Lógica 2

Enrique Casanovas

Curso 1999 - 2000

Índice general

Capítulo 1

Sintaxis

Presentamos en este capítulo la sintaxis de la lógica de primer orden. La noción fundamental es la de *fórmula*. Las fórmulas son ciertas secuencias finitas de símbolos. Estos símbolos pueden ser *símbolos lógicos* o símbolos que forman parte del *lenguaje* o *tipo de semejanza* particular que se desea emplear.

Los *símbolos lógicos* son los siguientes:

- *Conectores lógicos.* La negación, $\neg$, la conjunción, $\wedge$, la disyunción, $\vee$, el condicional, $\rightarrow$, y el bicondicional, $\leftrightarrow$.
- *Cuantificadores.* El cuantificador universal, $\forall$, y el cuantificador existencial, $\exists$.
- *Variables.* Las variables son $v_0, v_1, v_2, \ldots$. El conjunto de las variables es $\mathrm{VAR} = \{v_i : i \in \mathbb{N}\}$. Para referirnos a variables cualesquiera sin necesidad de especificar sus índices usamos las letras x, y, z, u, v, w.
- *Símbolo de igualdad.* El símbolo de igualdad es $\doteq$. Si el contexto lo permite, es decir, si no hay confusión posible entre el símbolo de igualdad del lenguaje formal y el símbolo de igualdad que eventualmente podemos emplear para hablar de este lenguaje, ponemos simplemente $=$.
- *Paréntesis.* El paréntesis izquierdo, (, y el paréntesis derecho,).

Un *lenguaje* (o *alfabeto* o *tipo de semejanza*) es un conjunto formado por símbolos de los siguientes tipos:

- *Constantes.* Usamos los símbolos $c, d, c_0, c_1, \ldots$ para referirnos a constantes. La función sintáctica de las constantes (también llamadas *constantes individuales*) es la de ser nombres de objetos.
- *Símbolos de relación.* Usamos los símbolos P, Q, R, S, con índices $R_0, R_1, \ldots$ si es preciso, para referirnos a ellos. Cada uno lleva asociado un número natural ≥ 1, su *número ario* o *número ádico.* Si el número ario de R es n decimos que R es un símbolo de relación *n-ario* o *n-ádico.* En particular para $n = 1$ se llaman *monarios* o *monádicos* y para $n = 2$, *binarios* o *diádicos*. Los símbolos de relación también se llaman *predicados.* Su función sintáctica es la de contribuir a la formación de enunciados básicos mediante la atribución de propiedades a objetos y la predicación de relaciones entre objetos.

- *Símbolos de función.* los símbolos F, G, H, con índices $F_0, F_1, \ldots$ si es preciso, para referirnos a ellos. Como en el caso de los símbolos de relación, cada uno de ellos lleva asociado un número natural ≥ 1, su *número ario* o *número ádico.* La función sintáctica de estos símbolos es la de contribuir a la formación de expresiones complejas que sirven para nombrar individuos reflejando las operaciones de aplicar funciones a sus argumentos.

Un lenguaje particular puede no tener ninguna constante o ningún predicado o ningún símbolo de función, y puede que tenga algunos de estos símbolos para ciertos números arios pero no para otros. En especial un lenguaje puede no tener ningún símbolo, es decir, el conjunto vacío es también un lenguaje. Usamos las letras $L, L', L_0, L_1, \ldots$ para referirnos a lenguajes.

Sea L un lenguaje. Los *términos de* L son las secuencias finitas de símbolos que se construyen aplicando las siguientes reglas:

1. Toda variable es un término de L.

2. Toda constante de L es un término de L.

3. Si $F \in L$ es un símbolo de función n-ádico y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos de L, entonces también $Ft_1t_2 \ldots t_n$ es un término de L.

Usaremos la notación $\mathrm{TERM}\,(L)$ para referirnos al conjunto de los términos de L y usaremos $t, t', t_0, t_1, \ldots$ para referirnos a términos.

El proceso de construcción sintáctica de un término puede ser reconstruido a partir del término mediante la creación de su *árbol de generación.* Este árbol tiene al término dado en su inicio. A partir de él van creciendo las ramas, que habitualmente se representan creciendo hacia abajo. Las posibilidades de ramificación dependen de la forma del término. Si el término comienza por un símbolo funcional n-ádico es de la forma $Ft_1 \ldots t_n$, siendo $t_1, \ldots, t_n$ términos. Entonces se prolonga la rama que acaba en el término dado, dando lugar a n nuevas ramas con los correspondientes términos $t_1, \ldots, t_n$, en cada rama un término. Claro está, la aparición inicial del símbolo F se ha eliminado en esta ramificación. En particular, si $n = 1$ lo que hacemos es prolongar la rama sin propiamente ramificarla. Cuando en este proceso encontramos una constante o una variable al final de una rama, esa rama ya no puede prolongarse más. El árbol finaliza cuando cada una de las ramas acaba en una constante o una variable. Los *subtérminos* del término dado son todos los términos que aparecen en su árbol de generación, incluyéndose él mismo entre ellos.

Para establecer que todos los términos de un lenguaje L tienen una cierta propiedad P se puede hacer una *demostración por inducción.* Consiste en justificar que los términos más simples tienen la propiedad P y que la propiedad P es hereditaria. Más precisamente, se puede asegurar que todos los términos de L tienen la propiedad P si se han establecido los siguientes puntos:

1. Toda variable tiene P.

2. Toda constante de L tiene P.

3. Siempre que $F \in L$ es un símbolo de función n-ádico y los términos $t_1, \ldots, t_n$ de L tienen P, también el término $Ft_1 \ldots t_n$ tiene P.

Otra de las peculiaridades del conjunto $\mathrm{TERM}(L)$ de los términos de L es que se puede definir una función $f : \mathrm{TERM}(L) \to X$ de modo especialmente sencillo. Basta especificar los valores de las variables y las constantes y dar las reglas para determinar los valores de términos de la forma $Ft_1 \ldots t_n$ en función de los valores posibles de los términos $t_1, \ldots, t_n$. Una función definida de ese modo se dice que ha sido definida *recursivamente* o *por recursión.* Así pues, para definir $f : \mathrm{TERM}(L) \to X$ es suficiente con

1. Definir $f(x)$ para cada variable x.
2. Definir $f(c)$ para cada constante $c \in L$.
3. Definir $f(Ft_1 \ldots t_n)$ en función de $f(t_1), \ldots, f(t_n)$ (y de F y $t_1, \ldots, t_n$ si se quiere) para cada $F \in L$ n-ádico y cualesquiera términos $t_1, \ldots, t_n$ de L.

Llamamos *fórmulas atómicas de* L a las expresiones de la forma

$$t_1 \doteq t_2$$

donde t_1, t_2 son términos de L, y las expresiones de la forma

$$Rt_1 \ldots t_n$$

donde $R \in L$ es un predicado n-ádico y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de L. Las fórmulas atómicas de la forma $t_1 \doteq t_2$ se llaman también *ecuaciones.*

Las *fórmulas de* L son las secuencias finitas de símbolos que se construyen aplicando las siguientes reglas:

1. Toda fórmula atómica de L es una fórmula de L.
2. Si φ es una fórmula de L, también $\neg\varphi$ es una fórmula de L.
3. Si φ y ψ son fórmulas de L, entonces tanto $(\varphi \wedge \psi)$ como $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son fórmulas de L.
4. Si φ es una fórmula de L y x es una variable, entonces tanto $\forall x\varphi$ como $\exists x\varphi$ son fórmulas de L.

Usaremos la notación $\mathrm{FORM}(L)$ para referirnos al conjunto de las fórmulas de L y usaremos $\varphi, \psi, \chi, \varphi_0, \varphi_1, \ldots$ para referirnos a fórmulas.

Como en el caso de los términos, también las fórmulas tienen *árboles de generación* que permiten reconstruir su proceso de construcción sintáctica. Se comienza el árbol con la fórmula en cuestión y las ramas van creciendo hacia abajo. Ahora las ramas finalizan cuando se llega a una fórmula atómica. Cuando al final de una rama se tiene una fórmula como $\neg\varphi$, se prolonga la rama añadiendo φ. Si una rama finaliza en $(\varphi \wedge \psi)$ podemos comenzar en ese punto dos nuevas ramas, una con φ y otra con ψ. El mismo tipo de ramificación tiene lugar cuando la rama finaliza en $(\varphi \vee \psi)$, en $(\varphi \to \psi)$ o en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$. Finalmente, una rama que acaba en $\forall x\varphi$ o en $\exists x\varphi$ se prolonga añadiendo a continuación la fórmula φ. La construcción del árbol finaliza cuando cada rama acaba en una fórmula atómica. Las *subfórmulas* de una fórmula son las fórmulas que aparecen en su árbol de generación, incluyéndola a ella misma.

Del mismo modo que en el caso de los términos, podemos demostrar por inducción que todas las fórmulas tienen una cierta propiedad y podemos definir funciones $f : \mathrm{FORM}\,(L) \to X$ por recursión. Para demostrar por *inducción* que todas las fórmulas de L tienen la propiedad P se establecen los siguientes puntos:

1. Toda fórmula atómica de L tiene P.
2. Si la fórmula φ tiene P, también $\neg\varphi$ tiene P.
3. Si las fórmulas φ, ψ tienen P, también tienen P las fórmulas $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
4. Si la fórmula φ tiene P y x es una variable, también $\forall x\varphi$ y $\exists x\varphi$ tienen P.

Para definir por *recursión* una función $f : \mathrm{FORM}\,(L) \to X$ es suficiente con

1. Definir $f(\varphi)$ para cada fórmula atómica φ de L.
2. Definir $f(\neg\varphi)$ en términos de $f(\varphi)$ (y de φ si se quiere).
3. Definir $f((\varphi \wedge \psi))$ en términos de $f(\varphi)$ y $f(\psi)$ (y de φ y ψ si se quiere). Análogamente para $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
4. Definir $f(\forall x\varphi)$ en términos de $f(\varphi)$ (y de φ y x si se quiere). Análogamente para $\exists x\varphi$.

Cada aparición del cuantificador $\forall$ dentro de una fórmula φ tiene a continuación una variable y a esta variable le sucede una fórmula, es decir, es una aparición de la forma $\forall x\psi$. La fórmula $\forall x\psi$ se llama el *alcance* de esa aparición de $\forall$. Análogamente, se define el alcance de una aparición de $\exists$ como la fórmula $\exists x\psi$ que comienza con esa aparición concreta de $\exists$. En ambos casos se dice que el cuantificador *liga* la variable x. Una aparición de la variable x en φ es una aparición *ligada* si está dentro del alcance de un cuantificador que liga la variable x. En otro caso se dice que es una aparición *libre* de x en φ. Se dice que una variable *está libre* en φ si tiene una aparición libre en φ y que *está ligada* en φ si tiene una aparición ligada en φ. Obviamente una variable puede estar al tiempo libre y ligada en φ y puede que no esté ni libre ni ligada (esto último únicamente cuando la variable no aparece en la fórmula).

Las fórmulas que no tienen variables libres se llaman *sentencias*. Es costumbre usar la notación $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ para referirse a fórmulas cuyas variables libres están en la secuencia $x_1, \ldots, x_n$. A veces se escribe en este contexto $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y se usan las notaciones φ y $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ indistintamente. Cuando se hace eso se presupone que la lista de variables $x_1, \ldots, x_n$ está formada por variables distintas, es decir, que $x_i \neq x_j$ siempre que $i \neq j$. La notación $\varphi = \varphi(x)$ significará entonces que o bien φ es una sentencia o bien tiene una única variable libre y esta variable es x.

La *sustitución de una variable x por un término t' en un término t* es el término $t(\frac{x}{t'})$ que se obtiene al reemplazar cada aparición de x en t por t'. Esta operación también puede definirse por recursión mediante las cláusulas:

1. $x\binom{x}{t'} = t'$.
2. $y\binom{x}{t'} = y$ si $x \neq y$.
3. $c\binom{x}{t'} = c$.
4. $(Ft_1 \dots t_n)\binom{x}{t'} = Ft_1\binom{x}{t'} \dots t_n\binom{x}{t'}$.

La *sustitución de una variable x por un término t en una fórmula φ* es la fórmula $\varphi\binom{x}{t}$ que se obtiene al reemplazar cada aparición libre de x en φ por t. Esta operación también puede definirse por recursión mediante las cláusulas:

1. $(t_1 \doteq t_2)\binom{x}{t} = t_1\binom{x}{t} \doteq t_2\binom{x}{t}$.
2. $(Rt_1 \dots t_n)\binom{x}{t} = Rt_1\binom{x}{t} \dots t_n\binom{x}{t}$.
3. $(\neg\varphi)\binom{x}{t} = \neg\varphi\binom{x}{t}$.
4. $(\varphi \wedge \psi)\binom{x}{t} = (\varphi\binom{x}{t} \wedge \psi\binom{x}{t})$.
5. $(\varphi \vee \psi)\binom{x}{t} = (\varphi\binom{x}{t} \vee \psi\binom{x}{t})$.
6. $(\varphi \rightarrow \psi)\binom{x}{t} = (\varphi\binom{x}{t} \rightarrow \psi\binom{x}{t})$.
7. $(\varphi \leftrightarrow \psi)\binom{x}{t} = (\varphi\binom{x}{t} \leftrightarrow \psi\binom{x}{t})$.
8. $(\exists x\varphi)\binom{x}{t} = \exists x\varphi$.
9. $(\exists y\varphi)\binom{x}{t} = \exists y\varphi\binom{x}{t}$ si $x \neq y$.
10. $(\forall x\varphi)\binom{x}{t} = \forall x\varphi$.
11. $(\forall y\varphi)\binom{x}{t} = \forall y\varphi\binom{x}{t}$ si $x \neq y$.

El objetivo de sustituir la variable x por el término t en la fórmula φ es obtener una fórmula $\varphi\binom{x}{t}$ que diga de t lo mismo que φ dice de x. Este objetivo no siempre se consigue pues algunas variables de t pueden quedar ligadas en el proceso de sustitución. Decimos que *la sustitución de x por t en φ es libre* o que *x es libremente sustituible por t en φ* si no hay ninguna aparición libre de x en φ dentro del alcance de un cuantificador que ligue una variable de t.

Los siguientes hechos se usarán más adelante:

1. La sustitución de x por x en φ es libre y $\varphi\binom{x}{x} = \varphi$.
2. Si x no está libre en φ, la sustitución de x por t en φ es libre y $\varphi\binom{x}{t} = \varphi$.
3. Si ninguna variable de t está ligada en φ, entonces la sustitución de x por t en φ es libre.
4. Si la variable y no aparece en φ entonces la sustitución de x por y en φ es libre, la sustitución de y por x en $\varphi\binom{x}{y}$ es libre y $\varphi\binom{x}{y}\binom{y}{x} = \varphi$.
5. Si x_1 no aparece en t_2 y x_2 no aparece en t_1 entonces $\varphi\binom{x_1}{t_1}\binom{x_2}{t_2} = \varphi\binom{x_2}{t_2}\binom{x_1}{t_1}$ y una sustitución es libre si y sólo si la otra lo es.

Cuando que se sobrentiende cuál es la variable x que se usa en la sustitución, se escribe $\varphi(t)$ en vez de $\varphi\binom{x}{t}$. Cuando se realizan varias sustituciones seguidas, como $\varphi\binom{x_1}{t_1}\binom{x_2}{t_2}\cdots\binom{x_n}{t_n}$ se usa la notación $\varphi\binom{x_1\cdots x_n}{t_1\cdots t_n}$, o incluso $\varphi(t_1,\ldots,t_n)$ si se sobrentiende cuál es la lista de variables $x_1,\ldots,x_n$.

Capítulo 2

Semántica

En este capítulo se introducen las nociones de *estructura* y *satisfacción* de una fórmula en una estructura. Pero antes de ello necesitamos introducir las n-tuplas y las operaciones y relaciones n-ádicas.

Las n-tuplas generalizan la noción de par ordenado (que es el caso $n = 2$) a cualquier número natural $n \geq 1$. En el caso $n = 1$ la notación es superflua, pero se incluye porque de este modo podemos dar un tratamiento uniforme de todos los casos. Las n-tuplas se definen mediante las cláusulas

- $\langle a_1 \rangle = a_1$.
- $\langle a_1, \ldots, a_{n+1} \rangle = \langle \langle a_1, \ldots, a_n \rangle, a_{n+1} \rangle$.

Así $\langle a, b \rangle = \langle \langle a \rangle, b \rangle$, es decir, la 2-tupla es el par ordenado. Para el caso $n = 3$ se tiene $\langle a, b, c \rangle = \langle \langle a, b \rangle, c \rangle$ y para $n = 4$, $\langle a, b, c, d \rangle = \langle \langle a, b, c \rangle, d \rangle = \langle \langle \langle a, b \rangle, c \rangle, d \rangle$. Lo importante es que $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ representa a los elementos $a_1, \ldots, a_n$ en el orden en el que han sido dados y con las posibles repeticiones que aparezcan. Esto se resume en el siguiente hecho:

Observación 2.1 $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ *si y sólo si* $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots,$ *y* $a_n = b_n$.

Del mismo modo que los pares ordenados nos permiten introducir los productos cartesianos, las relaciones y las funciones, las n-tuplas nos permiten ahora introducir los productos cartesianos iterados A^n, las relaciones n-ádicas y las operaciones n-ádicas.

El *producto cartesiano n-ésimo de A*, A^n, se define mediante las cláusulas:

- $A^1 = A$.
- $A^{n+1} = A^n \times A$

De acuerdo con esto, $A^2 = A \times A$, $A^3 = (A \times A) \times A$ y $A^4 = ((A \times A) \times A) \times A$. Los elementos de A^n son precisamente las n-tuplas que se pueden construir con elementos de A:

$$A^n = \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle : a_1 \in A,\ a_2 \in A, \ldots, a_n \in A\}.$$

Una *relación n-ádica* en el conjunto A es un subconjunto de A^n, es decir, es un conjunto de n-tuplas de elementos de A. Las relaciones monádicas en A son entonces los subconjuntos de A y las relaciones diádicas en A son lo que hasta ahora llamábamos relaciones en A, esto es, conjuntos de pares ordenados formados con elementos de A. Las relaciones triádicas representan una novedad pues hasta el momento no las habíamos considerado.

Observaciones 2.2 *1. A^n es una relación n-ádica en A.*

2. *$\emptyset$ es una relación n-ádica en A para cualquier n.*

3. *Si R y S son relaciones n-ádicas en A, también lo son $R \cup S$, $R \cap S$ y $R \smallsetminus S$.*

4. *Si R es una relación n-ádica en A y $B \subseteq A$, entonces $R \times B$ es una relación $n+1$-ádica en A.*

5. *La diagonal $\{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle : a_1 = a_2 = \cdots = a_n \in A\}$ es una relación n-ádica en A.*

Una *operación n-ádica en A* es una aplicación de A^n en A. Es por tanto una función con dominio A^n y con recorrido contenido en A. Sea f una operación n-ádica en A, es decir, $f : A^n \to A$. Los argumentos de f son n-tuplas $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ formadas con elementos de A y sus valores son elementos de A, esto es, $f(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle) \in A$. Las operaciones monádicas en A son simplemente las aplicaciones de A en A. Las operaciones diádicas en A son las aplicaciones de $A \times A$ en A. Usaremos la notación $f(a_1, \ldots, a_n)$ en vez de $f(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle)$.

Observación 2.3 *Toda operación n-ádica en A es una relación $n+1$-ádica en A.*

Fijemos un lenguaje L. Una *L-estructura* o una *estructura de lenguaje L* es un conjunto no vacío junto con una interpretación de los símbolos de L en el conjunto de acuerdo con las normas que precisaremos a continuación. El conjunto en cuestión se llamará *universo* de la estructura. Usaremos las letras $\mathcal{M}, \mathcal{N}$, si es preciso con índices $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots$ para estructuras y las letras M, N y $M_1, M_2, \ldots$, para los correspondientes universos. Una estructura $\mathcal{M}$ tiene un universo M y una interpretación $X^{\mathcal{M}}$ de cada símbolo $X \in L$. Las interpretaciones de los símbolos de L deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Cada constante $c \in L$ se interpreta como un elemento del universo, esto es, $c^{\mathcal{M}} \in M$.
2. Si $F \in L$ es un símbolo de función n-ádico, F se interpreta como una operación n-ádica en el universo, esto es, $F^{\mathcal{M}} : M^n \to M$.
3. Si $R \in L$ es un símbolo de predicado n-ádico, R se interpreta como una relación n-ádica en el universo, esto es, $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$.

Si $L = \{c_1, \ldots, c_k, F_1, \ldots, F_n, R_1, \ldots, R_m\}$, usamos la notación

$$\mathcal{M} = (M, c_1^{\mathcal{M}}, \ldots, c_k^{\mathcal{M}}, F_1^{\mathcal{M}}, \ldots, F_n^{\mathcal{M}}, R_1^{\mathcal{M}}, \ldots, R_m^{\mathcal{M}})$$

para referirnos a una estructura de lenguaje L.

Sea L un lenguaje y $\mathcal{M}$ una L-estructura. Una *interpretación de las variables en $\mathcal{M}$* es una aplicación π que asigna a cada variable x un elemento $\pi(x)$ del universo M de $\mathcal{M}$. Es por tanto una aplicación $\pi : \mathrm{VAR} \to M$. Una vez se ha fijado una interpretación de las variables podemos considerar a las variables como nombres de elementos de M. En realidad, como se verá en seguida, eso sólo es exacto para las variables libres en una fórmula, pero no para las ligadas.

Fijemos un lenguaje L, una L-estructura $\mathcal{M}$ y una interpretación de las variables π en M. Asignaremos ahora a cada término t de L un elemento $t^{\mathcal{M}}[\pi]$ de M que llamaremos la *denotación de t en $\mathcal{M}$ bajo π*. Se define por recursión con las siguientes cláusulas:

- $x^{\mathcal{M}}[\pi] = \pi(x)$ para cada variable x.
- $c^{\mathcal{M}}[\pi] = c^{\mathcal{M}}$ para cada constante $c \in L$.
- $(Ft_1 \ldots t_n)^{\mathcal{M}}[\pi] = F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\pi], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\pi])$ para cada símbolo de función n-ádico $F \in L$ y cualesquiera términos $t_1, \ldots, t_n$ de L.

A continuación vamos a definir la relación de *satisfacción*. Escribiremos $\mathcal{M} \models \varphi[\pi]$ para indicar que la estructura $\mathcal{M}$ *satisface* a la fórmula φ de L con la interpretación π. También diremos en ese caso que φ es *verdadera en $\mathcal{M}$ bajo π*. La definición se realizará por recursión. Podemos considerar que estamos definiendo una función que asigna a cada fórmula las interpretaciones de las variables en $\mathcal{M}$ que la hacen verdadera. En la práctica seguiremos la tradición y escribiremos las cláusulas de un modo ligeramente distinto, pero que puede reconvertirse fácilmente en una definición por recursión en el sentido indicado. Es conveniente antes introducir la siguiente notación: si x es una variable, π es una interpretación de las variables en $\mathcal{M}$ y $a \in M$, mediante π_a^x nos referimos a la interpretación de las variables que es en todo igual que π excepto, quizás, en el valor dado a la variable x, valor que en π_a^x es el elemento a, con independencia de cuál fuera el valor en π. así pues

- $\pi_a^x(y) = \pi(y)$ para cada variable y distinta de x.
- $\pi_a^x(x) = a$.

Procedemos ahora a dar las cláusulas de la definición recursiva de la relación de satisfacción:

- $\mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[\pi]$ si y sólo si $t_1^{\mathcal{M}}[\pi] = t_2^{\mathcal{M}}[\pi]$.
- $\mathcal{M} \models Rt_1 \ldots t_n[\pi]$ si y sólo si $\langle t_1^{\mathcal{M}}[\pi], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\pi] \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi[\pi]$ si y sólo si no $\mathcal{M} \models \varphi[\pi]$.
- $\mathcal{M} \models (\varphi \wedge \psi)[\pi]$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \varphi[\pi]$ y $\mathcal{M} \models \psi[\pi]$.
- $\mathcal{M} \models (\varphi \vee \psi)[\pi]$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \varphi[\pi]$ o $\mathcal{M} \models \psi[\pi]$.
- $\mathcal{M} \models (\varphi \to \psi)[\pi]$ si y sólo si o bien no $\mathcal{M} \models \varphi[\pi]$ o bien $\mathcal{M} \models \psi[\pi]$.
- $\mathcal{M} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\pi]$ si y sólo si se da uno de los dos siguientes casos: 1) $\mathcal{M} \models \varphi[\pi]$ y $\mathcal{M} \models \psi[\pi]$ o 2) ni $\mathcal{M} \models \varphi[\pi]$ ni $\mathcal{M} \models \psi[\pi]$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi[\pi]$ si y sólo si para cada $a \in M$, $\mathcal{M} \models \varphi[\pi_a^x]$.

- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi[\pi]$ si y sólo si para algún $a \in M$, $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_a]$.

Veremos a continuación que la relación $\mathcal{M} \models \varphi[\pi]$ no depende de los valores que la interpretación π pueda dar a variables que no están libres en φ.

Lema 2.4 (Lema de coincidencia) *Sea L un lenguaje y $\mathcal{M}$ una L-estructura.*

1. *Si t es un término de L y π_1, π_2 son interpretaciones de las variables en M que dan los mismos valores a las variables que aparecen en t, entonces $t^{\mathcal{M}}[\pi_1] = t^{\mathcal{M}}[\pi_2]$.*

2. *Si φ es una fórmula de L y π_1, π_2 son interpretaciones de las variables en M que dan los mismos valores a las variables libres de φ, entonces $\mathcal{M} \models \varphi[\pi_1]$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \varphi[\pi_2]$.*

Prueba. Mostramos primero el resultado para los términos efectuando una demostración por inducción. El primer caso a considerar es cuando t es una variable, digamos $t = x$. Por hipótesis π_1, π_2 dan los mismos valores a las variables de t y como la única variable de t es x esto significa que $\pi_1(x) = \pi_2(x)$. Usando la definición de denotación vemos entonces que

$$x^{\mathcal{M}}[\pi_1] = \pi_1(x) = \pi_2(x) = x^{\mathcal{M}}[\pi_2].$$

El siguiente caso es cuando t es una constante. sea, pues, $t = c$. Usando simplemente la definición de denotación tenemos que

$$c^{\mathcal{M}}[\pi_1] = c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}}[\pi_2].$$

El tercer y último caso consiste en que t sea un término de la forma $Ft_1 \ldots t_n$. Ahora podremos usar la hipótesis inductiva para cada uno de los términos t_i. De acuerdo con esta hipótesis inductiva, si π_1, π_2 dan los mismos valores a las variables de t_i, entonces $t_i^{\mathcal{M}}[\pi_1] = t_i^{\mathcal{M}}[\pi_2]$. Para establecer el correspondiente resultado para $Ft_1 \ldots t_n$, supongamos que π_1 y π_2 dan los mismos valores a las variables de este término. Entonces sea cual sea el término t_i (para $1 \leq i \leq n$), π_1 y π_2 deben dar los mismos valores a las variables de t_i, pues todas ellas son variables de $Ft_1 \ldots t_n$. Usando la hipótesis inductiva tenemos entonces que $t_i^{\mathcal{M}}[\pi_1] = t_i^{\mathcal{M}}[\pi_2]$. Por la definición de denotación concluimos entonces que

$$(Ft_1 \ldots t_n)^{\mathcal{M}}[\pi_1] = F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\pi_1], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\pi_1]) = F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\pi_2], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\pi_2]) = (Ft_1 \ldots t_n)^{\mathcal{M}}[\pi_2].$$

A continuación demostramos *2*, también por inducción. El primer caso a considerar es cuando φ es una fórmula atómica. Puede ser una ecuación o una fórmula que comienza con un predicado. Supongamos que φ es la ecuación $t_1 \doteq t_2$. Por hipótesis π_1 y π_2 dan los mismos valores a las variables libres de φ. Pero las variables libres de φ son simplemente las variables que aparecen en t_1 y las que aparecen en t_2. Por tanto π_1 y π_2 dan los mismos valores a las variables de t_1 y dan los mismos valores a las variables de t_2. Usando el punto *1* podemos asegurar que $t_1^{\mathcal{M}}[\pi_1] = t_1^{\mathcal{M}}[\pi_2]$ y que $t_2^{\mathcal{M}}[\pi_1] = t_2^{\mathcal{M}}[\pi_2]$. Por la definición de la relación de satisfacción resulta entonces que

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \models (t_1 \doteq t_2)[\pi_1] & \text{si y sólo si} & t_1^{\mathcal{M}}[\pi_1] = t_2^{\mathcal{M}}[\pi_1] \\ & \text{si y sólo si} & t_1^{\mathcal{M}}[\pi_2] = t_2^{\mathcal{M}}[\pi_2] \\ & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models (t_1 \doteq t_2)[\pi_2] \end{array}$$

Consideramos ahora la otra posibilidad, que φ sea de la forma $Pt_1 \ldots t_n$. Suponemos que π_1 y π_2 dan los mismos valores a las variables libres de φ. Las variables libres de φ son las variables que aparecen en los términos $t_1, \ldots, t_n$, de modo que π_1 y π_2 dan los mismos valores a las variables cada uno de lo términos $t_1, \ldots, t_n$. Usando *1*, para cada i $(1 \leq i \leq n)$, tenemos que $t_i^{\mathcal{M}}[\pi_1] = t_i^{\mathcal{M}}[\pi_2]$. Utilizando ahora la definición de satisfacción vemos que

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \models Pt_1 \ldots t_n[\pi_1] & \text{si y sólo si} & \langle t_1^{\mathcal{M}}[\pi_1], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\pi_1] \rangle \in P^{\mathcal{M}} \\ & \text{si y sólo si} & \langle t_1^{\mathcal{M}}[\pi_1], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\pi_2] \rangle \in P^{\mathcal{M}} \\ & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models Pt_1 \ldots t_n[\pi_2] \end{array}$$

Queda así establecido el caso de las fórmulas atómicas. Continuando con la inducción, analizamos ahora el caso $\neg\varphi$. Supongamos que π_1 y π_2 dan los mismos valores a las variables libres de $\neg\varphi$. Las variables libres de φ son las mismas que las de $\neg\varphi$ y por ello π_1 y π_2 también dan los mismos valores a las variables libres de φ. Por la hipótesis inductiva sabemos entonces que $\mathcal{M} \models \varphi[\pi_1]$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \varphi[\pi_2]$. Por definición de satisfacción resulta entonces que

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \models \neg\varphi[\pi_1] & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \not\models \varphi[\pi_1] \\ & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \not\models \varphi[\pi_2] \\ & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models \neg\varphi[\pi_2] \end{array}$$

El siguiente caso a considerar es el de una conjunción $(\varphi \wedge \psi)$. Supongamos que π_1 y π_2 dan los mismos valores a las variables libres de $(\varphi \wedge \psi)$. Las variables libres de φ son variables libres de $(\varphi \wedge \psi)$ y lo mismo ocurre con las de ψ. Por tanto π_1 y π_2 dan los mismos valores a las variables libres de φ y a las variables libres de ψ. La hipótesis inductiva asegura en ese caso que $\mathcal{M} \models \varphi[\pi_1]$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \varphi[\pi_2]$ y que $\mathcal{M} \models \psi[\pi_1]$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \psi[\pi_2]$. Por definición de satisfacción,

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \models (\varphi \wedge \psi)[\pi_1] & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models \varphi[\pi_1] \text{ y } \mathcal{M} \models \psi[\pi_1] \\ & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models \varphi[\pi_2] \text{ y } \mathcal{M} \models \psi[\pi_2] \\ & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models (\varphi \wedge \psi)[\pi_2] \end{array}$$

Los casos $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ se resuelven de modo muy parecido, de modo que omitimos los detalles. Vamos ahora a considerar el caso de la cuantificación existencial. Tenemos la fórmula $\exists x\varphi$ y suponemos que π_1 y π_2 dan los mismos valores a las variables libres de $\exists x\varphi$. Las variables libres de φ son todas variables libres de $\exists x\varphi$, con la sola posible excepción de la variable x. Por tanto podría ser que π_1 y π_2 no dieran los mismos valores a las variables libres de φ precisamente por dar valor distinto a x. Sin embargo, para cualquier $a \in M$, las interpretaciones $(\pi_1)_a^x$ y $(\pi_2)_a^x$ sí que dan los mismos valores a las variables libres de φ: dan el mismo valor $\pi_1(y) = \pi_2(y)$ a cualquier variable y libre en φ y distinta de x (pues entonces es una variable libre de $\exists x\varphi$) y también dan el mismo valor $(\pi_1)_a^x(x) = a = (\pi_2)_a^x(x)$ a la variable x. Por la hipótesis inductiva tenemos así que para cada $a \in M$, $\mathcal{M} \models \varphi[(\pi_1)_a^x]$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \varphi[(\pi_2)_a^x]$. Usando esto y la definición de satisfacción concluimos que

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \models \exists x\varphi[\pi_1] & \text{si y sólo si} & \text{para algún } a \in M, \mathcal{M} \models \varphi[(\pi_1)_a^x] \\ & \text{si y sólo si} & \text{para algún } a \in M, \mathcal{M} \models \varphi[(\pi_2)_a^x] \\ & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models \exists x\varphi[\pi_2] \end{array}$$

Finalmente, el caso $\forall x\varphi$ es muy parecido al de $\exists x\varphi$, de manera que podemos obviarlo.

Corolario 2.5 *Sea $\mathcal{M}$ una L-estructura, $a \in M$, π una interpretación de las variables en $\mathcal{M}$, t un término de L y φ una fórmula de L.*

1. *Si x no aparece en t, entonces $t^{\mathcal{M}}[\pi] = t^{\mathcal{M}}[\pi^x_a]$.*

2. *Si x no está libre en φ, entonces $\mathcal{M} \models \varphi[\pi]$si y sólo si $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_a]$.*

De acuerdo con el Lema de coincidencia, si $t = t(x_1, \ldots, x_n)$, es decir, si las variables de t están entre las variables $x_1, \ldots, x_n$ (que suponemos a estos efectos que son todas distintas), entonces le denotación $t^{\mathcal{M}}[\pi]$ sólo depende de los valores $\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)$. Dados $a_1, \ldots, a_n \in M$ (no necesariamente distintos), mediante

$$t^{\mathcal{M}}[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$$

nos referimos a $t^{\mathcal{M}}[\pi]$ para alguna π (o lo que es lo mismo, para cada π) tal que $\pi(x_1) = a_1, \ldots,$ y $\pi(x_n) = a_n$. si se sobrentiende cuál es la secuencia de variables $x_1, \ldots, x_n$ escribimos simplemente $t^{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n]$ En particular si t es un término sin variables, la denotación de t en $\mathcal{M}$ es independiente de la interpretación de las variables: $t^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}[\pi]$ para cada π. Análogamente, si $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, es decir, si las variables libres de φ están entre las variables $x_1, \ldots, x_n$, entonces el resultado $\mathcal{M} \models \varphi[\pi]$ sólo de pende de los valores $\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)$. Dados $a_1, \ldots, a_n \in M$ (no necesariamente distintos), mediante

$$\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$$

abreviamos que $\mathcal{M} \models \varphi[\pi]$ para alguna π (o lo que es lo mismo, para cada π) tal que $\pi(x_1) = a_1$, ... , y $\pi(x_n) = a_n$. También aquí simplificamos la notación y escribimos $\mathcal{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ si la lista de variables se sobrentiende. Y si φ es una sentencia, entonces el hecho de que $\mathcal{M} \models \varphi[\pi]$ es independiente de π: si vale para una π vale para cualquier otra. En ese caso escribimos $\mathcal{M} \models \varphi$.

Estas nociones tienen las siguientes propiedades:

Lema 2.6 *Sea $\mathcal{M}$ una L-estructura, y $a_1, \ldots, a_n$ elementos de M. Se sobrentiende que corresponden a las distintas variables $x_1, \ldots, x_n$ y se entiende que las variables de los términos considerados están en esa lista.*

1. $x_i^{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n] = a_i$.

2. $c^{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n] = c^{\mathcal{M}}$.

3. $(Ft_1 \ldots t_m)^{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n] = F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m^{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n])$.

Lema 2.7 *Sea $\mathcal{M}$ una L-estructura y $a_1, \ldots, a_n$ elementos de M. Se sobrentiende que corresponden a las distintas variables $x_1, \ldots, x_n$ y se entiende que las variables libres de las fórmulas consideradas están en esa lista.*

1. $\mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[a_1, \ldots, a_n] \ \Leftrightarrow\ t_1^{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n] = t_2^{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n]$.

2. $\mathcal{M} \models Rt_1 \ldots t_m[a_1, \ldots, a_n] \ \Leftrightarrow\ \langle t_1^{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m^{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n]\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.

3. $\mathcal{M} \models \neg\varphi[a_1, \ldots, a_n] \ \Leftrightarrow\ \mathcal{M} \not\models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.

4. $\mathcal{M} \models (\varphi \wedge \psi)[a_1, \ldots, a_n] \ \Leftrightarrow\ \mathcal{M} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]$ *y* $\mathcal{M} \models \chi[a_1, \ldots, a_n]$.

5. *Hay cláusulas análogas para los casos $\varphi = (\psi \vee \chi)$, $\varphi = (\psi \to \chi)$ y $\varphi = (\psi \leftrightarrow \chi)$.*

6. *Si x no está en la lista $x_1, \dots, x_n$, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

   a) $\mathcal{M} \models \exists x\varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$

   b) *para algún $a \in M$, $\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n, x/a]$.*

7. *Si $1 \leq i \leq n$, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

   a) $\mathcal{M} \models \exists x_i\varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$

   b) *para algún $a \in M$, $\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_{i-1}/a_{i-1}, x_i/a, x_{i+1}/a_{i+1}, \dots, x_n/a_n]$.*

8. *Análogo para $\forall x\psi$, cambiando sólo "para algún $a \in M$"por "para cada $a \in M$".*

Obsérvese que si cambiamos el orden de la lista $x_1, \dots, x_n$ pero cambiamos también de modo acorde la lista $a_1, \dots, a_n$, entonces la denotación $t^{\mathcal{M}}[x_1/a_1, \dots x_n/a_n]$ y la relación de satisfacción $\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n]$ no varían. Dicho en otros términos:

Lema 2.8 *Sean $\mathcal{M}$ una L-estructura, $x_1, \dots, x_n$ una lista de variables distintas, $a_1 \dots, a_n$ elementos de M y σ una permutación del conjunto $I = \{1, \dots, n\}$, es decir, una función biyectiva de I en I. Entonces si $t = t(x_1, \dots, x_n)$ y $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$,*

1. $t^{\mathcal{M}}[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n] = t^{\mathcal{M}}[x_{\sigma(1)}/a_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}/a_{\sigma(n)}]$.

2. $\mathcal{M} \models \varphi[x_1/a_1, \dots, x_n/a_n] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M} \models \varphi[x_{\sigma(1)}/a_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}/a_{\sigma(n)}]$.

Observación 2.9 *Sea $\varphi = \varphi(x)$. Entonces*

1. $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ *si y sólo si para cada $a \in M$, $\mathcal{M} \models \varphi[a]$.*

2. $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ *si y sólo si para algún $a \in M$, $\mathcal{M} \models \varphi[a]$.*

Lema 2.10 (Lema de la Sustitución) *Sean $\mathcal{M}$ una L-estructura, π una interpretación de las variables en $\mathcal{M}$, t y r términos de L y φ una fórmula de L.*

1. $r(\tfrac{x}{t})^{\mathcal{M}}[\pi] = r^{\mathcal{M}}[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}]$

2. *Si la sustitución de x por t en φ es libre, entonces son equivalentes:*

   a) $\mathcal{M} \models \varphi(\tfrac{x}{t})[\pi]$

   b) $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}]$.

Prueba. Demostramos primero *1* por inducción. La primera posibilidad consiste en que r sea una variable. Si se trata de la variable x entonces

$$r(\tfrac{x}{t})^{\mathcal{M}}[\pi] = x(\tfrac{x}{t})^{\mathcal{M}}[\pi] = t^{\mathcal{M}}[\pi] = \pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}(x) = x^{\mathcal{M}}[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}] = r^{\mathcal{M}}[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}]$$

y si se trata de una variable y distinta de x, entonces

$$r(\tfrac{x}{t})^{\mathcal{M}}[\pi] = y(\tfrac{x}{t})^{\mathcal{M}}[\pi] = y^{\mathcal{M}}[\pi] = \pi(y) = \pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}(y) = y^{\mathcal{M}}[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}] = r^{\mathcal{M}}[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}].$$

El siguiente caso es que r sea una constante c de L. En ese caso

$$r(\tfrac{x}{t})^{\mathcal{M}}[\pi] = c(\tfrac{x}{t})^{\mathcal{M}}[\pi] = c^{\mathcal{M}}[\pi] = c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}}[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}] = r^{\mathcal{M}}[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}].$$

Finalmente consideramos el caso en que r es de la forma $Ft_1 \dots t_n$. Por hipótesis inductiva, para cada i $(1 \le i \le n)$, $t_i\binom{x}{t}^{\mathcal{M}}[\pi] = t_i^{\mathcal{M}}[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}]$. Usando la definición de sustitución y la de denotación se concluye entonces que

$$r\binom{x}{t}^{\mathcal{M}}[\pi] = (Ft_1 \dots t_n)\binom{x}{t}^{\mathcal{M}}[\pi] = (Ft_1\binom{x}{t} \dots t_n\binom{x}{t_n})^{\mathcal{M}}[\pi] =$$

$$= F^{\mathcal{M}}(t_1\binom{x}{t}^{\mathcal{M}}[\pi], \dots, t_n\binom{x}{t}^{\mathcal{M}}[\pi]) = F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}], \dots, t_n^{\mathcal{M}}[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}]) =$$

$$= (Ft_1 \dots t_n)^{\mathcal{M}}[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}] = r^{\mathcal{M}}[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}].$$

El punto *2* también se establece por inducción. El caso inicial es cuando φ es una fórmula atómica. Supongamos primero que es una ecuación, digamos que $t_1 \doteq t_2$. Usando el punto *1* y las definiciones de sustitución y satisfacción vemos que

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \models (t_1 \doteq t_2)\binom{x}{t}[\pi] & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models t_1\binom{x}{t} \doteq t_2\binom{x}{t}[\pi] \\ & \text{si y sólo si} & t_1\binom{x}{t}^{\mathcal{M}}[\pi] = t_2\binom{x}{t}^{\mathcal{M}}[\pi] \\ & \text{si y sólo si} & t_1^{\mathcal{M}}[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}] = t_2^{\mathcal{M}}[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}] \\ & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}] \end{array}$$

El siguiente caso es que φ sea de la forma $Pt_1 \dots t_n$. Usando de nuevo *1* tenemos que

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \models (Pt_1 \dots t_n)\binom{x}{t}[\pi] & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models Pt_1\binom{x}{t} \dots t_n\binom{x}{t}[\pi] \\ & \text{si y sólo si} & \langle t_1\binom{x}{t}^{\mathcal{M}}[\pi], \dots, t_2\binom{x}{t}^{\mathcal{M}}[\pi]\rangle \in P^{\mathcal{M}} \\ & \text{si y sólo si} & \langle t_1^{\mathcal{M}}[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}], \dots t_n^{\mathcal{M}}[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}]\rangle \in P^{\mathcal{M}} \\ & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models Pt_1 \dots t_n[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}] \end{array}$$

En el caso $\neg\varphi$ podemos usar la hipótesis inductiva para φ pues si x es libremente sustituible por t en $\neg\varphi$, también lo es en φ. Entonces

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \models (\neg\varphi)\binom{x}{t}[\pi] & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models \neg\varphi\binom{x}{t}[\pi] \\ & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \not\models \varphi\binom{x}{t}[\pi] \\ & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \not\models \varphi[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}] \\ & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models \neg\varphi[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}] \end{array}$$

En el caso $(\varphi \wedge \psi)$ también podemos utilizar la hipótesis inductiva para φ y ψ, pues si x es libremente sustituible en $(\varphi \wedge \psi)$ también lo es en φ y en ψ. Contando con esto vemos que

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \models (\varphi \wedge \psi)\binom{x}{t}[\pi] & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models (\varphi\binom{x}{t} \wedge \psi\binom{x}{t})[\pi] \\ & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models \varphi\binom{x}{t}[\pi] \text{ y } \mathcal{M} \models \psi\binom{x}{t}[\pi] \\ & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}] \text{ y } \mathcal{M} \models \psi[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}] \\ & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models (\varphi \wedge \psi)[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}] \end{array}$$

Los casos $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son similares. Consideramos ahora el caso $\exists y\varphi$. Supongamos primero que la variable x no está libre en $\exists y\varphi$. Entonces $(\exists y\varphi)\binom{x}{t} = \exists y\varphi$ y además las interpretaciones π y $\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}$ dan los mismos valores a las variables libres de $\exists y\varphi$. Por el Lema de coincidencia,

$$\mathcal{M} \models \exists y\varphi[\pi] \text{ si y sólo si } \mathcal{M} \models \exists y\varphi[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}].$$

Reuniendo todo esto resulta que

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \models (\exists y\varphi)\binom{x}{t}[\pi] & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models \exists y\varphi[\pi] \\ & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models \exists y\varphi[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}] \end{array}$$

Ahora supongamos que x está libre en $\exists y\varphi$. En particular esto significa que x e y son variables distintas. En ese caso $(\exists y\varphi)(\frac{x}{t}) = \exists y\varphi(\frac{x}{t})$. Además en esta situación el hecho de que x sea libremente sustituible por t en $\exists y\varphi$ implica que también lo es en φ, de manera que podemos usar la hipótesis inductiva sobre φ. Para cualquier $a \in M$, la hipótesis inductiva nos garantiza que

$$\mathcal{M} \models \varphi(\tfrac{x}{t})[\pi^y_a] \text{ si y sólo si } \mathcal{M} \models \varphi[(\pi^y_a)^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi^y_a]}].$$

Como x está libre en $\exists y\varphi$ y es libremente sustituible por t en $\exists y\varphi$, la variable y no puede aparecer en t, con lo cual vemos por el Lema de coincidencia que sea quien sea $a \in M$ tenemos que $t^{\mathcal{M}}[\pi^y_a] = t^{\mathcal{M}}[\pi]$. Además como x e y son distintas, $(\pi^y_a)^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]} = (\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]})^y_a$. Con toda esta información concluimos que

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M} \models (\exists y\varphi)(\frac{x}{t})[\pi] & \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models \exists y\varphi(\frac{x}{t})[\pi] \\
& \text{si y sólo si} & \text{para algún } a \in M,\ \mathcal{M} \models \varphi(\frac{x}{t})[\pi^y_a] \\
& \text{si y sólo si} & \text{para algún } a \in M,\ \mathcal{M} \models \varphi[(\pi^y_a)^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi^y_a]}] \\
& \text{si y sólo si} & \text{para algún } a \in M,\ \mathcal{M} \models \varphi[(\pi^y_a)^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}] \\
& \text{si y sólo si} & \text{para algún } a \in M,\ \mathcal{M} \models \varphi[(\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]})^y_a] \\
& \text{si y sólo si} & \mathcal{M} \models \exists y\varphi[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}]
\end{array}$$

El caso $\forall y\varphi$ es similar.

Corolario 2.11 *Sean $\mathcal{M}$ una L-estructura, π una interpretación de las variables en $\mathcal{M}$, t un término de L sin variables, $r = r(x)$ un término de L y $\varphi = \varphi(x)$ una fórmula de L.*

1. $r(\frac{x}{t})^{\mathcal{M}} = r^{\mathcal{M}}[x/t^{\mathcal{M}}]$.
2. $\mathcal{M} \models \varphi(\frac{x}{t})$ *si y sólo si* $\mathcal{M} \models \varphi[x/t^{\mathcal{M}}]$.

Capítulo 3

Consecuencia y equivalencia lógica

Usamos las letras Σ, Γ, Δ para conjuntos de fórmulas. Si $\mathcal{M}$ es una L-estructura, Σ es un conjunto de fórmulas de L y π es una interpretación de las variables, mediante

$$\mathcal{M} \models \Sigma[\pi]$$

indicamos que $\mathcal{M} \models \psi[\pi]$ para cada $\psi \in \Sigma$. Si Σ es un conjunto de sentencias de L, mediante

$$\mathcal{M} \models \Sigma$$

indicamos que $\mathcal{M} \models \psi$ para cada $\psi \in \Sigma$. Se dice en ese caso que $\mathcal{M}$ *es un modelo de* Σ.

La relación de *consecuencia* se establece entre conjuntos de fórmulas y fórmulas. Escribimos

$$\Sigma \models \varphi$$

para indicar que la fórmula φ es consecuencia del conjunto de fórmulas Σ. También se dice entonces que Σ *implica* φ. Obsérvese que el símbolo $\models$ se usa para dos relaciones muy distintas, la relación de satisfacción $\mathcal{M} \models \varphi$ y la relación de consecuencia $\Sigma \models \varphi$. Sea Σ un conjunto de fórmulas de L y φ una fórmula de L. Decimos que φ es *consecuencia* de Σ y escribimos $\Sigma \models \varphi$ si para cada L-estructura $\mathcal{M}$ y cada interpretación de las variables π, si $\mathcal{M} \models \Sigma[\pi]$, entonces también $\mathcal{M} \models \varphi[\pi]$. Si Σ es un conjunto de sentencias y φ es una sentencia, por el Lema de coincidencia sabemos que la condición $\Sigma \models \varphi$ es equivalente en este caso a que para cada L-estructura $\mathcal{M}$, si $\mathcal{M} \models \Sigma$, entonces $\mathcal{M} \models \varphi$, es decir, a que todo modelo de Σ sea también modelo de φ.

Enunciamos a continuación una serie de propiedades básicas de la relación de consecuencia.

Proposición 3.1

1. *Si* $\varphi \in \Sigma$*, entonces* $\Sigma \models \varphi$.
2. *Si* $\Sigma \models \varphi$ *y* $\Sigma \subseteq \Gamma$*, entonces* $\Gamma \models \varphi$.
3. *Si* $\Gamma \models \varphi$ *y para cada* $\psi \in \Gamma$*,* $\Sigma \models \psi$*, entonces* $\Sigma \models \varphi$.

Decimos que un conjunto Σ de fórmulas de L es *satisfacible* si existe una L-estructura $\mathcal{M}$ y una interpretación de las variables π tales que $\mathcal{M} \models \Sigma[\pi]$. En otro caso decimos que Σ es *insatisfacible*. Por tanto, un conjunto Σ de sentencias es satisfacible si y sólo si tiene un modelo, es decir, si y sólo si existe una estructura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Sigma$. Por último, se dice que una fórmula φ es satisfacible si el conjunto $\{\varphi\}$ lo es.

Proposición 3.2 *Sea Σ un conjunto de fórmulas de L.*

1. *Σ es insatisfacible si y sólo si para cada fórmula φ de L, $\Sigma \models \varphi$.*
2. *Σ es insatisfacible si y sólo si hay alguna fórmula φ de L tal que $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \models \neg\varphi$.*
3. *Para cada fórmula φ de L, $\Sigma \models \varphi$ si y sólo si el conjunto $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible.*

Definimos ahora la relación de *equivalencia lógica* entre fórmulas. Sean φ y ψ fórmulas de L. Decimos que φ es *lógicamente equivalente* a ψ y escribimos $\varphi \equiv \psi$ si para cada L-estructura $\mathcal{M}$ y cada interpretación de las variables π, $\mathcal{M} \models \varphi[\pi]$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \psi[\pi]$. Si φ y ψ son sentencias basta con decir que para cada L-estructura $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \psi$, es decir, que φ y ψ tienen los mismos modelos.

Observaciones 3.3 *1.* $\varphi \equiv \varphi$.

2. *Si $\varphi \equiv \psi$, entonces $\psi \equiv \varphi$.*
3. *Si $\varphi \equiv \psi$ y $\psi \equiv \chi$, entonces $\varphi \equiv \chi$.*
4. *Si $\varphi \equiv \psi$ y χ' se obtiene de χ sustituyendo una instancia de φ en χ por ψ, entonces $\chi \equiv \chi'$.*

Si $\Sigma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, en vez de $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models \varphi$ escribimos $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$. En particular, en vez de $\{\psi\} \models \varphi$ escribimos $\psi \models \varphi$.

Proposición 3.4 *$\varphi \equiv \psi$ si y sólo si $\varphi \models \psi$ y $\psi \models \varphi$.*

Ahora vamos a sistematizar las propiedades de las relaciones de consecuencia y equivalencia lógica de acuerdo con los símbolos lógicos a que afectan. Comenzamos con la negación. Entre los resultados que se exponen están las leyes que justifican los mecanismos de demostración por prueba indirecta y por reducción al absurdo.

Proposición 3.5 (Propiedades de $\neg$) *1.* $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$.

2. *Si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \models \varphi$, entonces $\Sigma \models \varphi$.*
3. *Si $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \neg\varphi$, entonces $\Sigma \models \neg\varphi$.*
4. *Si $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \models \neg\varphi$, entonces para cada ψ, $\Sigma \models \psi$.*

5. *Si* $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$ *y* $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \models \neg\varphi$, *entonces* $\Sigma \models \psi$.
6. *Si* $\Sigma \cup \{\psi\} \models \varphi$ *y* $\Sigma \cup \{\psi\} \models \neg\varphi$, *entonces* $\Sigma \models \neg\psi$.

Proposición 3.6 (Propiedades de $\wedge$) 1. $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$

2. $(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$
3. $\varphi, \psi \models (\varphi \wedge \psi)$
4. $(\varphi \wedge \psi) \models \varphi$ *y* $(\varphi \wedge \psi) \models \psi$.
5. $(\varphi \wedge \varphi) \equiv \varphi$
6. $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
7. $(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Proposición 3.7 (Propiedades de $\vee$) 1. $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$

2. $(\varphi \vee (\psi \vee \chi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \vee \chi)$
3. $\varphi \models (\varphi \vee \psi)$ *y* $\psi \models (\varphi \vee \psi)$
4. $(\varphi \vee \psi), \neg\psi \models \varphi$ *y* $(\varphi \vee \psi), \neg\varphi \models \psi$.
5. $(\varphi \vee \varphi) \equiv \varphi$
6. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
7. $(\varphi \vee \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
8. $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$
9. $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$
10. *Si* $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \chi$ *y* $\Sigma \cup \{\psi\} \models \chi$, *entonces* $\Sigma \cup \{(\varphi \vee \psi)\} \models \chi$.

Proposición 3.8 (Propiedades de $\rightarrow$) 1. *Si* $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$, *entonces* $\Sigma \models (\varphi \rightarrow \psi)$

2. $(\varphi \rightarrow \psi), \varphi \models \psi$
3. $(\varphi \rightarrow \psi), \neg\psi \models \neg\varphi$
4. $\neg\varphi \models (\varphi \rightarrow \psi)$ *y* $\psi \models (\varphi \rightarrow \psi)$
5. $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi)$
6. $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$
7. $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$
8. $(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \rightarrow \psi)$
9. $(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$
10. $(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$

Proposición 3.9 (Propiedades de $\leftrightarrow$) 1. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$

2. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\psi \leftrightarrow \varphi)$
3. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi))$
4. $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\psi \wedge \neg\varphi))$
5. $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$
6. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv (\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$
7. $(\varphi \to \psi), (\psi \to \chi), (\chi \to \varphi) \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$

Ejercicio 3.10 *Decidir cuáles de las siguientes equivalencias son correctas. Si no lo son, determinar si al menos una de las fórmulas implica la otra.*

1. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \equiv ((\varphi \to \psi) \to \chi)$
2. $(\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi)) \equiv ((\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi)$
3. $((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \equiv ((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi))$
4. $((\varphi \vee \psi) \to \chi) \equiv ((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi))$
5. $((\varphi \vee \psi) \to \chi) \equiv ((\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi))$
6. $(\varphi \to (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\varphi \to \chi) \wedge (\varphi \to \chi))$
7. $(\varphi \to (\psi \vee \chi)) \equiv ((\varphi \to \chi) \vee (\varphi \to \chi))$

Lema 3.11 *Si la variable x no aparece libre en ninguna fórmula de Σ entonces $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es satisfacible si y sólo si $\Sigma \cup \{\exists x\varphi\}$ es satisfacible.*

Prueba. Supongamos que x no aparece en ninguna fórmula de Σ. Supongamos que $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es satisfacible y escojamos $\mathcal{M}$ y π tales que $\mathcal{M} \models \Sigma \cup \{\varphi\}[\pi]$. Como $\mathcal{M} \models \varphi[\pi]$ resulta que hay $a \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_a]$, a saber, $a = \pi(x)$. Por definición de satisfacción, $\mathcal{M} \models \exists x\varphi[\pi]$, con lo cual $\mathcal{M} \models \Sigma \cup \{\exists x\varphi\}[\pi]$. Para establecer la otra dirección, supongamos ahora que $\Sigma \cup \{\exists x\varphi\}$ es satisfacible y escojamos $\mathcal{M}$ y π tales que $\mathcal{M} \models \Sigma \cup \{\exists x\varphi\}[\pi]$. Como $\mathcal{M} \models \exists x\varphi[\pi]$, hay $a \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_a]$. Como x no está libre en ninguna fórmula de Σ y $\mathcal{M} \models \Sigma[\pi]$, por el Lema de coincidencia $\mathcal{M} \models \Sigma[\pi^x_a]$. Uniendo todo esto, $\mathcal{M} \models \Sigma \cup \{\varphi\}[\pi^x_a]$, de manera que $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es satisfacible.

Lema 3.12 *Sea Σ un conjunto de fórmulas de lenguaje L, sea $\{x_i : i \in I\}$ una colección de variables distintas y sea $C = \{c_i : i \in I\}$ una colección de correspondientes constantes también distintas y que además no son de L. Sea Σ' el resultado de sustituir sistemáticamente en todas las fórmulas de Σ las apariciones libres de las variables x_i por las correspondientes constantes c_i. Entonces Σ es satisfacible si y sólo si Σ' lo es.*

Prueba. Para cada término t de L sea t' el resultado de sustituir en t las apariciones de las variables x_i por las constantes c_i y para cada fórmula φ de L sea φ' el resultado de sustituir las apariciones libres de las variables x_i por las correspondientes constantes c_i. Entonces $\Sigma' = \{\varphi' : \varphi \in \Sigma\}$. Supongamos primero que Σ es satisfacible. Hay entonces una L-estructura $\mathcal{M}$ y una interpretación de las variables π tales que $\mathcal{M} \models \Sigma[\pi]$. Definimos una $L \cup C$-estructura $\mathcal{M}'$ con el mismo universo que $\mathcal{M}$, con la misma interpretación de los símbolos de L que $\mathcal{M}$ y con $c_i^{\mathcal{M}'} = \pi(x_i)$ para cada $i \in I$. Una inducción muestra que para cada término t de L, $t^{\mathcal{M}}[\pi] = t'^{\mathcal{M}'}[\pi]$. Usando esto se muestra por inducción que para cada fórmula φ de L, $\mathcal{M} \models \varphi[\pi]$ si y sólo si $\mathcal{M}' \models \varphi'[\pi]$. De ello se sigue que $\mathcal{M}' \models \Sigma'[\pi]$ y por tanto que Σ' es satisfacible.

Supongamos ahora que Σ' es satisfacible y veamos que también Σ lo es. Sea $\mathcal{M}$ una $L \cup C$-estructura y π una interpretación de las variables tales que $\mathcal{M} \models \Sigma[\pi]$. Sea $\mathcal{M}^*$ la L-estructura que tiene el mismo universo que $\mathcal{M}$ y que interpreta los símbolos de L de la misma manera que $\mathcal{M}$ y sea π^* la interpretación de las variables en $\mathcal{M}^*$ que se define de manera que $\pi^*(x_i) = c_i^{\mathcal{M}}$ para $i \in I$ y $\pi^*(y) = \pi(y)$ para cualquier otra variable y. Por inducción se ve que para cada término t de L, $t^{\mathcal{M}^*}[\pi^*] = t'^{\mathcal{M}}[\pi]$ y a continuación, también por inducción, que para cada fórmula φ de L, $\mathcal{M}^* \models \varphi[\pi^*]$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \varphi'[\pi]$. Se concluye entonces que $\mathcal{M}^* \models \Sigma[\pi^*]$ y con ello que Σ es satisfacible.

Lema 3.13 *Si la constante c no aparece ni en φ ni en ninguna fórmula de Σ, entonces $\Sigma \cup \{\exists x\varphi\}$ es satisfacible si y sólo si $\Sigma \cup \{\varphi(\frac{x}{c})\}$ es satisfacible.*

Prueba. Este resultado puede establecerse aplicando adecuadamente los lemas 3.11 y 3.12. Se escoge primero una constante d distinta de c que no aparezca ni en φ ni en ninguna fórmula de Σ. Sea Σ' el resultado de sustituir en todas las fórmulas de Σ cada aparición libre de x por d. Por el Lema 3.12 vemos que $\Sigma \cup \{\exists x\varphi\}$ es satisfacible si y sólo si $\Sigma' \cup \{\exists x\varphi\}$ lo es. Como x no aparece libre en ninguna fórmula de Σ', por el Lema 3.11, $\Sigma' \cup \{\exists x\varphi\}$ es satisfacible si y sólo si $\Sigma' \cup \{\varphi\}$ lo es. Aplicando de nuevo el Lema 3.12 a la sustitución de x por c vemos que $\Sigma' \cup \{\varphi\}$ es satisfacible si y sólo si $\Sigma' \cup \{\varphi(\frac{x}{c})\}$ lo es. Con una última aplicación de 3.12, en este caso a la variable x y la constante d, se tiene que $\Sigma' \cup \{\varphi(\frac{x}{c}\}$ es satisfacible si y sólo si $\Sigma \cup \{\varphi(\frac{x}{c}\}$ es satisfacible. Encadenando todos estos resultados parciales se ve que $\Sigma \cup \{\exists x\varphi\}$ es satisfacible si y sólo si $\Sigma \cup \{\varphi(\frac{x}{c}\}$ lo es.

Hay una prueba alternativa que elimina el uso del Lema 3.12 y depende más directamente del Lema de la sustitución. Dejamos los detalles como ejercicio.

Proposición 3.14 (Propiedades de $\exists$)

1. *Si la variable x es sustituible libremente por t en φ, entonces $\varphi(\frac{x}{t}) \models \exists x\varphi$.*
2. *Si la variable x no está libre en ninguna fórmula de Σ ni en ψ y $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$, entonces $\Sigma \cup \{\exists x\varphi\} \models \psi$.*
3. *Si la constante c no aparece ni en φ ni en ψ ni en ninguna fórmula de Σ y $\Sigma \cup \{\varphi(\frac{x}{c})\} \models \psi$, entonces $\Sigma \cup \{\exists x\varphi\} \models \psi$.*
4. *$\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$.*
5. *$\exists x(\varphi \wedge \psi) \models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$*
6. *$\exists x(\varphi \to \psi) \equiv (\forall x\varphi \to \exists x\psi)$*
7. *Si la variable y no aparece en φ, entonces $\exists x\varphi \equiv \exists y\varphi(\frac{x}{y})$.*
8. *Si la variable y no aparece en φ y no aparece libre ni en ψ ni en ninguna fórmula de Σ y $\Sigma \cup \{\varphi(\frac{x}{y})\} \models \psi$, entonces $\Sigma \cup \{\exists x\varphi\} \models \psi$*
9. *Si la variable x no aparece en φ, entonces $\exists x\varphi \equiv \varphi$.*

10. *Si la variable x no está libre en φ, entonces*

    a) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\varphi \wedge \exists x\psi)$
    b) $\exists x(\psi \wedge \varphi) \equiv (\exists x\psi \wedge \varphi)$
    c) $\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee \exists x\psi)$
    d) $\exists x(\psi \vee \varphi) \equiv (\exists x\psi \vee \varphi)$
    e) $\exists x(\varphi \to \psi) \equiv (\varphi \to \exists x\psi)$
    f) $\exists x(\psi \to \varphi) \equiv (\forall x\psi \to \varphi)$

Prueba. *1.* Supongamos que $\mathcal{M} \models \varphi(\frac{x}{t})[\pi]$. Como x es libremente sustituible por t en φ, podemos usar el Lema de la sustitución y garantizar que $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}]$ de modo que hay $a \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_a]$ (a saber, $a = t^{\mathcal{M}}[\pi]$). Por definición de satisfacción, $\mathcal{M} \models \exists x\varphi[\pi]$.

2. Supongamos que $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$ pero que $\Sigma \cup \{\exists x\varphi\} \not\models \psi$. Entonces $\Sigma \cup \{\exists x\varphi, \neg\psi\}$ es satisfacible. Aplicando el Lema 3.11 a $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ y φ concluimos que $\Sigma \cup \{\varphi, \neg\psi\}$ también es satisfacible, lo cual significa que $\Sigma \cup \{\varphi\} \not\models \psi$, en contradicción con lo supuesto al inicio. El punto *3* se establece de modo parecido usando en este caso el Lema 3.13.

Los puntos *4* y *5* se justifican sin mayor dificultad a partir de la definición de satisfacción. Respecto a *6*, obsérvese que $\exists x(\varphi \to \psi) \equiv \exists x(\neg\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x\neg\varphi \vee \exists x\psi) \equiv (\neg\forall x\varphi \vee \exists x\psi) \equiv (\forall x\varphi \to \exists x\psi)$.

7. Mostramos que $\mathcal{M} \models \exists x\varphi[\pi]$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \exists y\varphi(\frac{x}{y})$. Como y no aparece en φ, x es libremente sustituible por y en φ y podemos usar el Lema de la sustitución. Por definición de satisfacción, $\mathcal{M} \models \exists y\varphi(\frac{x}{y})[\pi]$ si y sólo si hay un $a \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi(\frac{x}{y})[\pi^y_a]$. Por el Lema de la sustitución, para cualquier $a \in M$, $\mathcal{M} \models \varphi(\frac{x}{y})[\pi^y_a]$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_{y^{\mathcal{M}}[\pi^y_a]}]$, pero $a = y^{\mathcal{M}}[\pi^y_a]$, de modo que esto último equivale a $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_a]$. Así, $\mathcal{M} \models \exists y\varphi(\frac{x}{y})[\pi]$ si y sólo si hay algún $a \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_a]$. Pero por definición de satisfacción esta última condición equivale a que $\mathcal{M} \models \exists x\varphi[\pi]$.

El punto *8* se sigue de *2* y *7* y el punto *9* se obtiene directamente de *7* dado que si x no aparece en φ entonces $\varphi(\frac{x}{x}) = \varphi$ y x es libremente sustituible por x en φ. Todas las partes de *10* se siguen fácilmente de la definición de satisfacción y el Lema de coincidencia.

Proposición 3.15 (Propiedades de $\forall$) *1. Si la variable x es sustituible libremente por t en φ, entonces $\forall x\varphi \models \varphi(\frac{x}{t})$.*

2. *Si la variable x no está libre en ninguna fórmula de Σ y $\Sigma \models \varphi$, entonces $\Sigma \models \forall x\varphi$.*

3. *Si la constante c no aparece ni en φ ni en ninguna fórmula de Σ y $\Sigma \models \varphi(\frac{x}{c})$, entonces $\Sigma \models \forall x\varphi$.*

4. a) $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$.
    b) $\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$.
    c) $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$.
    d) $\exists x\varphi \equiv \neg\forall x\neg\varphi$.

5. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$.

6. $(\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \models \forall x(\varphi \vee \psi)$

7. a) $\forall x(\varphi \to \psi) \models (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$
   b) $\forall x(\varphi \to \psi) \models (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$
   c) $(\exists x\varphi \to \forall x\psi) \models \forall x(\varphi \to \psi)$
8. a) $\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \models (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi)$
   b) $\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \models (\exists x\varphi \leftrightarrow \exists x\psi)$
9. *Si la variable y no aparece en φ, entonces $\forall x\varphi \equiv \forall y\varphi(\frac{x}{y})$.*
10. *Si la variable y no aparece en φ y no aparece libre en ninguna fórmula de Σ y $\Sigma \models \varphi(\frac{x}{y})$, entonces $\Sigma \models \forall x\varphi$*
11. *Si la variable x no aparece en φ, entonces $\forall x\varphi \equiv \varphi$.*
12. *Si la variable x no está libre en φ, entonces*
    a) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\varphi \wedge \forall x\psi)$
    b) $\forall x(\psi \wedge \varphi) \equiv (\forall x\psi \wedge \varphi)$
    c) $\forall x(\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \vee \forall x\psi)$
    d) $\forall x(\psi \vee \varphi) \equiv (\forall x\psi \vee \varphi)$
    e) $\forall x(\varphi \to \psi) \equiv (\varphi \to \forall x\psi)$
    f) $\forall x(\psi \to \varphi) \equiv (\exists x\psi \to \varphi)$

Prueba. Es conveniente verificar primero el punto *4*, directamente a partir de la definición de satisfacción, pues entonces se pueden establecer casi todas las restantes propiedades de $\forall$ a partir de las propiedades ya justificadas de $\exists$. Por ejemplo, el punto *2* se establecería como se indica a continuación. Supongamos que x no aparece libre en ninguna fórmula de Σ, que $\Sigma \models \varphi$ pero que, sin embargo, $\Sigma \not\models \forall x\varphi$. Entonces $\Sigma \cup \{\neg\forall x\varphi\}$ es satisfacible. Como $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$, también es satisfacible $\Sigma \cup \{\exists x\neg\varphi\}$ y podemos usar el Lema 3.11 para concluir que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible. Pero esto último significa que $\Sigma \not\models \varphi$.

Proposición 3.16 (Propiedades de $\doteq$) *1.* $\Sigma \models t \doteq t$

2. $t_1 \doteq t_2 \models t_2 \doteq t_1$
3. $t_1 \doteq t_2,\ t_2 \doteq t_3 \models t_1 \doteq t_3$
4. *Si x es libremente sustituible por t_1 y por t_2 en φ, entonces $\varphi(\frac{x}{t_1}),\ t_1 \doteq t_2 \models \varphi(\frac{x}{t_2})$.*
5. *Si x es libremente sustituible por t en φ, entonces $\varphi,\ x \doteq t \models \varphi(\frac{x}{t})$.*
6. $t_1 \doteq t'_1, \ldots, t_n \doteq t'_n \models Ft_1 \ldots t_n \doteq Ft'_1 \ldots t'_n$
7. $t_1 \doteq t'_1, \ldots, t_n \doteq t'_n, Pt_1 \ldots t_n \models Pt'_1 \ldots t'_n$

Prueba. Únicamente los puntos *4* y *5* necesitan un poco de argumentación. Respecto a *4*, supóngase que x es libremente sustituible por t_1 y por t_2 en φ y que $\mathcal{M} \models \varphi(\frac{x}{t_1})[\pi]$ y que $\mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[\pi]$. Por definición de satisfacción y por el Lema de la sustitución vemos que $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_{t_1^{\mathcal{M}}[\pi]}]$ y que $t_1^{\mathcal{M}}[\pi] = t_2^{\mathcal{M}}[\pi]$, de manera que $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_{t_2^{\mathcal{M}}[\pi]}]$. Usando de nuevo el Lema de la sustitución se concluye que $\mathcal{M} \models \varphi(\frac{x}{t_2})[\pi]$. *5* es un caso particular de *4* dado que x es libremente sustituible por x en φ y $\varphi(\frac{x}{x}) = \varphi$.

Proposición 3.17 *Si la variable x es libremente sustituible por el término t en la fórmula φ y no aparece en t, entonces las siguientes fórmulas son lógicamente equivalentes:*

1. $\varphi(^x_t)$
2. $\exists x(x \doteq t \wedge \varphi)$
3. $\forall x(x \doteq t \to \varphi)$

Prueba. Es suficiente mostrar que $\varphi(^x_t)$ implica $\exists x(x \doteq t \wedge \varphi)$, que $\exists x(x \doteq t \wedge \varphi)$ implica $\forall x(x \doteq t \to \varphi)$ y que $\forall x(x \doteq t \to \varphi)$ implica $\varphi(^x_t)$. Para establecer el primer punto supongamos que $\mathcal{M} \models \varphi(^x_t)[\pi]$. Como x es libremente sustituible por t en φ, podemos aplicar el Lema de la sustitución y obtener que $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}]$. Si $a = t^{\mathcal{M}}[\pi]$ resulta entonces que, como x no está en t, $a = t^{\mathcal{M}}[\pi^x_a]$ y por tanto $\mathcal{M} \models (x \doteq t \wedge \varphi)[\pi^x_a]$, de modo que $\mathcal{M} \models \exists x(x \doteq t \wedge \varphi)[\pi]$. Esto establece la primera implicación. Para la segunda, supongamos que $\mathcal{M} \models \exists x(x \doteq t \wedge \varphi)[\pi]$ y veamos que $\mathcal{M} \models \forall x(x \doteq t \to \varphi)[\pi]$. Sea $a \in M$ tal que $\mathcal{M} \models x \doteq t[\pi^x_a]$ y veamos que $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_a]$. Como $\mathcal{M} \models \exists x(x \doteq t \wedge \varphi)[\pi]$, hay $b \in M$ tal que $\mathcal{M} \models (x \doteq t \wedge \varphi)[\pi^x_b]$. Entonces $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_b]$ y $b = t^{\mathcal{M}}[\pi^x_b] = t^{\mathcal{M}}[\pi]$ ya que x no aparece en t. Como también $a = t^{\mathcal{M}}[\pi]$, se concluye que $b = a$ y con ello que $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_a]$, que es lo que se pretendía justificar. Para finalizar, supongamos que $\mathcal{M} \models \forall x(x \doteq t \to \varphi)[\pi]$ y veamos que $\varphi(^x_t)[\pi]$. Por el Lema de la sustitución vemos que basta justificar que $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_{t^{\mathcal{M}}[\pi]}]$. Sea $a = t^{\mathcal{M}}[\pi]$. Como x no está en t, $a = t^{\mathcal{M}}[\pi^x_a]$ y por tanto $\mathcal{M} \models x \doteq t[\pi^x_a]$. Como además $\mathcal{M} \models (x \doteq t \to \varphi)[\pi^x_t]$, se concluye inmediatamente que $\mathcal{M} \models \varphi[\pi^x_a]$.

Proposición 3.18 *Para cada fórmula $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ hay otra fórmula $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ que es lógicamente equivalente a φ y en la que los únicos conectores que aparecen son $\neg$ y $\wedge$ y el único cuantificador es $\exists$. Lo mismo ocurre para $\neg$, $\wedge$ y $\forall$ así como para cualquiera de los dos cuantificadores y las siguientes combinaciones de conectores:*

1. $\neg$ *y* $\vee$.
2. $\neg$ *y* $\to$.

Prueba. Se trata simplemente de aplicar las equivalencias

1. $\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$
2. $\exists x\varphi \equiv \neg\forall x\neg\varphi$
3. $(\varphi \vee \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \equiv (\neg\varphi \to \psi)$
4. $(\varphi \to \psi) \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$
5. $(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \equiv \neg(\varphi \to \neg\psi)$

hasta obtener la fórmula deseada.

Una fórmula está en *forma prenexa* si no tiene cuantificadores o es de la forma

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\varphi$$

donde φ no tiene cuantificadores y cada Q_i es o bien $\forall$ o bien $\exists$. Se dice que $Q_1x_1\ldots Q_nx_n$ es el *prefijo* y que ψ es la *matriz* de la fórmula prenexa.

Teorema 3.19 *Para cada fórmula $\varphi = \varphi(z_1, \ldots, z_k)$ hay otra fórmula $\psi = \psi(z_1, \ldots, z_k)$ que está en forma prenexa y es lógicamente equivalente a φ.*

Prueba. Se establece por inducción. Si φ es atómica, φ está ya en forma prenexa. Consideremos a continuación el caso de una fórmula negada $\neg\varphi$. Por hipótesis inductiva φ es lógicamente equivalente a una fórmula $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\psi$ donde en ψ no hay cuantificadores y cada Q_i es $\forall$ o $\exists$. Entonces $\neg\varphi$ es lógicamente equivalente a $Q'_1x_1 \ldots Q'_nx_n\neg\psi$, donde $Q'_i = \forall$ si $Q_i = \exists$ y viceversa. También podría ser que el prefijo no existiera, pero en ese caso $\neg\psi$ está en forma prenexa y es equivalente a $\neg\varphi$. El siguiente caso a considerar en la inducción es el de una conjunción $(\varphi \wedge \psi)$. Por hipótesis inductiva tenemos fórmulas en forma prenexa $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\varphi'$ y $Q'_1y_1 \ldots Q'_my_m\psi'$ lógicamente equivalentes a φ y ψ y con matrices φ' y ψ'. La dificultad está en que las variables $x_1, \ldots, x_n$ pueden aparecer libres en ψ' y las variables $y_1, \ldots, y_m$ pueden aparecer libres en φ'. Observemos que podemos suponer que las variables $x_1, \ldots, x_n$ son todas distintas entre sí y también lo son las variables $y_1, \ldots, y_m$. La razón es que podemos eliminar las posibles repeticiones suprimiendo las que aparecen más hacia la izquierda y suprimiendo el correspondiente cuantificador en el prefijo. La fórmula obtenida tras estas eliminaciones sigue siendo equivalente a la original. Ahora sean $u_1, \ldots, u_n$ una secuencia de variables distintas que no aparecen ni en φ' ni en ψ' y que son todas distintas de las de la secuencia $x_1, \ldots, x_n$. La fórmula $\varphi'' = \varphi'(\begin{smallmatrix} x_1 \ldots x_n \\ u_1 \ldots u_n \end{smallmatrix})$ no tiene cuantificadores y $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\varphi'$ es lógicamente equivalente a $Q_1u_1 \ldots Q_nu_n\varphi''$. Como además las variables $u_1, \ldots, u_n$ no aparecen libres en $Q'_1y_1 \ldots Q'_my_m\psi'$, resulta que

$$(Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\varphi' \wedge Q'_1y_1 \ldots Q'_my_m\psi') \equiv Q_1u_1 \ldots Q_nu_n(\varphi'' \wedge Q'_1y_1 \ldots Q'_my_m\psi').$$

A continuación escogemos variables distintas $v_1, \ldots, v_m$ que no aparezcan ni en φ'' ni en ψ' y que además sean distintas de las de la secuencia $y_1, \ldots, y_m$ y ponemos $\psi'' = \psi'(\begin{smallmatrix} y_1 \ldots y_m \\ v_1 \ldots v_m \end{smallmatrix})$. De nuevo, ψ'' es una fórmula sin cuantificadores y como estas variables no aparecen libres en φ'' tenemos que

$$(\varphi'' \wedge Q'_1y_1 \ldots Q'_my_m\psi') \equiv Q'_1v_1 \ldots Q'_mv_m(\varphi'' \wedge \psi').$$

Por tanto la fórmula

$$Q_1u_1 \ldots Q_nu_nQ'_1v_1 \ldots Q'_mv_m(\varphi'' \wedge \psi'')$$

es lógicamente equivalente a $(\varphi \wedge \psi)$ y está en forma prenexa. Claro está, si alguno de los prefijos no existe, el argumento es similar pero con las correspondientes simplificaciones. El caso inductivo $(\varphi \vee \psi)$ se resuelve de modo similar. El caso $(\varphi \to \psi)$ es parecido pero hay que tener en cuenta que los cuantificadores correspondientes a φ salen hacia el exterior modificados, pues $\forall$ debe convertirse en $\exists$ y $\exists$ debe convertirse en $\forall$. En lo que respecta a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, es conveniente transformar esta fórmula primero en $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$ y aplicar entonces los criterios ya explicados para $\to$ y $\wedge$. Consideremos finalmente el caso $Qx\varphi$ donde $Q = \forall$ o $Q = \exists$. Por hipótesis inductiva φ es lógicamente equivalente a una fórmula φ' que está en forma prenexa. Entonces $Qx\varphi'$ también está en forma prenexa y es lógicamente equivalente a $Qx\varphi$.

Se dice que una fórmula φ es *válida* si es verdadera en cualquier estructura y bajo cualquier interpretación de las variables. Claro está, una sentencia es válida si es verdadera en todas las estructuras. La relación de consecuencia $\Sigma \models \varphi$ está definida también en el caso particular de que Σ sea el conjunto vacío de fórmulas. Obsérvese que $\emptyset$ es verdadero en cualquier estructura y bajo cualquier interpretación de las variables, es decir, todas las fórmulas de $\emptyset$ son válidas. En vez de $\emptyset \models \varphi$ se usa la notación $\models \varphi$. La siguiente proposición relaciona esta noción con la validez.

Proposición 3.20 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *φ es válida*
2. *Para cada Σ, $\Sigma \models \varphi$*
3. *$\models \varphi$*

Prueba. Lo único que hay que observar es que para cada $\mathcal{M}$ y π, $\mathcal{M} \models \emptyset[\pi]$.

A partir de la noción de fórmula válida podemos caracterizar otras nociones lógicas como equivalencia y como consecuencia a partir de un conjunto finito de fórmulas.

Proposición 3.21
1. *φ es válida si y sólo si $\neg\varphi$ es insatisfacible.*
2. *$\varphi \models \psi$ si y sólo si $(\varphi \to \psi)$ es válida.*
3. *$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ si y sólo si $((\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi)$ es válida.*
4. *$\varphi \equiv \psi$ si y sólo si $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ es válida.*

Proposición 3.22
1. *φ es satisfacible si y sólo si $\exists x\varphi$ es satisfacible.*
2. *φ es válida si y sólo si $\forall x\varphi$ es válida.*

Prueba. El punto *1* se sigue del Lema 3.11 aplicado al caso $\Sigma = \emptyset$. El punto *2* se sigue de *1* ya que, por un lado, φ es válida si y sólo si $\neg\varphi$ es insatisfacible y, por otro lado, $\forall x\varphi$ es válida si y sólo si $\exists x\neg\varphi$ es insatisfacible.

Capítulo 4

Cálculo deductivo

Fijamos durante todo este capítulo un lenguaje L. Las fórmulas y términos considerados serán siempre de L.

Vamos a presentar en primer lugar, y sin desarrollar el tema en sus detalles, la noción de *cálculo axiomático*. El cálculo tiene unos *axiomas*, unas *reglas de inferencia* y una noción de *deducción* a partir de la cual se define la relación de *deducibilidad*. El cálculo que hemos elegido está pensado para una formulación de la lógica de primer orden en la que los únicos conectores son $\neg$ y $\rightarrow$ y el único cuantificador es $\forall$. Como toda fórmula es equivalente a otra expresada en este lenguaje y además esta fórmula equivalente puede obtenerse aplicando un algoritmo muy sencillo, este cálculo también puede usarse para fórmulas en el lenguaje ampliado tras efectuar el proceso de traducción. Hay otros cálculos axiomáticos que ya se formulan directamente para el sistema completo de conectores y cuantificadores, pero no tienen la sencillez del que presentamos a continuación.

Los axiomas del cálculo son las fórmulas que tienen alguna de las formas que se relacionan a continuación así como las que se obtienen a partir de estas colocando al principio un prefijo formado por cuantificadores universales.

1. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$
2. $((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)))$
3. $((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi))$
4. $(\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi))$
5. $(\forall x\varphi \rightarrow \varphi(\frac{x}{t}))$ siempre que x sea libremente sustituible por t en φ.
6. $(\varphi \rightarrow \forall x\varphi)$ siempre que x no esté libre en φ.
7. $x \doteq x$
8. $(x \doteq y \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi'))$ siempre que φ sea una fórmula atómica y φ' se obtenga a partir de φ al sustituir una o más apariciones libres de x por y.

El cálculo tiene una sola regla de inferencia, la regla de Modus Ponens, según la cual ψ se infiere siempre de $(\varphi \rightarrow \psi)$ y φ. Sea Σ un conjunto de fórmulas. Una deducción (en éste cálculo) a partir de Σ es una secuencia finita de fórmulas

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

tal que para cada i entre 1 y n se da uno de los siguientes casos:

1. $\varphi_i \in \Sigma$
2. φ_i es un axioma.
3. Hay j, l previos tales que φ_i se infiere de φ_j y φ_l mediante la regla de inferencia de Modus Ponens.

Se dice que la fórmula φ es deducible a partir del conjunto de premisas Σ si existe una deducción a partir de Σ cuya última fórmula es precisamente φ. Se escribe entonces $\Sigma \vdash \varphi$. En el caso particular de que Σ sea el conjunto vacío de fórmulas, se dice que φ es deducible sin premisas y se escribe $\vdash \varphi$.

La relación de deducibilidad $\vdash$ corresponde exactamente a la relación de consecuencia, es decir para cada Σ y φ,

$$\Sigma \models \varphi \text{ si y sólo si } \Sigma \vdash \varphi.$$

Aquí no podemos entrar en la demostración de este resultado, que se conoce con el nombre de *Teorema de completud*. De hecho a menudo el resultado de que si $\Sigma \vdash \varphi$ entonces $\Sigma \models \varphi$ se conoce con el nombre de *Teorema de corrección del cálculo* mientras que se reserva el nombre de *Teorema de completud* para la otra dirección. Un *cálculo correcto* es un cálculo para el que se cumple el Teorema de corrección. El cálculo en cuestión es también *completo* si además cumple el Teorema de completud. Obtener cálculos correctos es fácil y verificar la corrección de un cálculo suele ser cuestión sencilla. La completud es una cuestión más complicada. Los primeros cálculos para la lógica de primer orden fueron formulados primero por Frege y luego, más en la forma de cálculo axiomático, por Hilbert. El Teorema de completud para un cálculo lo demostró por primera vez Gödel.

Gentzen introdujo otro tipo de cálculos con la pretensión de que fueran más próximos a los procesos de razonamiento que habitualmente realizamos. Un cálculo de esas características se denomina *cálculo de deducción natural*. Presentamos ahora con cierto detalle una versión de estas ideas de Gentzen. Lo hacemos para el sistema completo de conectores y cuantificadores.

Un *secuente* es un par ordenado $\langle \Sigma, \varphi \rangle$ formado por un conjunto finito Σ de fórmulas y una fórmula φ. En la práctica usaremos la notación Σ, φ para referirnos a secuentes e incluso si $\Sigma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ escribiremos simplemente

$$\psi_1, \ldots, \psi_n, \;\; \varphi.$$

La notación $\Sigma, \varphi, \; \psi$ será una abreviación de $\Sigma \cup \{\varphi\}, \psi$.

Una *deducción* es una secuencia finita de secuentes construida de acuerdo con las *reglas de inferencia*. Los secuentes que integran una deducción también se denominan sus *líneas*. Distinguimos tres tipos de reglas de inferencia. Las del primer tipo son de la forma

$$\overline{\Sigma, \; \varphi}$$

e indican que el secuente Σ, φ puede escribirse para prolongar cualquier deducción e incluso para comenzar una deducción. Las del segundo tipo son de la forma

$$\frac{\Sigma_1, \; \varphi_1}{\Sigma_2, \; \varphi_2}$$

e indican que el secuente Σ_2, φ_2 puede escribirse para prolongar cualquier deducción que contenga en alguna de sus líneas el secuente Σ_1, φ_1. Las del tercer y último tipo son de la forma

$$\begin{array}{l} \Sigma_1,\ \varphi_1 \\ \underline{\Sigma_2,\ \varphi_2} \\ \Sigma_3,\ \varphi_3 \end{array}$$

e indican que el secuente Σ_3, φ_3 puede escribirse para prolongar cualquier deducción que contenga entre sus líneas los secuentes Σ_1, φ_1 y Σ_2, φ_2. Eventualmente podemos considerar también reglas de inferencia que se aplican a tres o más secuentes.

Describimos a continuación las distintas reglas de inferencia del cálculo.

Regla de premisas (P)

$$\frac{}{\Sigma,\ \varphi} \quad (\text{si}\ \ \varphi \in \Sigma)$$

Regla de ampliación (A)

$$\frac{\Sigma,\ \varphi}{\Gamma,\ \varphi} \quad (\text{si}\ \ \Sigma \subseteq \Gamma)$$

Regla de eliminación de la negación (E$\neg$)

$$\begin{array}{l} \Sigma,\ \varphi \\ \underline{\Sigma,\ \neg\varphi} \\ \Sigma,\ \psi \end{array}$$

Regla de introducción de la negación (I$\neg$)

$$\begin{array}{l} \Sigma,\ \varphi,\ \ \psi \\ \underline{\Sigma,\ \varphi,\ \ \neg\psi} \\ \Sigma,\ \neg\varphi \end{array}$$

Regla del tercio excluso (TND)

$$\frac{}{\Sigma,\ (\varphi \vee \neg\varphi)}$$

Regla de eliminación de la conjunción por la izquierda (E$\wedge$I)

$$\frac{\Sigma,\ (\varphi \wedge \psi)}{\Sigma,\ \ \varphi}$$

Regla de eliminación de la conjunción por la derecha (E$\wedge$D)

$$\frac{\Sigma,\ (\varphi \wedge \psi)}{\Sigma,\ \ \psi}$$

Regla de introducción de la conjunción (I$\wedge$)

$$\begin{array}{l} \Sigma,\ \varphi \\ \underline{\Sigma,\ \psi} \\ \Sigma,\ (\varphi \wedge \psi) \end{array}$$

Regla de introducción de la disyunción por la izquierda (I$\vee$I)

$$\frac{\Sigma,\ \varphi}{\Sigma,\ (\varphi \vee \psi)}$$

Regla de introducción de la disyunción por la derecha (I$\vee$D)

$$\frac{\Sigma,\ \psi}{\Sigma,\ (\varphi \vee \psi)}$$

Regla de eliminación de la disyunción (E$\vee$)

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma, \varphi,\ \chi \\ \Sigma, \psi,\ \chi \\ \Sigma,\ (\varphi \vee \psi)\end{array}}{\Sigma,\ \ \chi}$$

Regla de introducción del condicional (I$\rightarrow$)

$$\frac{\Sigma, \varphi,\ \ \psi}{\Sigma,\ (\varphi \rightarrow \psi)}$$

Regla de eliminación del condicional o de Modus Ponens (MP)

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma,\ \varphi \\ \Sigma,\ (\varphi \rightarrow \psi)\end{array}}{\Sigma,\ \ \psi}$$

Regla de eliminación del bicondicional por la derecha (E$\leftrightarrow$D)

$$\frac{\Sigma,\ (\varphi \leftrightarrow \psi)}{\Sigma,\ (\varphi \rightarrow \psi)}$$

Regla de eliminación del bicondicional por la izquierda (E$\leftrightarrow$I)

$$\frac{\Sigma,\ (\varphi \leftrightarrow \psi)}{\Sigma,\ (\psi \rightarrow \varphi)}$$

Regla de introducción del bicondicional (I$\leftrightarrow$)

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma,\ (\varphi \rightarrow \psi) \\ \Sigma,\ (\psi \rightarrow \varphi)\end{array}}{\Sigma,\ (\varphi \leftrightarrow \psi)}$$

Regla de introducción del cuantificador universal (I$\forall$)

$$\frac{\Sigma,\ \varphi}{\Sigma,\ \forall\varphi} \quad \text{(si } x \text{ no está libre en ninguna fórmula de } \Sigma\text{)}$$

Regla de eliminación del cuantificador universal (E$\forall$)

$$\frac{\Sigma,\ \forall x\varphi}{\Sigma,\ \varphi\binom{x}{t}} \quad \text{(si } x \text{ es libremente sustituible por } t \text{ en } \varphi\text{)}$$

Regla de introducción del cuantificador existencial (I∃)

$$\frac{\Sigma,\ \varphi\binom{x}{t}}{\Sigma,\ \exists x\varphi} \quad \text{(si } x \text{ es libremente sustituible por } t \text{ en } \varphi)$$

Regla de eliminación del cuantificador existencial (E∃)

$$\begin{array}{l} \Sigma, \varphi,\ \ \psi \\ \underline{\Sigma,\ \ \exists x\varphi} \\ \Sigma,\ \ \psi \end{array} \quad \text{(si } x \text{ no está libre ni en } \psi \text{ ni en ninguna fórmula de } \Sigma)$$

Regla de identidad (I)

$$\frac{}{\Sigma,\ t \doteq t}$$

Regla de sustitución (S)

$$\begin{array}{l} \Sigma, \varphi\binom{x}{t_1} \\ \underline{\Sigma,\ t_1 \doteq t_2} \\ \Sigma,\ \varphi\binom{x}{t_2} \end{array} \quad \text{(si } x \text{ es libremente sustituible por } t_1 \text{ y por } t_2 \text{ en } \varphi)$$

Las reglas enunciadas hasta el momento se llaman *reglas primitivas de inferencia* y son las que definen el cálculo. Hay otras reglas, llamadas *reglas derivadas de inferencia* que no son estrictamente necesarias en el cálculo pero que contribuyen a hacer más cortas las deducciones. Cada aplicación de una regla derivada de inferencia pueden siempre ser sustituida por una serie de aplicaciones de las reglas primitivas. En cada caso eso debe ser justificado. Para justificar que, por ejemplo, una regla de inferencia de la forma

$$\begin{array}{c} \Sigma, \varphi \\ \underline{\Gamma, \psi} \\ \Delta, \chi \end{array}$$

es una regla derivada es suficiente con mostrar que una deducción en la que aparezcan las líneas $\Sigma,\ \varphi$ y $\Gamma,\ \psi$ puede prolongarse hasta convertirse en una deducción cuya última línea es $\Delta,\ \chi$. En el caso particular de una regla de inferencia de la forma

$$\begin{array}{c} \Sigma, \varphi \\ \underline{\Sigma, \psi} \\ \Sigma, \chi \end{array}$$

es suficiente con mostrar que hay una deducción cuya última línea es $\{\varphi, \psi\},\ \chi$. La razón es la siguiente. Podemos escribir la deducción que acaba en $\{\varphi, \psi\},\ \chi$ a continuación de la deducción en que aparecen $\Sigma,\ \varphi$ y $\Sigma,\ \psi$ y todavía podemos añadir a continuación unas pocas líneas hasta obtener $\Sigma,\ \chi$. Para explicar cuáles son las líneas añadidas evitando complicar la notación ponemos las tres líneas mencionadas al principio. Entonces lo que se añade es

1	Σ	φ	
2	Σ	ψ	
3	$\varphi,\ \psi$	χ	
4	$\Sigma,\ \varphi,\ \psi$	χ	$(A)3$
5	$\Sigma,\ \varphi$	$(\psi \rightarrow \chi)$	$(I \rightarrow)4$
6	Σ	$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$	$(I \rightarrow)5$
7	Σ	$(\psi \rightarrow \chi)$	$(MP)1, 6$
8	Σ	χ	$(MP)2, 7$

De modo similar, para justificar una regla de inferencia de la forma

$$\frac{\Sigma, \varphi}{\Sigma, \psi}$$

basta mostrar que hay una deducción que acaba con la línea $\varphi,\ \psi$. Las reglas de inferencia derivadas ya justificadas pueden usarse para justificar otras. Damos a continuación una lista de reglas derivadas de inferencia de este cálculo y sus correspondientes justificaciones.

Regla de introducción de la doble negación (I¬¬)

$$\frac{\Sigma,\ \varphi}{\Sigma,\ \neg\neg\varphi}$$

Justificación:

1	$\varphi, \neg\varphi$	φ	(P)
2	$\varphi, \neg\varphi$	$\neg\varphi$	(P)
3	φ	$\neg\neg\varphi$	$(I\neg)1,2$

Regla de eliminación de la doble negación (E¬¬)

$$\frac{\Sigma,\ \neg\neg\varphi}{\Sigma,\ \varphi}$$

Justificación:

1	$\neg\neg\varphi$	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	(TND)
2	$\neg\neg\varphi, \varphi$	φ	(P)
3	$\neg\neg\varphi, \neg\varphi$	$\neg\varphi$	(P)
4	$\neg\neg\varphi, \neg\varphi$	$\neg\neg\varphi$	(P)
5	$\neg\neg\varphi, \neg\varphi$	φ	$(E\neg)3,4$
6	$\neg\neg\varphi$	φ	$(E\vee)1,2,5$

Regla de prueba indirecta (PI)

$$\frac{\Sigma, \neg\varphi,\ \varphi}{\Sigma,\ \ \varphi}$$

Justificación:

1	$\Sigma,\ \neg\varphi$	φ	
2	$\Sigma,\ \varphi$	φ	(P)
3	Σ	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	(TND)
4	Σ	φ	$(E\vee)1,2,3$

Regla de Modus Tollens (MT)

$$\begin{array}{l}\Sigma,\ \neg\psi \\ \underline{\Sigma,\ (\varphi \to \psi)} \\ \Sigma,\ \ \neg\varphi\end{array}$$

Justificación:

1	$(\varphi \to \psi),\ \neg\psi,\ \varphi$	$(\varphi \to \psi)$	(P)
2	$(\varphi \to \psi),\ \neg\psi,\ \varphi$	φ	(P)
3	$(\varphi \to \psi),\ \neg\psi,\ \varphi$	ψ	$(MP)1,2$
4	$(\varphi \to \psi),\ \neg\psi,\ \varphi$	$\neg\psi$	(P)
5	$(\varphi \to \psi),\ \neg\psi$	$\neg\varphi$	$(I\neg)3,4$

Regla de negación del condicional 1 (N→1)

$$\frac{\Sigma, \neg(\varphi \to \psi)}{\Sigma,\ (\varphi \wedge \neg\psi)}$$

Justificación:

1	$\neg(\varphi \to \psi),\ \neg\varphi,\ \varphi$	φ	(P)
2	$\neg(\varphi \to \psi),\ \neg\varphi,\ \varphi$	$\neg\varphi$	(P)
3	$\neg(\varphi \to \psi),\ \neg\varphi,\ \varphi$	ψ	$(E\neg),1,2$
4	$\neg(\varphi \to \psi),\ \neg\varphi$	$(\varphi \to \psi)$	$(I \to)3$
5	$\neg(\varphi \to \psi),\ \neg\varphi$	$\neg(\varphi \to \psi)$	(P)
6	$\neg(\varphi \to \psi),\ \neg\varphi$	φ	$(E\neg)4,5$
7	$\neg(\varphi \to \psi)$	φ	$(PI)6$
8	$\neg(\varphi \to \psi),\ \psi,\ \varphi$	ψ	(P)
9	$\neg(\varphi \to \psi),\ \psi$	$(\varphi \to \psi)$	$(I \to)8$
10	$\neg(\varphi \to \psi),\ \psi$	$\neg(\varphi \to \psi)$	(P)
11	$\neg(\varphi \to \psi)$	$\neg\psi$	$(I\neg)9,10$
12	$\neg(\varphi \to \psi)$	$(\varphi \wedge \neg\psi)$	$(I\wedge)7,11$

Regla de negación del condicional 2 (N→2)

$$\frac{\Sigma, (\varphi \wedge \neg\psi)}{\Sigma,\ \neg(\varphi \to \psi)}$$

Justificación:

1	$(\varphi \wedge \neg\psi),\ (\varphi \to \psi)$	$(\varphi \to \psi)$	(P)
2	$(\varphi \wedge \neg\psi),\ (\varphi \to \psi)$	$(\varphi \wedge \neg\psi)$	(P)
3	$(\varphi \wedge \neg\psi),\ (\varphi \to \psi)$	φ	$(E \wedge I)2$
4	$(\varphi \wedge \neg\psi),\ (\varphi \to \psi)$	ψ	$(MP)1,3$
5	$(\varphi \wedge \neg\psi),\ (\varphi \to \psi)$	$\neg\psi$	$(E \wedge D)2$
6	$(\varphi \wedge \neg\psi)$	$\neg(\varphi \to \psi)$	$(I\neg)4,5$

Regla del silogismo disyuntivo 1 (SD1)

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma,\ \neg\varphi \\ \Sigma,\ (\varphi \vee \psi)\end{array}}{\Sigma,\ \ \psi}$$

Justificación:

1	$(\varphi \vee \psi),\ \neg\varphi,\ \varphi$	φ	(P)
2	$(\varphi \vee \psi),\ \neg\varphi,\ \varphi$	$\neg\varphi$	(P)
3	$(\varphi \vee \psi),\ \neg\varphi,\ \varphi$	ψ	$(E\neg)1,2$
4	$(\varphi \vee \psi),\ \neg\varphi,\ \psi$	ψ	(P)
5	$(\varphi \vee \psi),\ \neg\varphi$	$(\varphi \vee \psi)$	(P)
6	$(\varphi \vee \psi),\ \neg\varphi$	ψ	$(E\vee)3,4,5$

La siguiente regla se justifica de modo similar.

Regla del silogismo disyuntivo 2 (SD2)

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma,\ \neg\psi \\ \Sigma,\ (\varphi \vee \psi)\end{array}}{\Sigma,\ \varphi}$$

Regla de De Morgan 1 (DM 1)

$$\frac{\Sigma, \neg(\varphi \wedge \psi)}{\Sigma,\ (\neg\varphi \vee \neg\psi)}$$

Justificación:

1	$\neg(\varphi \wedge \psi),\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi),\ \neg\varphi$	$\neg\varphi$	(P)
2	$\neg(\varphi \wedge \psi),\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi),\ \neg\varphi$	$(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$(I \vee I)1$
3	$\neg(\varphi \wedge \psi),\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi),\ \neg\varphi$	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	(P)
4	$\neg(\varphi \wedge \psi),\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi),\ \neg\varphi$	φ	$(E\neg)2,3$
5	$\neg(\varphi \wedge \psi),\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	φ	$(PI)4$
6	$\neg(\varphi \wedge \psi),\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi),\ \neg\psi$	$\neg\psi$	(P)
7	$\neg(\varphi \wedge \psi),\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi),\ \neg\psi$	$(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$(I \vee D)6$
8	$\neg(\varphi \wedge \psi),\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi),\ \neg\psi$	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	(P)
9	$\neg(\varphi \wedge \psi),\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi),\ \neg\psi$	ψ	$(E\neg)7,8$
10	$\neg(\varphi \wedge \psi),\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	ψ	$(PI)9$
11	$\neg(\varphi \wedge \psi),\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$(\varphi \wedge \psi)$	$(I\wedge)5,10$
12	$\neg(\varphi \wedge \psi),\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	(P)
13	$\neg(\varphi \wedge \psi),\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$(E\neg)11,12$
14	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$(PI)13$

Regla de De Morgan 2 (DM 2)

$$\frac{\Sigma, (\neg\varphi \vee \neg\psi)}{\Sigma,\ \neg(\varphi \wedge \psi)}$$

Justificación:

1	$(\neg\varphi \vee \neg\psi),\ (\varphi \wedge \psi)$	$(\varphi \wedge \psi)$	(P)
2	$(\neg\varphi \vee \neg\psi),\ (\varphi \wedge \psi)$	φ	$(E \wedge I)1$
3	$(\neg\varphi \vee \neg\psi),\ (\varphi \wedge \psi)$	$\neg\neg\varphi$	$(I\neg\neg)$
4	$(\neg\varphi \vee \neg\psi),\ (\varphi \wedge \psi)$	$(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	(P)
5	$(\neg\varphi \vee \neg\psi),\ (\varphi \wedge \psi)$	$\neg\psi$	$(SD1)4$
6	$(\neg\varphi \vee \neg\psi),\ (\varphi \wedge \psi)$	ψ	$(E \wedge D)1$
7	$(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$(\varphi \wedge \psi)$	$(I\neg)5,6$

Regla de De Morgan 3 (DM 3)

$$\frac{\Sigma, \neg(\varphi \vee \psi)}{\Sigma,\ (\neg\varphi \wedge \neg\psi)}$$

Justificación:

1	$\neg(\varphi \vee \psi),\ \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi),\ \varphi$	φ	(P)
2	$\neg(\varphi \vee \psi),\ \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi),\ \varphi$	$(\varphi \vee \psi)$	$(I \wedge I)1$
3	$\neg(\varphi \vee \psi),\ \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi),\ \varphi$	$\neg(\varphi \vee \psi)$	(P)
4	$\neg(\varphi \vee \psi),\ \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	$\neg\varphi$	$(I\neg)2,3$
5	$\neg(\varphi \vee \psi),\ \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi),\ \psi$	ψ	(P)
6	$\neg(\varphi \vee \psi),\ \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi),\ \psi$	$(\varphi \vee \psi)$	$(I \wedge D)5$
7	$\neg(\varphi \vee \psi),\ \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi),\ \psi$	$\neg(\varphi \vee \psi)$	(P)
8	$\neg(\varphi \vee \psi),\ \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	$\neg\psi$	$(I\neg)6,7$
9	$\neg(\varphi \vee \psi),\ \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	$(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	$(I\wedge)4,8$
10	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	$(PI)9$

Regla de De Morgan 4 (DM 4)

$$\frac{\Sigma, (\neg\varphi \wedge \neg\psi)}{\Sigma,\ \neg(\varphi \vee \psi)}$$

Justificación:

1	$(\neg\varphi \wedge \neg\psi),\ (\varphi \vee \psi)$	$(\varphi \vee \psi)$	(P)
2	$(\neg\varphi \wedge \neg\psi),\ (\varphi \vee \psi)$	$(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	(P)
3	$(\neg\varphi \wedge \neg\psi),\ (\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$(E \wedge I)2$
4	$(\neg\varphi \wedge \neg\psi),\ (\varphi \vee \psi)$	ψ	$(SD1)1,3$
5	$(\neg\varphi \wedge \neg\psi),\ (\varphi \vee \psi)$	$\neg\psi$	$(E \wedge D)1$
6	$(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$(I\neg D)4,5$

Regla de negación del cuantificador existencial 1 (N∃ 1)

$$\frac{\Sigma,\ \neg\exists x\varphi}{\Sigma,\ \forall x\neg\varphi}$$

Justificación:

1	$\neg\exists x\varphi,\ \varphi$	φ	(P)
2	$\neg\exists x\varphi,\ \varphi$	$\exists x\varphi$	$(I\exists)1$
3	$\neg\exists x\varphi,\ \varphi$	$\neg\exists x\varphi$	(P)
4	$\neg\exists x\varphi$	$\neg\varphi$	$(I\neg)2,3$
5	$\neg\exists x\varphi$	$\forall x\neg\varphi$	$(I\forall)4$

Regla de negación del cuantificador existencial 2 (N∃ 2)

$$\frac{\Sigma,\ \forall x\neg\varphi}{\Sigma,\ \neg\exists x\varphi}$$

Justificación:

1	$\forall x\neg\varphi,\ \exists x\varphi,\ \varphi$	φ	(P)
2	$\forall x\neg\varphi,\ \exists x\varphi,\ \varphi$	$\forall x\neg\varphi$	(P)
3	$\forall x\neg\varphi,\ \exists x\varphi,\ \varphi$	$\neg\varphi$	$(E\forall)2$
4	$\forall x\neg\varphi,\ \exists x\varphi,\ \varphi$	$\neg\exists x\varphi$	$(E\neg)1,3$
5	$\forall x\neg\varphi,\ \exists x\varphi$	$\exists x\varphi$	(P)
6	$\forall x\neg\varphi,\ \exists x\varphi$	$\neg\exists x\varphi$	$(E\exists)5,4$
7	$\forall x\neg\varphi$	$\neg\exists x\varphi$	$(I\neg)6,5$

Regla de negación del cuantificador universal 1 (N∀ 1)

$$\frac{\Sigma,\ \neg\forall x\varphi}{\Sigma,\ \exists x\neg\varphi}$$

Justificación:

1	$\neg\forall x\varphi,\ \neg\exists x\neg\varphi$	$\neg\exists x\neg\varphi$	(P)
2	$\neg\forall x\varphi,\ \neg\exists x\neg\varphi$	$\forall x\neg\neg\varphi$	$(N\exists 1)1$
3	$\neg\forall x\varphi,\ \neg\exists x\neg\varphi$	$\neg\neg\varphi$	$(E\forall)2$
4	$\neg\forall x\varphi,\ \neg\exists x\neg\varphi$	φ	$(E\neg\neg)3$
5	$\neg\forall x\varphi,\ \neg\exists x\neg\varphi$	$\forall x\varphi$	$(I\forall)4$
6	$\neg\forall x\varphi,\ \neg\exists x\neg\varphi$	$\neg\forall x\varphi$	(P)
7	$\neg\forall x\varphi,\ \neg\exists x\neg\varphi$	$\exists x\neg\varphi$	$(E\neg)5,6$
8	$\neg\forall x\varphi$	$\exists x\neg\varphi$	$(PI)7$

Regla de negación del cuantificador universal 2 (N∀ 2)

$$\frac{\Sigma,\ \exists x\neg\varphi}{\Sigma,\ \neg\forall x\varphi}$$

Justificación:

1	$\neg\varphi,\ \forall x\varphi$	$\forall x\varphi$	(P)
2	$\neg\varphi,\ \forall x\varphi$	φ	$(E\forall)1$
3	$\neg\varphi,\ \forall x\varphi$	$\neg\varphi$	(P)
4	$\neg\varphi$	$\neg\forall x\varphi$	$(I\neg)2,3$
5	$\exists x\neg\varphi$	$\exists x\neg\varphi$	(P)
6	$\exists x\neg\varphi$	$\neg\forall x\varphi$	$(E\exists)5,6$

Regla de cambio de variable 1 (CV 1)

$$\frac{\Sigma,\ \forall x\varphi}{\Sigma,\ \forall y\varphi(\tfrac{x}{y})} \quad \text{(si } y \text{ no aparece en } \varphi)$$

Justificación:

1	$\forall x\varphi$	$\forall x\varphi$	(P)
2	$\forall x\varphi$	$\varphi(\tfrac{x}{y})$	$(E\forall)1$
3	$\forall\varphi$	$\forall y\varphi(\tfrac{x}{y})$	$(I\forall)2$

De hecho la regla CV1 también es correcta cuando simplemente se exige que y no esté libre en φ y que x sea libremente sustituible por y en φ y la misma justificación dada se aplica a esta forma ligeramente más general. Observemos que si y no aparece en φ, entonces x no está libre en $\varphi\binom{x}{y}$ (excepto en el caso $x = y$, caso que podemos ignorar) y además y es libremente sustituible por x en $\varphi\binom{x}{y}$ y $\varphi\binom{x}{y}\binom{x}{y} = \varphi$. Por tanto la regla CV1 en su forma más general nos permitiría ver como caso particular la forma

$$\frac{\Sigma,\ \forall y\varphi\binom{x}{y}}{\Sigma,\ \forall x\varphi} \qquad \text{(si } y \text{ no aparece en } \varphi\text{)}$$

Llamaremos también CV1 a esta variante de la regla de inferencia.

Regla de cambio de variable 2 (CV 2)

$$\frac{\Sigma,\ \exists x\varphi}{\Sigma,\ \exists y\varphi\binom{x}{y}} \qquad \text{(si } y \text{ no aparece en } \varphi\text{)}$$

Justificación:

1	$\exists x\varphi$	$\exists x\varphi$	(P)
2	$\exists x\varphi,\ \varphi\binom{x}{y}$	$\exists y\varphi\binom{x}{y}$	$(I\exists)1$
3	$\exists x\varphi$	$\exists y\varphi\binom{x}{y}$	$(E\exists)1,2$

Por los mismos comentarios expuestos tras enunciar CV 1, podemos también usar CV 2 en la forma

$$\frac{\Sigma,\ \exists y\varphi\binom{x}{y}}{\Sigma,\ \exists x\varphi} \qquad \text{(si } y \text{ no aparece en } \varphi\text{)}$$

Regla de eliminación del cuantificador existencial 2 (E$\exists$ 2)

$$\begin{array}{l} \Sigma\varphi\binom{x}{y},\ \psi \\ \underline{\Sigma,\ \ \exists x\varphi} \\ \Sigma,\ \ \psi \end{array} \qquad \text{(si } y \text{ no aparece ni en } \psi \text{ ni en } \varphi \text{ ni en ninguna fórmula de } \Sigma\text{)}$$

Justificación:

1	$\Sigma,\ \varphi\binom{x}{y}$	ψ	
2	Σ	$\exists x\varphi$	
3	Σ	$\exists y\varphi\binom{x}{y}$	$(CV2)2$
4	$\Sigma,$	ψ	$(E\exists)1,3$

Regla de eliminación del cuantificador existencial 3 (E$\exists$ 3)

$$\begin{array}{l} \Sigma\varphi\binom{x}{c},\ \psi \\ \underline{\Sigma,\ \ \exists x\varphi} \\ \Sigma,\ \ \psi \end{array} \qquad \text{(si } c \text{ no aparece ni en } \psi \text{ ni en } \varphi \text{ ni en ninguna fórmula de } \Sigma\text{)}$$

Justificación:

Considérese una deducción D en la que aparece las líneas $\Sigma,\ \exists x\varphi$ y $\Sigma,\ \varphi(\frac{x}{c}),\ \psi$. Tómese una variable y que no aparece en ninguna fórmula de la deducción D y sea D' el resultado de sustituir cada aparición de c en D por y. Se puede mostrar que D' es también una deducción y que el resultado de escribir las líneas de D' a continuación de las de D es también una deducción. Ahora entre esas líneas tenemos $\Sigma,\ \varphi(\frac{x}{y}),\ \psi$ y podemos usar la regla E$\exists$ 2 para obtener finalmente la línea $\Sigma,\ \psi$.

Regla de simetría (Sim)

$$\frac{\Sigma,\ t_1 \doteq t_2}{\Sigma,\ t_2 \doteq t_1}$$

Justificación:

Escojamos una variable x que no aparece en t_1 y observemos que $(x \doteq t_1)(\frac{x}{t_1}) = t_1 \doteq t_1$ y que $(x \doteq t_1)(\frac{x}{t_2}) = t_2 \doteq t_1$. Por tanto la siguiente secuencia de líneas justifica la regla derivada:

$$\begin{array}{llll}
1 & t_1 \doteq t_2 & t_1 \doteq t_1 & (I) \\
2 & t_1 \doteq t_2 & t_1 \doteq t_2 & (P) \\
3 & t_1 \doteq t_2 & t_2 \doteq t_1 & (S)1,2
\end{array}$$

Regla de transitividad (Trans)

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma,\ t_1 \doteq t_2 \\ \Sigma,\ t_2 \doteq t_3\end{array}}{\Sigma,\ t_1 \doteq t_3}$$

Justificación:

Escojamos una variable x que no aparece en t_1 y observemos que $(t_1 \doteq x)(\frac{x}{t_2}) = t_1 \doteq t_2$ y que $(t_1 \doteq x)(\frac{x}{t_3}) = t_1 \doteq t_3$. Por tanto la siguiente secuencia de líneas justifica la regla derivada:

$$\begin{array}{llll}
1 & t_1 \doteq t_2,\ t_2 \doteq t_3 & t_1 \doteq t_2 & (P) \\
2 & t_1 \doteq t_2,\ t_2 \doteq t_3 & t_2 \doteq t_3 & (P) \\
3 & t_1 \doteq t_2,\ t_2 \doteq t_3 & t_1 \doteq t_3 & (S)1,2
\end{array}$$

Se dice que una fórmula φ es *deducible a partir de* Σ (en este cálculo) y se escribe $\Sigma \vdash \varphi$ (olvidándonos momentáneamente del uso de este símbolo en el cálculo axiomático, si existe una deducción en este cálculo cuya última línea es de la forma $\Gamma,\ \varphi$ siendo Γ un subconjunto finito de Σ. Se trata de un cálculo correcto y completo, es decir, se verifica

$$\Sigma \models \varphi \text{ si y sólo si } \Sigma \vdash \varphi.$$

La prueba no es inmediata y aquí la omitimos. Si se elimina la regla del tercio excluso (TND) se obtiene un *cálculo intuicionista*, que es completo para la *lógica intuicionista*. En ese cálculo intuicionista no se puede demostrar, por ejemplo, la equivalencia entre $\neg\neg\varphi$ y φ, ni se pueden interdefinir los conectores $\vee$ y $\wedge$ con ayuda de la negación ni tampoco pueden interdefinirse los cuantificadores con ayuda de la negación.

Como en una deducción no aparece más que un número finito de fórmulas, la deducibilidad tiene un carácter finitario, es decir, siempre que $\Sigma \vdash \varphi$ existe un subconjunto finito Δ de Σ tal que $\Delta \vdash \varphi$. Por tanto, una consecuencia de la completud del cálculo es el siguiente resultado, que proporciona información muy importante sobre la relación de consecuencia.

Proposición 4.1 *Si* $\Sigma \models \varphi$, *entonces existe un subconjunto finito* Δ *de* Σ *tal que* $\Delta \models \varphi$.

Usando esto es fácil demostrar el último de los resultados que aquí exponemos, que es al mismo tiempo el inicio de la Teoría de Modelos.

Teorema 4.2 (Teorema de compacidad) *Un conjunto de fórmulas es satisfacible si todos sus subconjuntos finitos son satisfacibles.*

Prueba. Sea Σ un conjunto de fórmulas. Obviamente, si Σ es satisfacible, también lo son todos sus subconjuntos, sean finitos o infinitos. Supongamos ahora que Σ no es satisfacible. Entonces hay una fórmula φ tal que $\Sigma \models (\varphi \wedge \neg\varphi)$. Entonces $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$ y por la proposición previa hay un subconjunto finito Δ de Σ tal que $\Delta \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$. En ese caso $\Delta \models (\varphi \wedge \neg\varphi)$, de manera que Δ es un subconjunto finito de Σ que es insatisfacible.

Bibliografía

[1] J. L. Bell and M. Machover. *A Course in Mathematical Logic.* North Holland P.C., Amsterdam, 1977.

[2] R. Cori and D. Lascar. *Logique Mathématique. Course et exercices.* Masson, Paris, 1993.

[3] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, and W. Thomas. *Einführung in die mathematische Logik.* BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992. 3., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage.

[4] H. B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic.* Academic Press, New York, 1972.

[5] J. D. Monk. *Mathematical Logic.* Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[6] J. R. Shoenfield. *Mathematical Logic.* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1967.

Índice alfabético