/A)$ tales que $f(a) = b$ y $g(ab) = a'b'$. Considérese entonces el automorfismo $h = gfg^{-1}$. Al ser conjugado de f, $h \in Autf(\mathbb{C}/A)$ y es tal que $h(a') = gfg^{-1}(a') = gf(a) = g(b) = b'$. Así, $Lstp(a'/A) = Lstp(b'/A)$. □

PROPOSICIÓN 5.11. *Sea* T *una teoría* G*-compacta,* $a, b \in N^n$. *Supóngase que para cada fórmula* $\varphi \in tp(ab/A)$ *existen* $a', b' \in N^n$ *tales que* $\models \varphi(a', b')$ *y además* $Lstp(a'/A) = Lstp(b'/A)$. *Entonces* $Lstp(a/A) = Lstp(b/A)$.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $s \in \mathcal{P}_f(tp(ab/A))$, sean $a_s, b_s \in N^n$ y $f_s \in Autf(N/A)$ (proposición 5.9) tales que $f_s(a_s) = b_s$ y $\models \bigwedge_{\varphi \in s} \varphi(a_s, b_s)$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathcal{P}_f(tp(ab/A))$ tal que $\{s : s_0 \subset s\} \in \mathcal{U}$, para cada $s_0 \in \mathcal{P}_f(tp(ab/A))$. Sea $f' = (f_s)/\mathcal{U}$, $a' = (a_s)/\mathcal{U}$ y $b' = (b_s)/\mathcal{U}$. Nótese que que $Lstp(a'/A) = Lstp(b'/A)$ (pues $f' \in Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$), y $tp(ab/A) = tp(a'b'/A)$. Por la proposición anterior se tiene entonces que $Lstp(a/A) = Lstp(b/A)$. □

COROLARIO 5.12. *Si* T *es* G*-compacta, la relación tener el mismo tipo fuerte de Lascar es tipo-definible.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior se tiene que

$$Lstp(a/A) = Lstp(b/A) \text{ sii}$$

$$\models \bigwedge \{\varphi(a, b) : \forall c, d \; Lstp(c/A) = Lstp(d/A) \text{ implica que } \models \varphi(c, d)\}.$$

□

A continuación se verá que las propiedades descritas en 5.7 y 5.12 caracterizan las teorías G-compactas. Para esto se definirán primero ciertas funciones de gran utilidad en la demostración.

DEFINICIÓN 5.13. Una función f se dice *buena* sobre un conjunto A si es una aplicación elemental tal que para cada $n \in \omega$ y cada $\bar{a} \in dom(f)^n$, existe un $g \in Autf(\mathbb{C}/A)$ tal que $g(\bar{a}) = f(\bar{a})$.

LEMA 5.14. *Sea* A *un conjunto. Supóngase que para todo* $n \in \omega$ *se tiene que la relación* $Lstp(\bar{x}/A) = Lstp(\bar{y}/A)$ *es tipo-definible. Entonces toda función buena sobre* A *puede extenderse a un punto límite de* $Autf(\mathbb{C}/A)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea f una función buena sobre A. Sea $\{a_\alpha : \alpha \in Ord\}$ una enumeración de $\mathbb{C}$. Se construirá una sucesión de funciones $\{f_\alpha : \alpha \in Ord\}$ tal que: *i)* $a_\alpha \in dom(f_{\alpha+1}) \cap rec(f_{\alpha+1})$, para cada ordinal α, *ii)* f_α es buena sobre A, *iii)* $f_\beta \subset f_\alpha$ si $\beta \leq \alpha$.

De esta manera, $\bar{f} = \bigcup_{\alpha \in Ord} f_\alpha$ sería un punto límite de $Autf(\mathbb{C}/A)$, ya que para toda tupla finita $\bar{a} \in \mathbb{C}^n$ existiría un $\alpha \in Ord$ tal que $\bar{a} \in dom(f_\alpha)^n$ y entonces existiría un $g \in Autf(\mathbb{C}/A)$ tal que $f_\alpha(\bar{a}) = g(\bar{a})$. La construcción se hace por inducción transfinita, así:

- $f_0 = f$
- Si α es un ordinal límite, $f_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta$
- Si $a_\alpha \in dom(f_\alpha) \cap rec(f_\alpha)$, entonces $f_{\alpha+1} = f_\alpha$. En caso contrario, basta verificar que
$$\bigcup_{n\in\omega} \bigcup_{I\subseteq\alpha|I|=n} p_{n+1}((a_i : i \in I)a_\alpha; (f_\alpha(a_i) : i \in I)x)$$
es consistente, donde $p_{n+1}(\bar{x}; \bar{y})$ es el tipo que define la relación $Lstp(\bar{x}/A) = Lstp(\bar{y}/A)$. Por compacidad, basta verificar que un subconjunto finito arbitrario de fórmulas es consistente. Y esto se tiene gracias a que f_α es buena, ya que bastaría entonces considerar la imagen de a_α bajo cierto $g \in Autf(\mathbb{C}/A)$ que coincidiera con f_α en la tupla (finita) nombrada en el conjunto finito de fórmulas considerado. Para añadir a_α a $rec(f_{\alpha+1})$ basta repetir el proceso considerando f_α^{-1}.

Se tiene entonces la sucesión buscada.□

Proposición 5.15. *T es G-compacta sobre A si y sólo si para cada modelo $|T|^+$-resplandeciente N que contenga A, $Autf(N/A)$ es cerrado en $Aut(N/A)$, y para cada $n \in \omega$ y $|\bar{x}| = |\bar{y}| = n$, la relación $Lstp(\bar{x}/A) = Lstp(\bar{y}/A)$ es tipo-definible.*

Demostración. Para ver que T es G-compacta sobre A, sea $\{f_i : i \in I\} \subset Autf(N/A)$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I. Se verá que $(f_i)/\mathcal{U}$ es un elemento de $Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$. Por el lema anterior y dado que $Autf(\mathbb{C}/A)$ es cerrado en $Aut(\mathbb{C}/A)$, basta verificar que $(f_i)/\mathcal{U}$ es una función buena. Sea $n \in \omega$ y $\bar{a} = (\bar{a}_i)/\mathcal{U} \in (N^{\mathcal{U}})^n$. Nótese que para cada $i \in I$ y cada $\bar{a}_i \in N^n$, $N \models p_n(\bar{a}_i, f_i(\bar{a}_i))$ (donde $p_n(\bar{x}, \bar{y})$ es el tipo que define la relación $Lstp(\bar{x}/A) = Lstp(\bar{y}/A)$). Como $I \in \mathcal{U}$, se tiene que $N^{\mathcal{U}} \models p_n((\bar{a}_i)/\mathcal{U}, (f_i(\bar{a}_i))/\mathcal{U})$, con lo cual $(f_i)/\mathcal{U}$ es buena, como se quería ver. La otra dirección se tiene a partir de los resultados 5.7 y 5.12. □

Corolario 5.16. *T es G-compacta sobre A si y sólo si $Autf(\mathbb{C}/A)$ es cerrado en $Aut(\mathbb{C}/A)$, y para cada $n \in \omega$ y $|\bar{x}| = |\bar{y}| = n$, la relación $Lstp(\bar{x}/A) = Lstp(\bar{y}/A)$ es tipo-definible.*

6 El grupo topológico $G(N/A)$ de Lascar

Siguiendo la línea de Lascar en [7] para dotar de una topología a $G(N/A)$, se asumirá en este apartado que la teoría T es G-compacta.

HIPÓTESIS: T ES G-COMPACTA.

Dada una familia $(g_i)_{i\in I}$ de elementos de $G(N/A)$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en I, se definirá a continuación un nuevo elemento $(g_i)/\mathcal{U}$ de $G(N/A)$ (el ultraproducto de la familia) con el fin de caracterizar los cerrados de la topología en $G(N/A)$, en la cual ser cerrado será equivalente a cierta noción de ser cerrado bajo ultraproductos. Para esto, son importantes las siguientes propiedades.

PROPOSICIÓN 6.1. *Sea $(f_i)_{i\in I}$ una familia de elementos de $Aut(N/A)$. Entonces existe $f \in Aut(N/A)$ tal que $f^{\mathcal{U}} \equiv (f_i)/\mathcal{U}$ mod $Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$. Más aún:*

i) Si $f_1 \in Aut(N/A)$ es tal que $f_1^{\mathcal{U}} \equiv (f_i)/\mathcal{U}$ mod $Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$, entonces $f \equiv f_1$ mod $Autf(N/A)$.

ii) Supóngase además que T es G-compacta. Si para cada $i \in I$ $f_i' \equiv f_i$ mod $Autf(N/A)$ y $f' \in Aut(N/A)$ es tal que $f'^{\mathcal{U}} \equiv (f_i')/\mathcal{U}$ mod $Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$, entonces $f \equiv f'$ mod $Autf(N/A)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g \in Aut(\mathbb{C}/A)$ cualquier extensión de $(f_i)/\mathcal{U}$. Por la demostración de la proposición 4.1, existe $f \in Aut(N/A)$ tal que para cualquier extensión $\bar{f} \in Aut(\mathbb{C}/A)$ de f, $\bar{f} \equiv g$ mod $Autf(\mathbb{C}/A)$. Así, como $f^{\mathcal{U}}$ extiende a f, también cualquier extensión suya a $Aut(\mathbb{C}/A)$ es equivalente a g módulo $Autf(\mathbb{C}/A)$, con lo cual $f^{\mathcal{U}} \equiv (f_i)/\mathcal{U}$ mod $Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$.
$i)$ De la hipótesis se sigue que $(f^{\mathcal{U}})^{-1}f_1^{\mathcal{U}}$ es un elemento de $Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$, con lo cual $(f^{-1}f_1)^{\mathcal{U}} \in Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$. Así, como $(f^{-1}f_1)^{\mathcal{U}}$ extiende a $f^{-1}f_1$, entonces $f^{-1}f_1 \in Autf(N/A)$, y por lo tanto $f_1 \equiv f$ mod $Autf(N/A)$.
$ii)$ Nótese que

$$\begin{aligned} f'^{\mathcal{U}}(f^{\mathcal{U}})^{-1} \quad &\equiv (f_i')/\mathcal{U}((f_i)/\mathcal{U})^{-1} \equiv (f_i')/\mathcal{U}(f_i^{-1})/\mathcal{U} \\ &\equiv (f'f^{-1})^{\mathcal{U}} \equiv (f_i'f_i^{-1})/\mathcal{U} \text{ mod } Laut(N^{\mathcal{U}}/A) \end{aligned}$$

Por G-compacidad, $(f_i'f_i^{-1})/\mathcal{U} \in Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$, con lo cual $(f'f^{-1})^{\mathcal{U}} \in Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$. Así, por la proposición 3.9, $f'f^{-1} \in Autf(N/A)$, y entonces $f' \equiv f$ mod $Autf(N/A)$, como se quería ver. □

Es posible ahora entonces definir el nuevo elemento $(g_i)/\mathcal{U}$ de $G(N/A)$ como la clase, módulo $Autf(N/A)$, de cualquier $f \in Aut(N/A)$ tal que para cualquier familia de representantes $(f_i)_{i\in I} \subseteq Aut(N/A)$ (f_i un representante de la clase g_i, para cada $i \in I$), se tiene que $f^{\mathcal{U}} \equiv (f_i)/\mathcal{U}$ mod $Autf(N/A)$. La proposición anterior asegura que esta es una buena definición independientemente del f y los $f_i's$ que se elijan como representantes. Es importante notar que la hipótesis de G-compacidad es esencial para esta definición.

Nótese también que esta operación de ultraproducto conmuta con las operaciones de grupo de la siguiente manera:

(i) $(g_i)/\mathcal{U} \cdot (g_i')/\mathcal{U} = (g_ig_i')/\mathcal{U}$

(ii) $(g_i^{-1})/\mathcal{U} = ((g_i)/\mathcal{U})^{-1}$

Se define entonces, en términos de lo anterior, una topología para $G(N/A)$ caracterizando los cerrados. Se dice que un subconjunto F de $G(N/A)$ es cerrado sii para cualquier familia $(g_i)_{i\in I} \subseteq F$ y cualquier ultrafiltro $\mathcal{U}$ en I, se tiene que $(g_i)/\mathcal{U} \in F$. Es claro que la intersección arbitraria de cerrados es cerrado.

Para ver que la unión finita de cerrados es cerrado, tómense dos cerrados distintos F_1, F_2. Sea $(g_i)_{i\in I}$ una familia de elementos de $F_1 \cup F_2$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro arbitrario sobre I. Sea $I_1 = \{i \in I : g_i \in F_1\}$ y $I_2 = I - I_1 = \{i \in I : g_i \in F_2 - F_1\}$. Entonces $I_1 \in \mathcal{U}$ o $I_2 \in \mathcal{U}$. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $I_1 \in \mathcal{U}$. Considérese entonces la familia $(g_i')_{i\in I} \subseteq F_1$ donde $g_i' = g_i$ si $i \in I_1$, y $g_i' = g$ para cierto $g \in F_1$ arbitrario en caso de que $i \notin I_1$. Nótese que $(g_i)/\mathcal{U} = (g_i')/\mathcal{U}$, y por lo tanto, al ser F_1 cerrado, $(g_i)/\mathcal{U} \in F_1 \cup F_2$.

Nótese también que en esta topología los puntos son cerrados ya que para cada $g \in G(N/A)$, cada conjunto de índices I y cada ultrafiltro $\mathcal{U}$ en I, $g^{\mathcal{U}} = g$; con lo cual los conjuntos finitos son cerrados.

En el próximo resultado se verá que, además de garantizar que los puntos son cerrados, la hipótesis de G-compacidad implica que el espacio topológico es Hausdorff.

Si g es un elemento de $G(N/A)$ y $f \in Aut(\mathbb{C}/A)$, se dirá que f está en g (y se notará $f \in_{\restriction} g$) si existe un $h \in Aut(N/A)$ en la clase g y un $\bar{h} \in Aut(\mathbb{C}/A)$ que extiende a h y tal que $f \equiv \bar{h} \mod Autf(\mathbb{C}/A)$.

Proposición 6.2. *$G(N/A)$, con la topología anterior, es Hausdorff.*

Demostración. Sean $g_1, g_2 \in G(N/A)$ dos puntos distintos, y sean $f_1, f_2 \in Aut(N/A)$ dos representantes de g_1 y g_2 respectivamente, con lo cual $(\star)$ $f_1 \not\equiv f_2 \mod Autf(N/A)$.
Observación. Existen $n \in \omega$ y $a \in N^n$ tales que $Lstp(f_1(a)/A) \neq Lstp(f_2(a)/A)$.
Supóngase, en búsqueda de una contradicción, que para cada $n \in \omega$ y cada $a \in N^n$, $Lstp(f_1(a)/A) = Lstp(f_2(a)/A)$. Entonces para cada $s \in \mathcal{P}_f(N)$ existe $f_s \in Autf(N/A)$ tal que $f_s f_1 \restriction s = f_2 \restriction s$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $\mathcal{P}_f(N)$ tal que para cada $s_0 \in \mathcal{P}_f(N)$, $\{s \in \mathcal{P}_f(N) : s_0 \subseteq s\} \in \mathcal{U}$. Entonces $(f_s)/\mathcal{U}\cdot(f_1)/\mathcal{U} = (f_s f_1)/\mathcal{U} = (f_2)/\mathcal{U}$. Por G-compacidad, $(f_s)/\mathcal{U} \in Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$; con lo cual, si $\bar{f}_1, \bar{f}_2 \in Aut(\mathbb{C}/A)$ y $\bar{f}_s \in Autf(\mathbb{C}/A)$ son extensiones arbitrarias de $(f_1)/\mathcal{U}, (f_2)/\mathcal{U}$ y $(f_s)/\mathcal{U}$ respectivamente, entonces $\bar{f}_s\bar{f}_1$ y $\bar{f}_2$ coinciden en $N^{\mathcal{U}}$. De esta manera, $\bar{f}_2\bar{f}_1^{-1}\bar{f}_s^{-1} \in Autf(\mathbb{C}/A)$ y por tanto $\bar{f}_2\bar{f}_1^{-1} \in Autf(\mathbb{C}/A)$, con lo cual, como $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ extienden respectivamente a f_1, f_2, por la proposición 3.9 se tiene que $f_2 f_1^{-1} \in Autf(N/A)$, contradiciendo $(\star)$.

Así, por la proposición 5.11, existe $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in tp(f_1(a)f_2(a)/A)$ tal que para cualesquiera $a', b' \in N^n$ tales que $Lstp(a'/A) = Lstp(b'/A)$, entonces $\models \neg\varphi(a', b')$. Si $p_n(\bar{x}, \bar{y})$ es el tipo (sobre A) que define la relación de equivalencia $Lstp(\bar{x}/A) = Lstp(\bar{y}/A)$ ($l(\bar{x}) = l(\bar{y}) = n$), por compacidad existe $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \in L_{2n}(A)$ simétrica tal que $p_n(\bar{x}, \bar{y}) \vdash \phi(\bar{x}, \bar{y})$ y tal que $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \phi(\bar{y}, \bar{z}) \vdash \neg\varphi(\bar{x}, \bar{z})$. Sean entonces

$$\begin{aligned} V_1 := \{g \in G(N/A) \quad &: \quad \forall f', f_1' \in Aut(\mathbb{C}/A), f' \in_{\restriction} g, f_1' \in_{\restriction} g_1, \forall b \in \mathbb{C}^n, \\ &\quad\ \mathbb{C} \models \phi(f_1'(b), f'(b))\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 := \{g \in G(N/A) \quad &: \quad \forall f', f_2' \in Aut(\mathbb{C}/A), f' \in_{\restriction} g, f_2' \in_{\restriction} g_2, \forall b \in \mathbb{C}^n, \\ &\quad\ \mathbb{C} \models \phi(f'(b), f_2'(b))\} \end{aligned}$$

Nótese que:
1) $g_1 \in V_1$. Para cualesquiera $f', f_1' \in Aut(\mathbb{C}/A)$ tales que $f', f_1' \in_{\restriction} g_1$, se tiene que $f' \equiv f_1' \mod Autf(\mathbb{C}/A)$; con lo cual, para todo $n \in \omega$ y todo $b \in \mathbb{C}^n$, existe un $h \in Autf(\mathbb{C}/A)$ tal que $h(f'(b)) = f_1'(b)$. Así, $Lstp(f'(b)/A) = Lstp(f_1'(b)/A)$ y por tanto se tiene que $\mathbb{C} \models \phi(f'(b), f_1'(b))$.
2) Análogamente se verifica que $g_2 \in V_2$.
3) $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Supóngase que existe $g \in V_1 \cap V_2$, y sea $f \in Aut(\mathbb{C}/A)$ tal que $f \in_{\restriction} g$. Por definición de V_1 y V_2, se tiene que $\mathbb{C} \models \phi(f_1(a), f(a))$ y $\mathbb{C} \models \phi(f(a), f_2(a))$, y entonces $\mathbb{C} \models \neg\varphi(f_1(a), f_2(a))$, lo cual es imposible pues $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in tp(f_1(a)f_2(a)/A)$.

4) V_1 es abierto. Para ver esto, se verá que su complemento es cerrado. Sea entonces $\{g_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de elementos de $G(N/A)\smallsetminus V_1$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro arbitrario sobre I. Se verá que $(g_i)/\mathcal{U} \notin V_1$, es decir, se encontrarán $f^*, f_1^* \in Aut(\mathbb{C}/A)$, $f^* \in_\restriction (g_i)/\mathcal{U}$, $f_1^* \in_\restriction g_1$, y $b^* \in \mathbb{C}^n$ tales que $\mathbb{C} \models \neg\varphi(f_1^*(b^*), f^*(b^*))$. Nótese que para cada $i \in I$ existen:

(a) $f^{i*} \in Aut(\mathbb{C}/A), f^{i*} \in_\restriction g_i$

(b) $f_1^{i*} \in Aut(\mathbb{C}/A), f_1^{i*} \in_\restriction g_1$

(c) $b_i^* \in \mathbb{C}^n$

tales que $\mathbb{C} \models \neg\varphi(f_1^{i*}(b_i^*), f^{i*}(b_i^*))$. Considérese entonces, para cada $i \in I$, un modelo N_i cerrado bajo $f^{i*}, (f^{i*})^{-1}, f_1^{i*}, (f_1^{i*})^{-1}$ y tal que $b_i^* \in N_i^n$. De esta manera,

$$N_i \models \neg\varphi(f_1^{i*}(b_i^*), f^{i*}(b_i^*)).$$

Si $f^*, f_1^* \in Aut(\mathbb{C}/A)$ son dos extensiones arbitrarias de $(f^{i*})/\mathcal{U}$ y $(f_1^{i*})/\mathcal{U}$ respectivamente, y $b^* = (b_i^*)/\mathcal{U}$, se tiene que $\Pi_{\mathcal{U}} N_i \models \neg\varphi(f_1^*(b^*), f^*(b^*))$, y por tanto que $\mathbb{C} \models \neg\varphi(f_1^*(b^*), f^*(b^*))$. Finalmente nótese que por G-compacidad *,$f^* \in_\restriction (g_i)/\mathcal{U}$ y $f_1^* \in_\restriction g_1$, como se quería ver.
4) Análogamente, V_2 es abierto.

De esta manera se tiene g_1, g_2 se pueden separar por dos abiertos disjuntos no vacíos V_1, V_2, mostrando que $G(N/A)$ es Hausdorff. □

Es posible ahora verificar que las operaciones del grupo $G(N/A)$ son continuas con respecto a la topología anteriormente introducida y mostrar entonces que se trata efectivamente de un grupo topológico. Para esto se introducirán brevemente ciertos conceptos y resultados que facilitan el análisis y que pueden encontrarse en [13] (Cap. III).

Definición 6.3. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Se dice que $x \in X$ es un punto límite de $\mathcal{F}$ si para toda vecindad U de x se tiene que $U \in \mathcal{F}$.

Definición 6.4. Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \longrightarrow Y$ una función y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Se dice que $y \in Y$ es un punto límite de f con respecto a $\mathcal{F}$ si y es punto límite del filtro generado por $f(\mathcal{F})$.

Con lo anterior y la definición de continuidad en un punto es sencillo ver el siguiente resultado:

Proposición 6.5. *Sean X, Y espacios topológicos y $a \in X$. $f : X \longrightarrow Y$ es continua en a si y sólo si $f(a)$ es límite de f con respecto a $\mathcal{B}(a)$, donde $\mathcal{B}(a)$ es el filtro de vecindades de a en X.*

El siguiente criterio se utilizará para verificar la continuidad de las operaciones de grupo en $G(N/A)$.

Proposición 6.6. *Sean X, Y espacios topológicos, $a \in X$ y $f : X \longrightarrow Y$. Si para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ en X que converge a a, el ultrafiltro generado por $f(\mathcal{U})$ converge a $f(a)$, entonces f es continua en a.*

Demostración. Supóngase que f no es continua en a. Entonces existe una vecindad U de a tal que $f^{-1}(U) \notin \mathcal{B}(a)$, donde $\mathcal{B}(a)$ es el filtro de vecindades de a. Entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ que extiende a $\mathcal{B}(a)$ y tal que $X \smallsetminus f^{-1}(U) \in \mathcal{U}$. De esta manera, el ultrafiltro generado por $f(\mathcal{U})$ no converge a $f(a)$, pues $f(X \smallsetminus f^{-1}(U)) \cap U = \emptyset$, y por lo tanto U no pertenece al ultrafiltro generado por $f(\mathcal{U})$.□

*Pues la definición de $(g_i)/\mathcal{U}$ es independiente de los representantes elegidos para cada clase g_i (proposición 6.1, *iii*)).

Proposición 6.7. *$G(N/A)$ es grupo topológico.*

Demostración. Basta verificar que las operaciones de grupo son continuas. En primer lugar se verá que el producto $\delta : G(N/A) \times G(N/A)$ dado por $\delta((f,g)) = fg$ es una función continua en cada par (f,g). Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $I = G(N/A) \times G(N/A)$ que converge a (f,g), y sea $\mathcal{F}$ el ultrafiltro en $G(N/A)$ generado por $\delta(\mathcal{U})$. Se verá que $\mathcal{F}$ converge a fg. Considérense las siguientes sucesiones de elementos de $G(N/A)$:

(i) $\left\{i_{(a,b)} = a\right\}_{(a,b)\in I}$

(ii) $\left\{j_{(a,b)} = b\right\}_{(a,b)\in I}$

(iii) $\left\{k_{(a,b)} = ab\right\}_{(a,b)\in I}$

Sean $i/\mathcal{U} = (i_{(a,b)})/\mathcal{U}, j/\mathcal{U} = (j_{(a,b)})/\mathcal{U}$ y $k/\mathcal{U} = (k_{(a,b)})/\mathcal{U}$. Nótese que:

1. $lim(\mathcal{U}) = (i/\mathcal{U}, j/\mathcal{U})$. Sea $V_1 \times V_2$ una vecindad abierta de $(i/\mathcal{U}, j/\mathcal{U})$. Supóngase, en búsqueda de una contradicción, que $V_1 \times V_2 \notin \mathcal{U}$. Se puede suponer que V_1 y V_2 son abiertos, y por lo tanto que sus complementos, V_1' y V_2', son cerrados. De esta forma se tiene que $V_1' \times G(N/A) \in \mathcal{U}$ o $G(N/A) \times V_2' \in \mathcal{U}$. Sin pérdida de generalidad, asúmase el primer caso. Entonces para todo $(a,b) \in V_1' \times G(N/A)$ se tiene que $i_{(a,b)} \in V_1'$. Considérese la nueva sucesión $\left\{i'_{(a,b)}\right\}_{(a,b)\in I}$ dada por: $i'_{(a,b)} = a$ si $a \in V_1'$, y $i'_{(a,b)} = c$, para un $c \in V_1'$ arbitrario en caso contrario. Así, como $V_1' \times G(N/A) \in \mathcal{U}$, entonces $i/\mathcal{U} = i'/\mathcal{U}$. Y como V_1' es cerrado, se concluye que $i/\mathcal{U} \in V_1'$, lo cual es imposible. $\dashv$

2. $lim(\mathcal{F}) = k/\mathcal{U}$. Sea V una vecindad abierta de k/E y supóngase, en búsqueda de una contradicción, que $U \notin \mathcal{F}$, con lo cual su complemento V' es cerrado y pertenece a $\mathcal{F}$. Entonces existe $C \in \mathcal{U}$ tal que $\delta(C) \subseteq V'$, con lo cual, para todo $(a,b) \in C$, se tiene que $k(a,b) \in V'$. Considérese la nueva sucesión $\left\{k'_{(a,b)}\right\}_{(a,b)\in I}$ dada por: $k'_{(a,b)} = ab$ si $(a,b) \in C$, y $k'_{(a,b)} = c$, para un $c \in V'$ arbitrario en caso contrario. Así, como $C \in \mathcal{U}$, entonces $k/\mathcal{U} = k'/\mathcal{U}$. Y como V' es cerrado, se concluye que $k/\mathcal{U} \in V'$, lo cual es imposible. $\dashv$

Nótese que todo ultrafiltro sobre un espacio Hausdorff tiene a lo sumo un punto límite. Como $G(N/A)$ es Hausdorff (y por tanto también $G(N/A) \times G(N/A)$), se tiene que $fg = i/\mathcal{U} \cdot j/\mathcal{U} = (i_{(a,b)} \cdot j_{(a,b)})/\mathcal{U} = k/\mathcal{U} = lim(\mathcal{F})$, como se quería ver.

Se verá ahora que la función $\gamma : G(N/A) \longrightarrow G(N/A)$ dada por $\gamma(g) = g^{-1}$ es continua en cada $g \in G(N/A)$. Sea entonces $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $G(N/A)$ que converge a g y $\mathcal{F}$ el ultrafiltro generado por $\gamma(\mathcal{U})$. Se verá que $\mathcal{F}$ converge a g^{-1}. Considérense las siguientes sucesiones de elementos de $G(N/A)$:

(i) $\{i_a = a\}_{a\in G(N/A)}$

(ii) $\{j_a = a^{-1}\}_{a\in G(N/A)}$

Análogamente se verifica que:

3. $lim(\mathcal{U}) = (i_a)/\mathcal{U}$. Sea V una vecindad abierta de $(i_a)/\mathcal{U}$, y supóngase, en búsqueda de una contradicción, que $V \notin \mathcal{U}$. Entonces su complemento, V', es cerrado y pertenece a $\mathcal{U}$. Entonces para todo $a \in V'$ se tiene que $i_a \in V'$. Considérese la nueva sucesión $\{i'_a\}_{a\in G(N/A}$ dada por: $i'_a = a$ si $a \in V'$, y $i'_a = c$, para un $c \in V'$ arbitrario en caso contrario. Así, como $V' \in \mathcal{U}$, entonces $(i_a)/\mathcal{U} = (i'_a)/\mathcal{U}$. Y como V' es cerrado, se concluye que $i/\mathcal{U} \in V'$, lo cual es imposible. $\dashv$

4. $lim(\mathcal{F}) = (j_a)/\mathcal{U}$. Sea V una vecindad abierta de $(j_a)/\mathcal{U}$. Supóngase, en búsqueda de una contradicción, que $V \notin \mathcal{F}$; con lo cual su complemento, V', es cerrado y está en $\mathcal{F}$. Entonces existe $C \in \mathcal{U}$ tal que $\gamma(C) \subseteq V'$, y por tanto, para todo $a \in C$, se tiene que $j_a \in V'$. Considérese entonces la nueva sucesión $\{j'_a\}_{a \in G(N/A)}$ dada por: $j'_a = a^{-1}$ si $a \in C$, y $j'_a = c$, para un $c \in V'$ arbitrario en caso contrario. Así, como $C \in \mathcal{U}$, entonces $j/\mathcal{U} = j'/\mathcal{U}$. Y como V' es cerrado, se concluye que $j/\mathcal{U} \in V'$, lo cual es imposible. $\dashv$

Nótese entonces que $g^{-1} = ((i_a)/\mathcal{U})^{-1} = (i_a^{-1}/\mathcal{U}) = (j_a)/\mathcal{U} = lim(\mathcal{F})$, como se quería ver. $\square$

La siguiente caracterización de los espacios topológicos compactos en términos de ultrafiltros es bastante útil para mostrar que el grupo topológico en cuestión es compacto. Su demostración puede verse en [13] (Cap. III).

PROPOSICIÓN 6.8. *Un espacio topológico Hausdorff es compacto si y sólo si todo ultrafiltro sobre X tiene un límite.*

PROPOSICIÓN 6.9. *$G(N/A)$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $G(N/A)$ y considérese la sucesión de elementos de $G(N/A)$ dada por

$$\{i_a = a\}_{a \in G(N/A)}$$

Se verá que $lim(\mathcal{U}) = (i_a)/\mathcal{U}$. Sea V una vecindad abierta de $(i_a)/\mathcal{U}$, y supóngase, en búsqueda de una contradicción, que $V \notin \mathcal{U}$. Entonces su complemento, V', es cerrado y pertenece a $\mathcal{U}$. Entonces para todo $a \in V'$ se tiene que $i_a \in V'$. Considérese la nueva sucesión $\{i'_a\}_{a \in G(N/A}$ dada por: $i'_a = a$ si $a \in V'$, y $i'_a = c$, para un $c \in V'$ arbitrario en caso contrario. Así, como $V' \in \mathcal{U}$, entonces $(i_a)/\mathcal{U} = (i'_a)/\mathcal{U}$. Y como V' es cerrado, se concluye que $i/\mathcal{U} \in V'$, lo cual es imposible. $\square$

Más adelante se verá que bajo ciertas condiciones, ahora familiares, el grupo topológico $G(N/A)$ es totalmente disconexo, es decir, cada elemento de $G(N/A)$ es su propia componente conexa. Para esto es conveniente exponer antes un resultado útil, y en sí mismo bello, para los grupos topológicos compactos (ver [12], Capítulo II), y una caracterización de la topología de $G(N/A)$ bajo dichas condiciones. Recuérdese que la condición de ser totalmente disconexo para un espacio Hausdorff compacto equivale a la existencia de una base de conjuntos abiertos y cerrados simultáneamente (de ahora en adelante clopens) para la topología del espacio en cuestión ([12], Teorema 1.1.12). Y que en un espacio Hausdorff compacto, la componente conexa de cualquier elemento $x \in X$ coincide con la intersección de los clopens que lo contienen ([12], Teorema 1.1.11).

HECHO 6.10. *En un grupo topológico G compacto, un subgrupo es abierto si y sólo si es cerrado y de índice finito.*

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar las clases laterales al hacer el cociente por el subgrupo, utilizar que el producto es una función continua y el hecho de que el grupo es compacto.

PROPOSICIÓN 6.11. *Sea G un grupo topológico Hausdorff compacto. Las siguientes son equivalentes:*

1. *Existe una base de clopens para la topología de G.*

2. *Los subgrupos normales clopens de G forman un sistema fundamental de vecindades de la identidad (i.e., cada abierto U alrededor de 1 contiene un subgrupo normal abierto)*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Por hipótesis se tiene que los clopens que contienen a la identidad forman un sistema fundamental de vecindades de ésta, con lo cual basta ver que si V es un clopen alrededor de la identidad, entonces contiene un subgrupo normal abierto (y por tanto clopen). Sea $F = (G - V) \cap V^2$, donde, en general, para cada $X \subset G$, $X^n = \{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n : x_1, \ldots x_n \in X\}$. Al ser un subconjunto cerrado de un compacto, V es compacto; y por lo tanto, al ser la imagen continua de un compacto, V^2 es también compacto. Así, F es compacto. Ahora bien, para cada $x \in V$, nótese que $x \in G - F$; con lo cual, dado que el producto es continuo y $G - F$ es abierto, existen vecindades abiertas $V_x, S_x \subseteq V$ de x y 1 respectivamente tales que $V_x S_x \subseteq G - F$. Como V es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in V$ tales que $\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} = V$. Sea $S = \bigcap_{i=1}^{n} S_{x_i}$, y sea $W = S \cap S^{-1}$, donde $S^{-1} = \left\{s^{-1} : s \in S\right\}$. Nótese que W es abierto, simétrico (i.e.,$w \in W$ ssi $w^{-1} \in W$), $W \subseteq V$ y $VW \subseteq G - F$, con lo cual $VW \cap F = \emptyset$. Como además $VW \subseteq V^2$, por definición de F se tiene que $VW \cap (G - V) = \emptyset$, lo cual implica que $VW \subset V$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $VW^n \subseteq V$ (y $W^n \subseteq V$). Como W es abierto y simétrico, se tiene que

$$R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W^n \subseteq V$$

es un subgrupo abierto de G contenido en V. Esto implica que

$$R_G = \bigcap_{x \in G} (x^{-1} R x) \subseteq V$$

es un subgrupo normal contenido en V. Para ver que es abierto, nótese que R es abierto, con lo cual tiene índice finito (por el hecho demostrado anteriormente), por ejemplo m. Así,

$$R_G = x_1^{-1} R x_1 \cap \cdots \cap x_m^{-1} R x_m,$$

donde cada x_i ($i \in \{1, \ldots m\}$) es un representante de las i-ésima clase lateral derecha de R en G. Al ser la intersección finita de abiertos, R es abierto, como se quería ver.
2. $\Rightarrow$ 1. Si se tiene un sistema fundamental de vecindades clopens de la identidad, el hecho de que el producto es una función continua implica la existencia de una base de clopens para la topología. □

Lema 6.12. *Sea $n \in \omega$. Si para cualesquiera tuplas $\bar{a}, \bar{b} \in N^n$ $stp(a/A) = stp(b/A)$ implica que $Lstp(a/A) = Lstp(b/A)$, entonces $Autf(N/A) = Aut(N/acl^{eq}(A))$.*

Demostración. Basta ver que $Aut(N/acl^{eq}(A)) \subseteq Autf(N/A)$. Sea pues $f \in Aut(N/acl^{eq}(A))$. Sea $n \in \omega$ y $\bar{a} \in N^n$ una tupla cualquiera. Nótese que

$$stp(\bar{a}/A) = stp(f(\bar{a})/A).$$

Por hipótesis, se tiene entonces que $Lstp(\bar{a}/A) = Lstp(f(\bar{a})/A)$, con lo cual existe un $f_{\bar{a}} \in Autf(N/A)$ tal que $f_{\bar{a}}(\bar{a}) = f(\bar{a})$. Esto muestra que f es un punto límite de $Autf(N/A)$, con lo cual, al ser cerrado en $Aut(N/A)$, se concluye que $f \in Autf(N/A)$, como se quería demostrar. □

Se verá a continuación que en caso de que $Autf(N/A) = Aut(N/acl^{eq}(A))$, la topología de $G(N/A)$ introducida en esta sección y la topología estándar de $Aut(acl^{eq}(A)/A)$ donde los abiertos básicos están dados por los

$$O_{a,b} = \{f \in Aut(acl^{eq}(A)/A) : f(a) = b\},$$

para ciertas tuplas finitas a y b, coinciden. Primero obsérvese que existe una biyección natural entre $G(N/A)$ y $Aut(acl^{eq}(A)/A)$ de la siguiente manera. Sea $g \in G(N/A)$ y sea $f \in Aut(N/A)$ un representante de g. Nótese que f se extiende de manera única a un automorfismo $\bar{f} \in Aut(N^{eq}/A)$. La asignación estará dada entonces por:

$$\begin{array}{rcl} \lambda : G(N/A) & \to & Aut(acl^{eq}(A)/A) \\ g & \mapsto & \bar{f} \upharpoonright acl^{eq}(A), \end{array}$$

para cualquier $f \in g$. Nótese que esta función está bien definida y es inyectiva ya que para cualesquiera $f_1, f_2 \in Aut(N/A)$

$$\begin{array}{rcl} f_1 \cdot Autf(N/A) = f_2 \cdot Autf(N/A) & \Leftrightarrow & f_1 f_2^{-1} \in Autf(N/A) \\ & \Leftrightarrow & f_1 f_2^{-1} \in Aut(N/acl^{eq}(A)) \text{ (por hipótesis)} \\ & \Leftrightarrow & \bar{f}_1 \upharpoonright acl^{eq}(A) = \bar{f}_2 \upharpoonright acl^{eq}(A) \end{array}$$

El siguiente lema será de gran utilidad para mostrar que las topologías en cuestión coinciden.

Lema 6.13. *Si τ_1 y τ_2 son topologías sobre un conjunto X, (X, τ_1) es Hausdorff, (X, τ_2) es compacto y $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces $\tau_1 = \tau_2$.*

Demostración. Basta ver que si $O \in \tau_2$, entonces $O \in \tau_1$, o de igual manera, que si $O \in \tau_2$ es no vacío, entonces para cada $p \in O$ existe $B \in \tau_1$ tal que $p \in B \subseteq O$.

Sea entonces $O \in \tau_2$ un abierto no vacío y $p \in O$ un punto cualquiera. Como (X, τ_1) es Hausdorff, entonces para cada $q \in X \smallsetminus O$, existen $V_q, W_q \in \tau_1$ vecindades abiertas de q y p respectivamente y disjuntas. Como (X, τ_2) es compacto y $O \in \tau_2$, entonces $X \smallsetminus A$ es un cerrado, y por lo tanto $(X \smallsetminus O, \tau_2 \upharpoonright (X \smallsetminus O))$ es también compacto.

Nótese que $U = \{W_q : q \in X \smallsetminus O\}$ es un recubrimiento de $X \smallsetminus O$ con abiertos de τ_2 (pues $\tau_1 \subseteq \tau_2$), con lo cual, al ser compacto, existe un subrecubrimiento finito de U que cubre todo $X \smallsetminus O$. Sea $U' = \{W_{q_1}, \dots, W_{q_n}\}$ dicho subrecubrimiento y sean

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} V_{q_i} \quad \text{y} \quad C = \bigcup_{i=1}^{n} W_{q_i}.$$

Nótese que como para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ $V_{q_i} \cap W_{q_i} = \emptyset$, entonces B y C son abiertos disjuntos de τ_1, y entonces $B \subseteq X \smallsetminus A$. Como U' es recubrimiento de $X \smallsetminus A$, $X \smallsetminus O \subseteq C$, con lo cual se concluye que $B \subseteq O$. Finalmente nótese que $p \in B$ pues $p \in V_{q_i}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, como se quería. □

Sea entonces τ_1 la topología estándar de $Aut(acl^{eq}(A)/A)$ (claramente Hausdorff) y τ_2 la topología de $G(N/A)$ introducida en esta sección.

Proposición 6.14. *Si $Autf(N/A) = Aut(N/acl^{eq}(A))$, entonces $\lambda^{-1}(\tau_1) = \tau_2$.*

Demostración. Gracias al lema anterior, como $(Aut(N/acl^{eq}(A)), \tau_1)$ es Hausdorff y $(G(N/A), \tau_2)$ es compacto, para ver que las topologías coinciden basta ver que para cada τ_1-cerrado C, $\lambda^{-1}(C)$ es τ_2-cerrado. Bien, nótese que cada τ_1-abierto es de la forma

$$O = \bigcup_{i \in I} O_{a_i b_i},$$

donde $\{a_i, b_i : i \in I\}$ es un conjunto de tuplas finitas de $acl^{eq}(A)^n$ para cierto $n \in \omega$ y

$$O_{a_i b_i} = \{f \in Aut(acl^{eq}(A)/A) : f(a_i) = b_i\}.$$

Considérese entonces un τ_1-cerrado C que será de la forma

$$C = \bigcap_{i \in I} \overline{O}_{a_i b_i}.$$

Basta ver que $\lambda^{-1}(C)$ es τ_2-cerrado. Sea entonces $\{g_j : j \in J\} \subseteq G(N/A)$ una familia arbitraria de elementos de $\lambda^{-1}(C)$, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en J, y $\{f_j : j \in J\} \in Aut(N/A)$ una familia de representantes de los respectivos g_j's. Nótese que para cada $i \in I$ y cada $j \in J$,

$$(f_j)/\mathcal{U}(a_i) \neq b_i,$$

pues $J \in \mathcal{U}$; con lo cual $\lambda((g_j)/\mathcal{U}) \in C$ y por tanto $(g_j)/\mathcal{U} \in \lambda^{-1}(C)$. Esto muestra que $\lambda^{-1}(C)$ es τ_2-cerrado, como se quería. □

Proposición 6.15. *$G(N/A)$ es totalmente disconexo si y sólo si $Autf(N/A) = Aut(N/acl^{eq}(A))$.*

Demostración. $\Leftarrow$) Supóngase que $Autf(N/A) = Aut(N/acl^{eq}(A))$. En este caso, por la proposición 6.14, la topología de $G(N/A)$ coincide con la topología estándar de $Aut(acl^{eq}(A)/A)$, que, dada la forma de los abiertos básicos, es fácil verificar que se trata de un espacio totalmente disconexo.
$\Rightarrow$) Supóngase ahora que $G(N/A)$ es totalmente disconexo. Para cada subgrupo normal clopen H de $G(N/A)$ y cada $n \in \mathbb{N}$, defínase la relación de equivalencia R^n_H en N^n así:

$$R^n_H(\bar{a}, \bar{b}) \text{ ssi existe } f \in Aut(N/A) \text{ tal que } f \cdot Autf(N/A) \in H \text{ y } f(\bar{a}) = \bar{b}.$$

Nótese que si $\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}', \bar{b}' \in N^n$ son tales que $t(\bar{a}\bar{b}/A) = t(\bar{a}'\bar{b}'/A)$, entonces

$$R^n_H(\bar{a}, \bar{b}) \Leftrightarrow R^n_H(\bar{a}', \bar{b}'),$$

pues bajo las hipótesis existe $f \in Aut(N/A)$ tal que $f(\bar{a}\bar{b}) = \bar{a}'\bar{b}'$. Si $R^n_H(\bar{a}, \bar{b})$, entonces existe $g \in Aut(N/A)$ tal que $g \cdot Autf(N/A) \in H$ y $g(\bar{a}) = \bar{b}$, con lo cual

$$fgf^{-1} \cdot Autf(N/A) \in H,$$

pues H es normal; y además $fgf^{-1}(\bar{a}') = fg(\bar{a}) = f(\bar{b}) = \bar{b}'$, lo que implica que $R^n_H(\bar{a}', \bar{b}')$. La otra dirección es análoga. Así, con los mismos argumentos utilizados para mostrar que la relación *tener el mismo tipo fuerte de Lascar* es tipo-definible (proposición 5.12), puede concluirse que R^n_H es tipo-definible. Sea entonces $R^n_H(\bar{x}, \bar{y}) = \bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$.

Sean $\bar{a}, \bar{b} \in N^n$ y supóngase que $stp(\bar{a}/A) = stp(\bar{b}/A)$. Por el lema 6.12, es suficiente verificar que $Lstp(\bar{a}/A) = Lstp(\bar{b}/A)$. Esto se logrará en dos pasos.
Paso 1. Sea $p = t(\bar{a}/A) = t(\bar{b}/A)$, P el conjunto de realizaciones de p en N^n, y h el índice de H. † Nótese que R^n_H no tiene más de h clases en P. Sean $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_h \in P$. Para cada $i \in \{0, 1, \ldots, h\}$, sea $f_i \in Aut(N/A)$ tal que $\bar{a}_i = f_i(\bar{a}_0)$. Como el índice de H es h, existen $i, j \in \{0, 1, \ldots, h\}$ distintos tales que $f_i \cdot Autf(N/A)$ y $f_j \cdot Autf(N/A)$ están en la misma clase módulo H; con lo cual $f_j f_i^{-1} \cdot Autf(N/A) \in H$ y $f_j f_i^{-1}(\bar{a}_i) = \bar{a}_j$, es decir, $R^n_H(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$.
Pues bien, sean $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k$ $(k \leq h)$ representantes de cada una de las clases módulo R^n_H en P, y sea $T_0 = Th(N_{A \cup \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k\}})$. De esta manera se tiene que

$$p(\bar{x}) \wedge p(\bar{y}) \wedge T_0 \vdash R^n_H(\bar{a}, \bar{b}) \leftrightarrow \bigvee_{\varphi \in \Phi} \bigvee_{i \in \{1, \ldots, k\}} (\bigwedge_{j \neq i} (\neg\varphi(\bar{x}, \bar{a}_j) \wedge \neg\varphi(\bar{y}, \bar{a}_j)),$$

† Pues $G(N/A)$ es Hausdorff compacto y H es un subgrupo normal abierto; por lo tanto cerrado y de índice finito

es decir, dos tuplas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ en P son equivalentes módulo R_H^n si y sólo si no son equivalentes a los mismos $\bar{a}_i$'s. Por compacidad se tiene que existe $\varphi \in L_{2n}(A)$ tal que

$$p(\bar{x}) \wedge p(\bar{y}) \wedge T_0 \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow R_H^n(\bar{x}, \bar{y}),$$

y como $\bar{x}, \bar{y}$ no aparecen en T_0, y los $\bar{a}_i$'s no aparecen en $p(\bar{x}), p(\bar{y}), R_H^n(\bar{x}, \bar{y})$ ni en $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, entonces se tiene que

$$p(\bar{x}) \wedge p(\bar{y}) \models \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow R_H^n(\bar{x}, \bar{y}).$$

De nuevo, por compacidad, existe una fórmula $\phi \in p(\bar{x})$ tal que si F es el conjunto de soluciones de ϕ en N^n, $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ define una relación de equivalencia en F con exactamente k clases. Defínase entonces la siguiente relación de equivalencia:

$$R'(\bar{x}, \bar{y}) = (\neg\phi(\bar{x}) \wedge \neg\phi(\bar{y})) \vee (\phi(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{y}) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{y})).$$

Como $R'(\bar{x}, \bar{y})$ es una relación de equivalencia finita definible sobre A y $stp(\bar{a}/A) = stp(\bar{b}/A)$, se tiene que $N \models R'(\bar{a}, \bar{b})$. Además, como $\bar{a}$ y $\bar{b}$ satisfacen p, se deduce que $R_H^n(\bar{a}, \bar{b})$.

Paso 2. Sea I el conjunto de subgrupos normales clopens de $G(N/A)$, y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en I tal que para cada $H \in I$, $\{K \in I : K \subset H\} \in \mathcal{U}$. Por lo obtenido en el paso anterior, para cada $H \in I$, existe un $f_H \in Aut(N/A)$ tal que $f_H \cdot Autf(N/A) \in H$ y $f_H(\bar{a}) = \bar{b}$. Sea $f = (f_H)/\mathcal{U} \in Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$ y $g \in G(N/A)$ la clase correspondiente a f. Nótese que $g \in H$ para todo $H \in I$ por construcción de $\mathcal{U}$ (para cada $H \in I$, $\{K : K \subset H\} \in \mathcal{U}$) y dado que cada H es cerrado. Por hipótesis, al ser $G(N/A)$ totalmente disconexo, $\bigcap_{H \in I} H = \{id\}$, con lo cual $g = Autf(N/A)$ y $f(\bar{a}) = \bar{b}$. Cualquier extensión $\bar{f} \in Aut(\mathbb{C}/A)$ de f es tal que $\bar{f}(\bar{a}) = \bar{b}$, con lo cual $Lstp(\bar{a}/A) = Lstp(\bar{b}/A)$, como se quería demostrar. □

Proposición 6.16. *Si para cada N $|T|^+$-resplandeciente $Autf(N/A) = Aut(N/acl^{eq}(A))$, entonces T es G-compacta.*

Demostración. Basta notar que $Aut(N/acl^{eq}(A))$ es cerrado en $Aut(N/A)$ y que para cada $n \in \omega$ y $|\bar{x}| = |\bar{y}| = n$, la relación $stp(\bar{x}/A) = stp(\bar{y}/A)$ es tipo-definible. Dadas las hipótesis, por la proposición 5.15, T es G-compacta. □

7 El grupo topológico $G(N/A)$ de Lascar-Pillay

En esta sección se trabaja sin la hipótesis de G-compacidad para dotar de una topología a $G(N/A)$ siguiendo la línea de trabajo en [8]. Se observa también que bajo la hipótesis de G-compacidad, ambas topologías coinciden, y que de hecho ésta equivale a suponer que los puntos en $G(N/A)$ son cerrados de la topología. Finalmente se da una nueva prueba de la compacidad de $G(N/A)$ utilizando el resultado que caracteriza los cerrados de una manera más cómoda para este fin.

Definición 7.1. Sea C un subconjunto de $G(N/A)$. Sea $\mu : Aut(N/A) \longrightarrow G(N/A)$ la proyección canónica. Se dice que C es cerrado si para cualquier conjunto de índices I, cualquier ultrafiltro $\mathcal{U}$ en I, y cualquier familia $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq Aut(N/A)$ tal que para cada i, $\mu(f_i) \in C$, se tiene que $(f_i)/\mathcal{U}$ puede extenderse a un elemento $\bar{f} \in Aut(\mathbb{C}/A)$ tal que $\bar{f} \in_{\restriction} g$ para algún $g \in C$.

Es sencillo ver que la intersección arbitraria de cerrados es de nuevo un cerrado, y con un argumento análogo al utilizado en la sección anterior se muestra que la unión finita de cerrados es un conjunto cerrado. Así se tiene entonces que la definición anterior caracteriza una topología en $G(N/A)$.

Es importante notar que al añadir la hipótesis de G-compacidad en la definición 7.1, la noción de cerrado coincide con la de la sección anterior, pues ésta permite identificar a $(f_i)/\mathcal{U}$ con un elemento $f \in Aut(N/A)$ tal que para cualquier extensión $\bar{f} \in Aut(\mathbb{C}/A)$ de $(f_i)/\mathcal{U}$ se tiene que $\bar{f} \in_{\restriction} \mu(f)$. Esta identificación puede hacerse sin ambigüedad, es decir, independientemente de la elección de los representantes de las clases $\mu(f_i)'s$ (proposición 6.1).

Proposición 7.2. *Las siguientes son equivalentes:*

(i) T es G-compacta sobre A.

(ii) $G(N/A)$ es Hausdorff.

(iii) Los puntos de $G(N/A)$ son cerrados.

Demostración. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Si T es G-compacta, por la proposición 6.2, $G(N/A)$ es Hausdorff.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Si $G(N/A)$ es Hausdorff claramente los puntos son cerrados.
$(iii) \Leftrightarrow (i)$. Supóngase entonces que los puntos son cerrados. Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de elementos de $Autf(N/A)$, y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en I. Por hipótesis se tiene que $(f_i)/\mathcal{U}$ puede extenderse a un $\bar{f} \in Aut(\mathbb{C}/A)$ tal que $\bar{f} \in_{\restriction} Autf(N/A)$. Por la proposición 3.9, $\bar{f} \in Autf(\mathbb{C}/A)$ y por lo tanto $(f_i)/\mathcal{U} \in Laut(N^{\mathcal{U}}/A)$, verificándose la G-compacidad. □

Nótese que con la caracterización anterior se tiene otra prueba sencilla de la proposición 6.16. Como se vio en la sección pasada (proposición 6.14), si para cada N $|T|^+$-resplandeciente se cumple que $Autf(N/A) = Aut(N/acl^{eq}(A))$, la topología de $G(N/A)$ coincide con la de $Aut(acl^{eq}/A)$, que es claramente Hausdorff. Así que por la proposición anterior, T es G-compacta.

El siguiente resultado caracteriza los cerrados de una manera muy útil, en particular para probar que $G(N/A)$ es compacto.

Proposición 7.3. *Sea $C \subseteq G(N/A)$. Las siguientes son equivalentes :*

(i) C es cerrado.

(ii) Si $D = \mu^{-1}(C)$, para cualquier secuencia $a \subset N$tal que $A \subset a$ y $|a| \leq |T|$, $\{h(a) : h \in D\}$ es tipo-definible sobre algún submodelo M de N tal que $|M| = |T|$.

(*iii*) *Existe un submodelo M de N, $|M| = |T|$ y un tipo parcial $\Phi(x)$ tal que si m es una enumeración de M, entonces $\mu^{-1}(C) = \{h \in Aut(N/A) : h(a) \text{ realiza } \Phi\}$.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sin pérdida de generalidad $a = m$ enumera un submodelo M de N de cardinalidad $|T|$ que contiene a A. Para ver que $Y = \{h(m) : h \in D\}$ es tipo-definible se verá que $F = \{q \in S(M) : \exists y \in Y \text{ tal que } N \models q(y)\}$ es un cerrado en la topología del espacio de Stone. Sea entonces $q \in S(M)$ un punto límite de F, y $n \subset N$ una realización de $tp(m/A)$. Al ser punto límite, existen I, un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I, y elementos $m_i \in Y$ para cada $i \in I$ tales que $n' = (m_i)/\mathcal{U}$ realiza q en $N^{\mathcal{U}}$. Ahora bien, para cada $i \in I$, sea $g_i \in D$ tal que $g_i(m) = m_i$ y sea $g' = (g_i)/\mathcal{U} \in Aut(N^{\mathcal{U}})$ de tal manera que $g'(m) = n'$.
Como m, n tienen el mismo tipo sobre A (pues $tp(m/A) \subseteq q$), sea $g \in Aut(N/A)$ tal que $g(m) = n$. Como $tp(n'/m) = tp(n/m)$ (pues ambos realizan q y $q \in S(M)$), existe $f \in Autf(\mathbb{C}/A)$ tal que $f(n) = n'$. De esta forma se tiene que $f(g(m)) = g'(m)$, con lo cual, para cualesquiera $\bar{g}, \bar{g}' \in Aut(\mathbb{C}/A)$ extensiones de g, g' respectivamente, $f\bar{g} \equiv \bar{g}' \bmod Autf(\mathbb{C}/A)$, y por tanto (como $f \in Autf(\mathbb{C}/A)$) $\bar{g} \equiv \bar{g}f \equiv f\bar{g} \equiv \bar{g}' \bmod Autf(\mathbb{C}/A)$. Al ser cerrado, alguna extensión $\bar{g}' \in Aut(\mathbb{C}/A)$ de g' es tal que $\bar{g}'$ es equivalente, módulo $Autf(\mathbb{C}/A)$ a una extensión de algún elemento en $\mu^{-1}(C)$. Con esto, es claro que $g \in D$, por tanto que $n \in Y$ y finalmente que $q \in F$, obteniéndose lo deseado.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sea m una enumeración de un submodelo M de N de tamaño $|T|$ y tal que $A \subseteq M$. Sea $\Phi(x)$ el tipo que define $\{h(m) : h \in \mu^{-1}(C)\}$. Se verá que m y Φ son los deseados. Claramente si $h \in \mu^{-1}(C)$, entonces $h(m)$ satisface Φ. Supóngase entonces que $h \in Aut(N/A)$ es tal que $h(m)$ realiza Φ. Entonces existe $h' \in \mu^{-1}(C)$ tal que $h'(m) = h(m)$, con lo cual $h' \equiv h \bmod Autf(N/A)$ y entonces $h \in \mu^{-1}(C)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Se puede suponer que $a = m$ enumera un submodelo M de N de cardinalidad $|T|$ y tal que $A \subset M$ (simplemente añadiendo variables mudas en $\Phi(x)$). Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en I y para cada $i \in I$ sea $h_i \in \mu^{-1}(C)$. Sea $h' = (h_i)/\mathcal{U}$. Como $I \in \mathcal{U}$, $h'(m)$ realiza Φ. Sea $n \in N$ que realiza $tp(h'(m)/m, B)$ donde B es el conjunto de posibles parámetros de Φ. En particular n realiza Φ, con lo cual existe $h \in \mu^{-1}(C)$ tal que $h(m) = n$. Así, se tiene que $tp(h'(m)/m) = tp(h(m)/m)$, con lo cual existe $f \in Autf(\mathbb{C}/A)$ tal que $f(h'(m)) = h(m)$. Por el mismo argumento utilizado en $(i) \Rightarrow (ii)$ se tiene que para cualesquiera $\bar{h}, \bar{h}' \in Aut(\mathbb{C}/A)$ extensiones de h, h' respectivamente, $\bar{h} \equiv \bar{h}' \bmod Autf(\mathbb{C}/A)$, verificando que C es cerrado. □

Si $Aut(N/A)$ es dotado de la topología estándar en la que los abiertos básicos están dados por los subconjuntos de $Aut(N/A)$ que envían, dadas dos tuplas fijas, una a otra, se puede observar lo siguiente (hecho 4.11 de [8]):

Proposición 7.4. *La proyección canónica $\mu : Aut(N/A) \longrightarrow G(N/A)$ es continua.*

Demostración. Sea $X \subseteq G(N/A)$ un cerrado, y sea $Y = \mu^{-1}(X)$. Se verá que todo punto límite de Y pertenece a Y. Sea entonces $f \in Aut(N/A)$ un punto límite de Y, con lo cual, para cada tupla $a \in N$, existe un $f_a \in Y$ tal que $f(a) = f_a(a)$. Sea I el conjunto de tuplas finitas de elementos de N y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I, que contenga, para cada $b \in N$, el conjunto de todas las tuplas en las que aparezca b. Sea $N' = N^{\mathcal{U}}$ y $f' = (f_a)/\mathcal{U} \in Aut(N'/A)$. Como X es cerrado, f' puede extenderse a un $f'' \in Aut(\mathbb{C}/A)$ tal que $f'' \in_{\restriction} g$ para algún $g \in X$. Pero nótese que f' extiende a f, con lo cual $f'' \in_{\restriction} \mu(f)$, y entonces $\mu(f) \in X$ y $f \in Y$, como se quería ver. □

Proposición 7.5. *$G(N/A)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos cerrados de $G(N/A)$ con la propiedad de la intersección finita. Se verá que $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.

Sea m una sucesión que enumera a un modelo M de la cardinalidad de T, y considérese, para cada $i \in I$

- $D_i = \mu^{-1}(C_i)$
- $O_i = \{h(m) : h \in D_i\}$

Observación. Nótese que $O(m/\bigcap_{i\in I} D_i) = \bigcap_{i\in I} O(m/D_i)$, donde $O(m/A) = \{h(m) : h \in A\}$.
Demostración. La contenencia de izquierda a derecha es clara. Para ver la otra contenencia, sea $m' \in \bigcap_{i\in I} O(m/D_i)$. Entonces para cada $i \in I$ existe $h_i \in D_i$ tal que $h_i(m) = m'$. Así, para cualesquiera $i, j \in I$, $h_i \equiv h_j \bmod Autf(N/A)$ y por lo tanto $h_i \in D_j$. De esta forma se tiene que para cualquier $i \in I$, $h_i \in \bigcap_{i\in I} D_i$ y $h_i(m) = m'$, con lo cual $m \in O(m/\bigcap_{i\in I} D_i)$.

Para tener lo deseado, es entonces suficiente verificar que $\bigcap\limits_{i\in I} D_i \neq \emptyset$; Y si π_i el tipo que define O_i para cada $i \in I$, es equivalente a mostrar que $\bigcup\limits_{i\in I} \pi_i$ es consistente. Nótese que esto se verifica por compacidad y a partir de la propiedad de intersección finita de la familia $\{C_i\}_{i\in I}$, que se tiene por hipótesis. $\square$

Referencias

[1] Anand Pillay, *An Introduction to Stability Theory* Clarendon Press, Oxford, (1983).

[2] Bruno Poizat, *Cours de Théorie des Modèles,* Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, Villeurbane, (1985).

[3] Bruno Poizat, *Une Théorie de Galois Imaginaire,* ***The Journal of Symbolic Logic***, vol. 48, no. 4 (1983), pp. 1151-1170.

[4] Byunghan Kim, *A note on Lascar strong types in simple theories,* ***The Journal of Symbolic Logic***, vol. 63 (1998), pp. 926-936.

[5] Chen Chung Chang, *What's so special about saturated models? ,* en Studies in Model Theory, Ed. M. Morley, Mathematical Association of America, (1973), pp. 59-95.

[6] Chen Chung Chang, Jerome Keisler, *"Model Theory"* Springer-Verlag, tercera edición, Berlin Heidelberg (1990).

[7] Daniel Lascar, *On the category of models of a complete theory,* ***The Journal of Symbolic Logic***, vol. 47 (1982), pp. 249-266.

[8] Daniel Lascar, Anand Pillay, *Hyperimaginaries and automorphism groups,* ***The Journal of Symbolic Logic***, vol. 66 (2001), pp. 127-143.

[9] Enrique Casanovas, Daniel Lascar, Anand Pillay, Martin Ziegler, *Galois groups of first order theories,* ***The Journal of Symbolic Logic***, vol. 1 No. 2 (2001), pp. 305-319.

[10] Enrique Casanovas, *Compactly expandable models and stability,* ***The Journal of Symbolic Logic***, vol. 60 (1995), pp. 673-683.

[11] Enrique Casanovas, *Teoría de Modelos,* Notas de clase (1999).

[12] Luis Ribes, Pavel Zalesskii, *"Profinite Groups"* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2000).

[13] Nicolas Bourbaki, *"Topologie générale,"* Hermann, París (1960).