LES EQUACIONS QUE MOUEN EL MÓN

XAVIER ROS OTON

1. Introducció

L'objectiu d'aquesta lliçó és presentar les *Equacions en Derivades Parcials* (EDPs), un tipus d'equacions que són omnipresents en gairebé totes les ciències i enginyeries. Són el llenguatge en que la majoria de lleis físiques estan escrites, i apareixen també en altres àrees com la biologia o les finances. Des del punt de vista purament matemàtic, l'estudi de les EDPs és una àrea d'investigació molt activa i interessant, i a més es fan servir també en altres contextos molt diferents com la geometria, la topologia i la probabilitat.

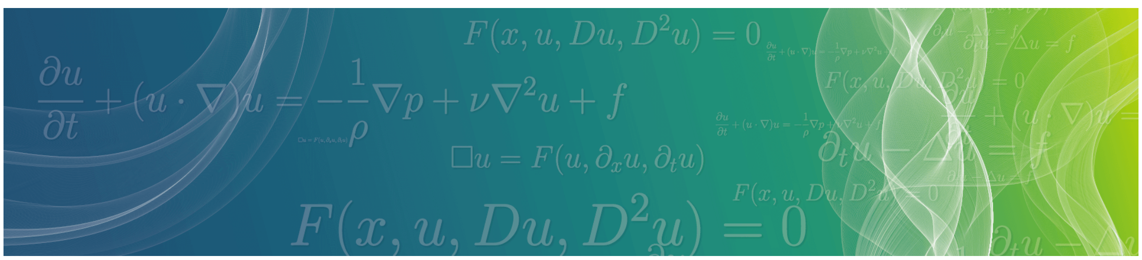

Figura 1. Imatge artística on apareixen diverses EDPs.

A continuació començarem explicant què són aquestes equacions i per què serveixen, per després passar a donar una idea general del tipus de preguntes que ens fem els matemàtics i matemàtiques que treballem en aquest camp d'investigació.

2. Què són les EDPs?

Abans de preguntar-nos què són les EDPs, pensem per un moment en què és una equació. Essencialment, una equació és una igualtat amb una incògnita, com per exemple

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

o bé

$$x^5 - 4x + 2 = 0.$$

Xavier Ros Oton és investigador ICREA i Catedràtic del Departament de Matemàtiques i Informàtica de la UB.

En tots dos casos, la incògnita x és un nombre, és a dir, el que busquem és un nombre x (o més d'un!) que compleixi l'equació. Equacions d'aquest tipus poden aparèixer en contextos molt diferents, i el nombre x pot representar un temps, un preu o una distància, per exemple.

Aquest tipus d'equacions són prou senzilles, però tot i així desperten preguntes matemàtiques interessants. Voldríem saber si sempre hi ha solucions, quantes n'hi ha, si són positives o no, quina és la millor forma d'aproximar-les, etc.

Doncs bé, les EDPs són també equacions, però conceptualment són bastant més complicades ja que *la incògnita no és un nombre, sinó una funció de diverses variables.*

Vegem-ne un exemple ben clàssic.

L'equació de la calor. Considerem una habitació on les parets estan a 0°C (no hi ha aïllament) però tenim uns radiadors a 50°C en un tros de paret, com a la Figura 2.

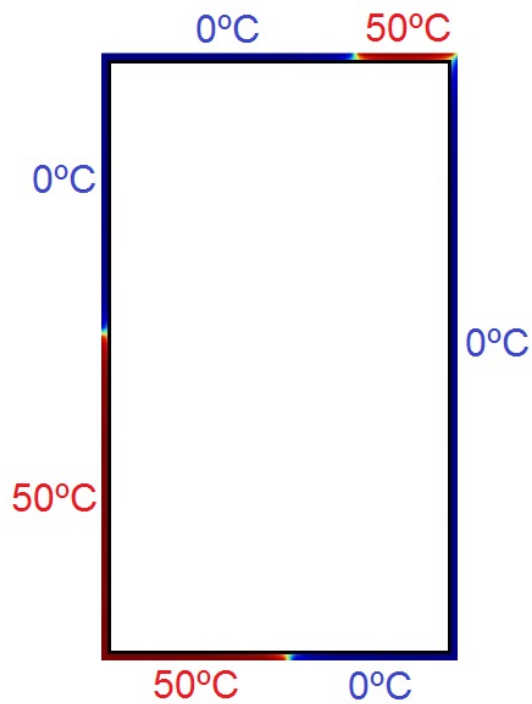

FIGURA 2. Representació de la temperatura de les parets de l'habitació.

La pregunta és aleshores trobar la temperatura *en tots els punts* de l'habitació, molt temps després d'encendre la calefacció. Tal com hem dit abans, aquí no estem buscant un nombre, sinó que realment el que volem trobar és una funció u que ens doni la temperatura a tots els punts de l'habitació.

La resposta a aquesta pregunta és una EDP, que s'anomena l'*equació de la calor*,

$$\partial_t u - \Delta_x u = 0.$$

Aquí, $u(x,t)$ és una funció que depen del temps t, i del punt $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. El Laplacià Δ_x és l'operador definit per[1] $\Delta_x u := \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i x_i} u$. En el nostre exemple de l'habitació, tenim $n = 2$.

Evidentment és molt més complicada que les equacions polinòmiques anteriors, però segueix essent una equació.

Fent servir aquesta EDP, podem trobar la temperatura a tots els punts de l'habitació[2], tal com podem observar a la Figura 3.

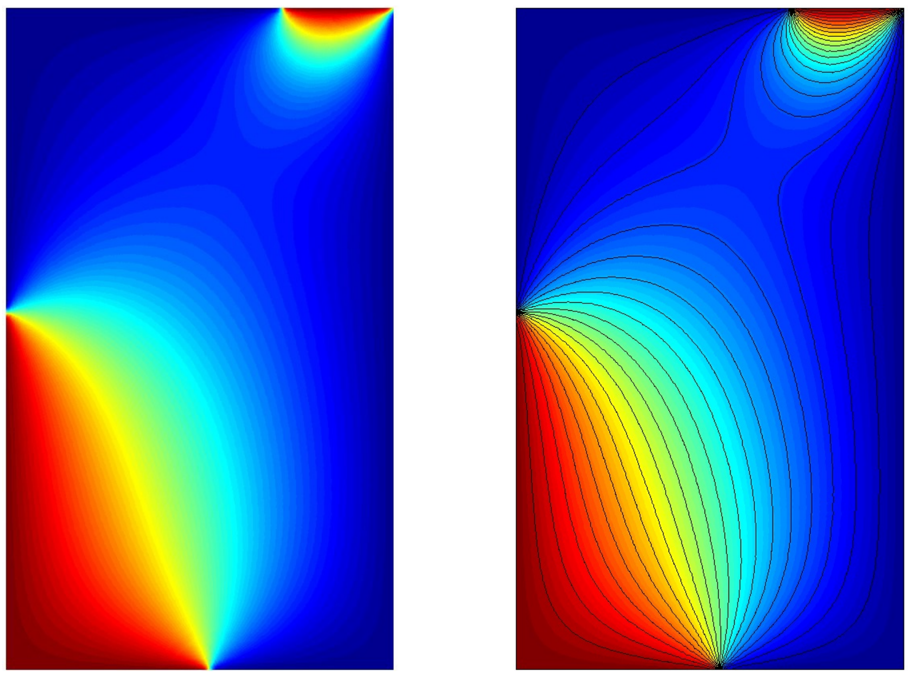

FIGURA 3. Representació de la temperatura a l'interior de l'habitació, i les seves corbes de nivell.

Podem veure també una forma alternativa de representar la temperatura interior de l'habitació a la Figura 4.

[1] Aquí, $\operatorname{div}\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \mathbf{F}^i$ denota la divergència d'un camp vectorial, i $\nabla u = (\partial_{x_1} u, ..., \partial_{x_n} u)$ és el gradient de la funció u.

[2] L'equació de la calor, de fet, ens diu com evolucionarà en cada instant de temps la temperatura de l'habitació donats els valors a la vora, i donada també la temperatura inicial. En el nostre cas volem saber només la temperatura que hi haurà a l'habitació molt després d'encendre la calefacció, per tant estem suposant que la temperatura ja no canvia en el temps. Aleshores la temperatura inicial és irrellevant, i sempre acabarem amb la configuració de la figura.

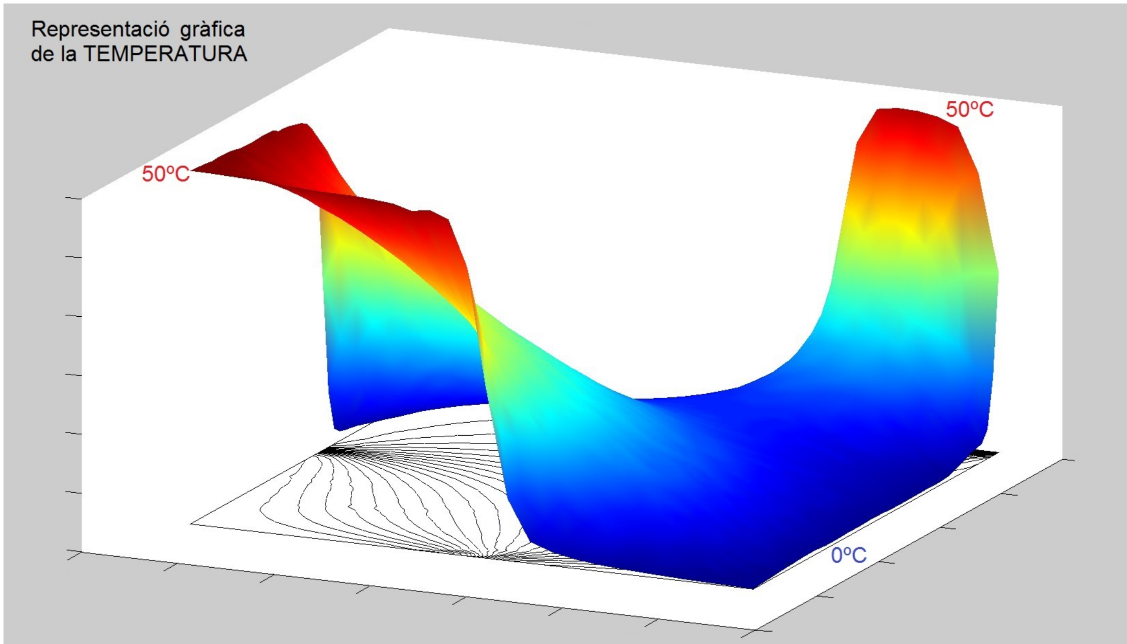

FIGURA 4. Representació alternativa de la temperatura a l'interior de l'habitació.

EDPs: Les equacions de la Física. En l'exemple anterior, la incògnita era la temperatura d'una habitació. Però en altres contextos podem tenir preguntes similars on la incògnita representa magnituds físiques diferents:

- La posició d'una ona
- El potencial electrostàtic
- La velocitat d'un fluid
- La mètrica que defineix de l'espai-temps (teoria de la relativitat general)
- L'evolució de partícules en mecànica quàntica
- ...

En cadascun d'aquests exemples hi ha una EDP que regeix exactament el comportament d'aquests fenòmens físics: l'equació d'ones, l'equació de Laplace, les equacions de Navier-Stokes, les equacions d'Einstein i l'equació de Schrödinger, respectivament.

Juntament amb l'equació de la calor, aquestes són algunes de EDPs més importants des del punt de vista de la física, i han estat (i són encara!) una de les motivacions més importants per al desenvolupament de l'anàlisi matemàtica de les EDPs. Tot i que la importància d'aquestes equacions en física era claríssima des del segle XIX, la base matemàtica era encara molt pobre l'any 1900. No va ser fins ben entrat el segle XX quan els matemàtics van poder desenvolupar les eines d'anàlisi matemàtica necessàries per entendre les EDPs.

... i no només Física! En els exemples anteriors hem vist que les EDPs són omnipresents en totes les branques de la física, i que això va ser un gran incentiu per desenvolupar i entendre la teoria matemàtica de les EDPs.

Tot i així, les EDPs apareixen de forma natural en moltíssims contextos diferents, on la incògnita podria representar:

- La distribució d'una població (Biologia)
- El preu d'un actiu financer (Finances)
- Un mapa de vents (Meteorologia)
- L'aerodinàmica d'un cotxe o un avió (Enginyeria)
- ...

En tots aquests exemples tenim EDPs que modelen els fenòmens corresponents, i que es fan servir al dia a dia sense que ens n'adonem.

A més, les EDPs també juguen un paper important en moltes branques de la matemàtica pura, per exemple en:

- Anàlisi Complexa (equacions de Cauchy-Riemann)
- Probabilitat (moviment Brownià, processos estocàstics)
- Anàlisi Funcional, Càlcul de Variacions
- Geometria Diferencial (superfícies mínimes, anàlisi geomètric)
- Topologia (conjectura de Poincaré)
- Teoria Geomètrica de la Mesura
- ...

La major part d'aquestes connexions entre les EDPs i altres branques de la matemàtica s'ha desenvolupat al llarg dels segles XX i XXI, amb molts resultats importants recents com la demostració de la conjectura de Poincaré l'any 2003.

Més endavant discutirem en més detall alguns d'aquests exemples.

3. Principals preguntes matemàtiques

Una de les preguntes més bàsiques i centrals en l'estudi d'EDPs és la regularitat: *Donada una certa EDP (o una classe general d'EDPs), són regulars totes les seves solucions, o poden tenir singularitats?*

Diem que una solució té una singularitat quan alguna de les quantitats que apareixen en l'equació es fa infinita. Per exemple, si la funció u que descriu la temperatura es tornés infinita en un cert punt de l'espai i temps, aleshores tindríem una singularitat. El mateix podria passar si una curvatura fos infinita, o si qualsevol dels termes que apareixen en l'EDP passa a ser infinit.

A banda de l'interès propi que entendre les possibles singularitats comporta –és una pregunta fonamental per entendre els fenòmens que estem modelant–, la qüestió de regularitat està sovint també lligada a preguntes tan bàsiques i importants com l'*existència o unicitat de solucions*.

Per exemple, en alguns casos es pot demostrar que, donada una condició inicial, existeix una solució per temps petits, però per entendre si tenim una solució global en el temps hem de saber si hi poden haver singularitats. O, en altres casos, es

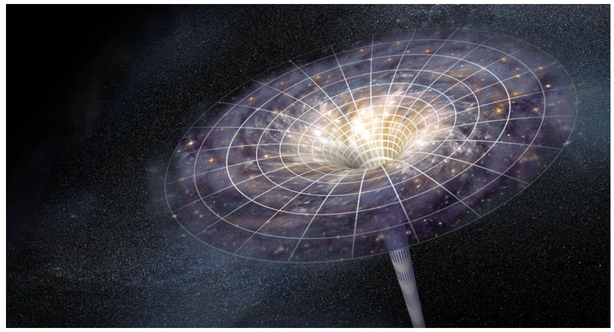

Figura 5. Representació artística d'una singularitat.

pot demostrar unicitat de solucions regulars, però en general no hi ha unicitat de solucions amb singularitats.

La teoria de regularitat per a EDPs s'ha desenvolupat enormement a partir de la segona meitat del segle XX, amb treballs d'E. De Giorgi (Premi Wolf 1990), P. Lax (Premi Abel 2005), J. F. Nash (Premi Abel 2015), L. Nirenberg (Premi Abel 2015), L. Caffarelli (Premi Wolf 2012) i A. Figalli (Medalla Fields 2018). Tal com veurem després, fins i tot G. Perelman (que va declinar la medalla Fields el 2006) va haver d'estudiar profundament aquest tipus de preguntes en la seva demostració de la Conjectura de Poincaré.

En les properes seccions descriurem en més detall diversos contextos on la teoria de regularitat juga un paper central.

4. Anàlisi Variacional

Una de les àrees de les matemàtiques més fortament relacionades amb les EDPs és l'anàlisi variacional, i.e., l'estudi dels minimitzants de funcionals o "energies".

Funcions harmòniques. L'exemple més clàssic són els minimitzants de l'*energia de Dirichlet*,

$$\mathcal{E}(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Aquest funcional mesura, en certa manera, com de "variable" és una funció $u(x)$. El problema de Dirichlet consisteix en trobar, d'entre totes les funcions que tenen uns valors fixats a la vora $\partial\Omega$, la que minimitza l'energia de Dirichlet (en cert sentit, la funció que "oscil·la" menys d'entre totes les admissibles).

Les funcions que en aquest sentit minimitzen l'energia de Dirichlet s'anomenen *funcions harmòniques.*

La connexió amb les EDPs ve del principi de Dirichlet: una funció $u(x)$ minimitza l'energia de Dirichlet si i només si satisfà l'anomenada equació de Laplace:

$$\Delta u = 0 \quad \text{a} \quad \Omega. \tag{4.1}$$

Aquesta és una de les EDPs més senzilles i alhora més importants i omnipresents en diversos camps de la Física i les Matemàtiques.

Per exemple, la part real (o imaginària) de qualsevol funció holomorfa és una funció harmònica en $\mathbb{R}^2$. Per tant, en cert sentit, les funcions harmòniques es poden veure com una generalització a $\mathbb{R}^n$ de les funcions holomorfes.

Una de les propietats més conegudes i importants d'aquestes funcions és la seva regularitat: qualsevol funció harmònica és C^∞ a l'interior de Ω, independentment dels valors de vora que tingui. En altres paraules, *les funcions harmòniques no poden tenir cap tipus de singularitats.*

Superfícies mínimes. Un altre problema clàssic en l'anàlisi variacional és l'estudi de les superfícies mínimes. Si suposem que tenim una superfície donada per la gràfica d'una funció $u(x)$, aleshores l'àrea d'aquesta superfície ve donada pel funcional

$$\mathcal{A}(u) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx.$$

Les funcions que minimitzen el funcional d'àrea (fixats els valors de vora) s'anomenen superfícies mínimes [10].

A la Figura 6 podem veure una pel·lícula de sabó amb uns valors de vora fixats, la qual dóna lloc a una superfície mínima.

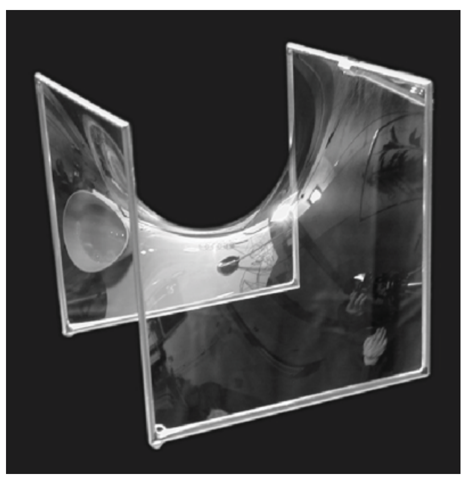

Figura 6. Construcció física d'una superfície mínima.

La relació amb les EDPs en aquest cas ve del següent principi: Les funcions $u(x)$ que minimitzen l'àrea resolen l'equació

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = 0 \quad \text{a} \quad \Omega. \tag{4.2}$$

Aquesta EDP es coneix com l'equació de superfícies mínimes, i és equivalent a dir que *la curvatura mitjana és zero en tots els punts.*

El problema 19 de Hilbert. Al Congrés Internacional de Matemàtiques de l'any 1900, D. Hilbert va presentar una llista de 23 problemes oberts, molts dels quals van tenir una gran influència en les matemàtiques del segle XX.

El problema 19 de Hilbert feia la següent pregunta:

Són sempre regulars els minimitzants de funcionals convexos en anàlisi variacional?

Hilbert considerava funcionals generals de la forma

$$\mathcal{E}(u) = \int_{\Omega} L(\nabla u) dx,$$

on L és (uniformement) convexa, i es preguntava si els minimitzants poden tenir singularitats o no.

En altres paraules, com que les funcions harmòniques corresponen al cas $L(p) = |p|^2$, el problema de Hilbert preguntava si la regularitat de les funcions harmòniques és una particularitat de l'equació de Laplace (4.1), o si en canvi és un principi general en anàlisi variacional.

La qüestió no es va resoldre fins l'any 1956, quan E. De Giorgi i J. Nash van demostrar (independentment i gairebé alhora) que efectivament tots els minimitzants són C^∞, i per tant no poden tenir singularitats [7]. El teorema de De Giorgi i Nash és encara un dels més famosos i importants en el camp de les EDPs, i va suposar un abans i un després en el desenvolupament de la teoria de regularitat.

Desigualtat isoperimètrica. Un altre problema clàssic en anàlisi variacional és el problema isoperimètric:

D'entre tots els conjunts amb volum fixat, quin és el que té menys perímetre?

FIGURA 7. Una bombolla de sabó resol el problema isoperimètric.

La resposta a aquest problema és fàcil de visualitzar: el conjunt que minimitza el perímetre és una esfera. Tot i així, demostrar-ho rigorosament no és gens fàcil, i no va ser fins a principis del segle XX quan es va poder demostrar la desigualtat isoperimètrica: per tot conjunt $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tenim

$$\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{|\partial B_1|}{|B_1|^{\frac{n-1}{n}}},$$

on B_1 és la bola unitat.

Aquesta desigualtat geomètrica té aplicacions molt importants en anàlisi matemàtica, i per exemple és equivalent a la desigualtat de Sobolev: per tota funció $u(x)$ tenim

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx,$$

on C_n és una constant (explícita i òptima) que depen només de la dimensió n.

La demostració d'aquest tipus de desigualtats funcionals i geomètriques sovint es fa a través d'EDPs i, per altra banda, en molts casos l'estudi de diversos tipus d'EDPs fa servir fortament aquest tipus de desigualtats.

Per tant, veiem que l'anàlisi variacional i les EDPs són dos camps que estan fortament lligats, i que es complementen l'un a l'altre [13].

5. Equacions dels fluids

Les equacions de Navier-Stokes descriuen el moviment de qualsevol fluid a l'espai. Aquestes equacions es fan servir constantment i tenen aplicacions en moltíssims camps d'enginyeria i física.

Tot i la seva importància immensa en ciència i enginyeria, fins i tot les propietats més bàsiques d'aquestes EDPs no s'han demostrat mai matemàticament. La pregunta més bàsica en aquest sentit és l'existència i unicitat de solucions:

Donada qualsevol condició inicial,
existeix sempre una única solució regular de les equacions de Navier-Stokes?

Aquest és un dels 7 **Problemes del Mil·leni en Matemàtiques**, i l'Institut Clay pagarà 1.000.000$ a qui el pugui resoldre.

En última instància, aquest problema d'existència i unicitat és en efecte un problema de *regularitat*: demostrar que les solucions de les equacions de Navier-Stokes no poden desenvolupar singularitats.

De fet, sabem demostrar existència de solucions si admetem que poden ser irregulars[3], però aleshores el problema és que aquestes "solucions irregulars" no tenen per què ser úniques [6, 2] (en cert sentit, podríem dir que ens trobem amb solucions "no físiques" de l'equació). Per altra banda, sí que sabem demostrar unicitat de solucions regulars, però no sabem que aquestes solucions regulars existeixin globalment en el temps.

Aquesta és una de les preguntes de regularitat en EDPs més coneguda i difícil, i sembla encara lluny de poder resoldre's [14].

[3]Aquestes solucions irregulars resolen l'equació només en un cert sentit generalitzat.

FIGURA 8. Representació del moviment d'un fluid.

6. Transicions de fase, problemes de frontera lliure

Un altre tipus d'EDPs que ha atret molta atenció en les últimes dècades són els *problemes de frontera lliure*. L'exemple més clàssic i important és el problema de Stefan (1831), que descriu matemàticament les transicions de fase, com per exemple el gel desfent-se en aigua.

A banda de la motivació directa d'entendre matemàticament les transicions de fase, hi ha molts altres models en física, biologia, i fins i tot finances que involucren problemes de frontera lliure [19, 12]. També apareixen en problemes d'anàlisi variacional, de teoria del potencial i d'optimització, així com en l'estudi de matrius aleatòries [18, 20, 9]. A més, la seva teoria matemàtica té una vessant molt geomètrica, fortament lligada amb l'estudi de les superfícies mínimes [4].

En aquest cas l'existència i unicitat de solucions no és difícil de demostrar, i la pregunta matemàtica més bàsica i important és aleshores entendre les singularitats que poden aparèixer.

Notem que en aquest context les singularitats apareixen quan la interfase entre el gel i l'aigua líquida es torna irregular — com a la Figura 9, on tenim una cúspide[4].

Un dels resultats més coneguts i importants en aquest context va ser establert per L. Caffarelli l'any 1977 [3], i bàsicament diu que les fronteres lliures són regulars (C^∞), excepte en alguns punts on es pot crear una cúspide[5].

El teorema de Caffarelli va donar per primera vegada un resultat fort de regularitat per a problemes de frontera lliure — sense això, a priori la frontera podria ser irregular a tot arreu i per tot temps!

La pregunta va estar oberta durant molts anys era: *Què més en podem dir dels punts singulars? En podem dir alguna cosa sobre la mida d'aquest conjunt?*

[4]En aquests punts, la velocitat a la qual es mou la frontera entre gel i aigua passa a ser infinita.

[5]Més precisament, el teorema de Caffarelli diu que el gel té densitat zero en aquests punts.

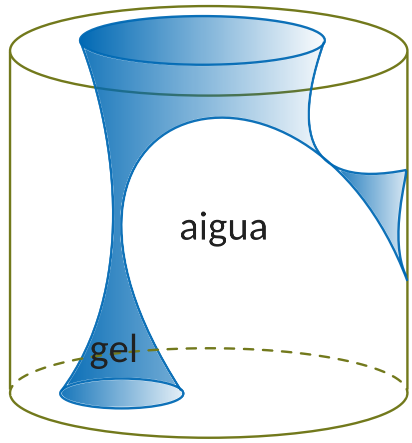

FIGURA 9. Una solució del problema de Stefan amb una singularitat.

En un treball recent en colaboració amb A. Figalli i J. Serra hem pogut contestar aquestes preguntes, amb l'estimació òptima sobre la mida del conjunt de punts singulars:

Teorema 1 (Figalli, Ros-Oton, Serra, [8]). *En el problema de Stefan, el conjunt de punts singulars $\Sigma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ satisfà* [6]

$$\dim_{\mathcal{H}}(\Sigma) \leq n-1.$$

A més, en 3D, quasi pertot temps no hi ha singularitats.

En altres paraules, el nostre resultat demostra per primera vegada que les singularitats "apareixen poc sovint".

El lector interessat pot consultar l'article de divulgació per al públic general que la revista '*Quanta Magazine*' ha escrit sobre el nostre resultat:

`www.quantamagazine.org/mathematicians-prove-melting-ice-stays-smooth-20211006`

Com hem dit abans, la teoria de regularitat per a problemes de frontera lliure té una forta connexió amb la de superfícies mínimes. En el nostre cas, per a la demostració d'aquest teorema hem usat idees provinents de la teoria desenvolupada per Almgren per entendre les superfícies mínimes de codimensió més gran que 1 [1, 5].

[6] Aquí, $\dim_{\mathcal{H}}$ denota la dimensió de Hausdorff d'un conjunt.

7. La conjectura de Poincaré

Un dels problemes oberts en matemàtiques més importants del segle XX era el que es coneix com la conjectura de Poincaré[7] (1904):

"Qualsevol varietat de dimensió 3, tancada i simplement connexa és homeomorfa a l'esfera."

L'any 2000 la conjectura seguia completament oberta, i es va convertir en un dels 7 Problemes del Mil·leni en Matemàtiques.

Tot i així, durant la segona meitat de segle hi va haver avenços enormes en aquest camp d'investigació. Per una banda, S. Smale (1961) i M. Freedman (1982) van aconseguir demostrar que la generalització natural de la conjectura de Poincaré[8] per a varietats de dimensió n és certa per $n \geq 5$ i $n = 4$, respectivament. Per altra banda, els treballs de W. Thurston van suposar un avenç enorme en l'estudi de varietats de dimensió 3, i li van permetre formular la seva conjectura de geometrització — un resultat que, de ser cert, classificaria completament l'estructura geomètrica que pot tenir qualsevol varietat de dimensió 3, i que implicaria la conjectura de Poincaré.

Per aquests treballs, tant Thurston com Smale i Freedman van guanyar la medalla Fields (els anys 1982, 1966 i 1986, respectivament).

El flux de Ricci. L'any 1982, R. Hamilton va proposar una nova idea per a una possible demostració de la conjectura de Poincaré: *fer servir EDPs!*

Més concretament, Hamilton va introduïr el flux de Ricci, una EDP — en cert sentit anàloga a l'equació de la calor, però molt més complicada — que dicta el moviment en el temps d'una varietat a partir del seu tensor de Ricci; vegeu la Figura 10.[9]

Les noves idees de R. Hamilton[10], de fet, van portar-lo a poder demostrar la conjectura de Poincaré en alguns casos especials[11] [11]. Ara bé, per poder demostrar la conjectura completament, hi havia un problema important: *calia entendre les singularitats que es poden desenvolupar amb el flux de Ricci.* En altres paraules, tenim un problema del mateix tipus que en les seccions anteriors: estudiar les singularitats en EDPs.

[7] De fet, H. Poincaré mai la va formular com a conjectura, sinó com una qüestió oberta de la qual no coneixia la resposta.

[8] La conjectura de Poincaré generalitzada diu bàsicament que si una varietat té l'homotopia d'una esfera aleshores ha de ser necessàriament una esfera.

[9] En aquest dibuix tenim una varietat de dimensió 2, mentre que la conjectura de Poincaré és per a varietats de dimensió 3.

[10] El programa de Hamilton per demostrar la conjectura de Poincaré involucra, en primer lloc posar una mètrica Riemanniana a la varietat, i aleshores fer servir el flux de Ricci per "millorar" aquesta mètrica. Per exemple, si es pot demostrar que la mètrica té curvatura positiva constant, aleshores gràcies a resultats clàssics de geometria Riemanniana ha de ser una esfera.

[11] Més concretament, Hamilton va demostrar la conjectura en els casos en que la varietat admet una mètrica amb curvatura de Ricci positiva a tot arreu.

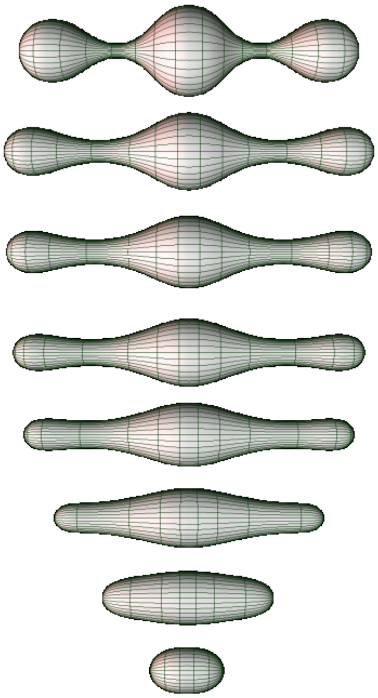

Figura 10. Evolució d'una varietat quan apliquem el flux de Ricci.

Finalment, l'any 2003 G. Perelman va poder demostrar completament la conjectura de Poincaré[12], continuant i completant el programa de Hamilton i demostrant resultats precisos sobre les singularitats que apareixen amb el flux de Ricci [15, 16, 17]. Amb aquesta demostració, Perelman va resoldre per primera vegada un dels 7 problemes del mil·leni.

Per a més detalls sobre la demostració de Perelman i la seva relació amb la teoria de regularitat per a EDPs, els lectors interessats poden consultar l'article de T. Tao "*Perelman's proof of the Poincaré conjecture: a nonlinear PDE perspective*" [21].

8. Resum i conclusions finals

Hem vist que les EDPs són un tipus d'equacions on la incògnita és una funció de diverses variables (una quantitat que depèn de l'espai i el temps, per exemple). Apareixen en la descripció de fenòmens físics molt diferents, i han jugat un paper central en la física des del segle XIX. Al llarg del segle XX, a més, amb l'aparició dels ordinadors, es converteixen en una de les eines més importants en ciència i enginyeria.

Des del punt de vista matemàtic, l'anàlisi d'EDPs es va desenvolupar àmpliament al llarg del segle XX, i encara tenim moltíssimes preguntes importants i interessants

[12] De fet, Perelman va demostrar la conjectura de geometrització de Thurston, sense la qual no hagués estat possible la resolució de la conjectura de Poincaré.

que no sabem resoldre. A més, diverses preguntes tenen fortes connexions amb altres àrees com la física o la geometria.

Una de les preguntes centrals en aquest camp és la regularitat de les solucions, és a dir, entendre si poden tenir singularitats o no. Per a més detalls sobre aquesta àrea de recerca, els lectors interessats poden consultar el llibre [7].

Referències

[1] F. Almgren, *Almgren's Big Regularity Paper: 'Q-Valued Functions Minimizing Dirichlet's Integral and the Regularity of Area-Minimizing Rectifiable Currents up to Codimension 2'*, World Scientific Monograph Series in Mathematics, vol. **1**, 2000.

[2] T. Buckmaster, V. Vicol, *Nonuniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equation*, Ann. Math. **189** (2019), 101-144.

[3] L. Caffarelli, *The regularity of free boundaries in higher dimensions*, Acta Math. **139** (1977), 155-184.

[4] L. Caffarelli, S. Salsa, *A Geometric Approach to Free Boundary Problems*, AMS Graduate Studies in Mathematics, vol. **68**, 2005.

[5] C. De Lellis, *The regularity theory for the area functional (in geometric measure theory)*, Proceedings of the ICM 2022, to appear.

[6] C. De Lellis, L. Székelyhidi, *The Euler equations as a differential inclusion*, Ann. Math. **170** (2009), 1417-1436.

[7] X. Fernandez-Real, X. Ros-Oton, *Regularity Theory for Elliptic PDE*, llibre en procés de publicació (2022), disponible a la pàgina web dels autors.

[8] A. Figalli, X. Ros-Oton, J. Serra, *The singular set in the Stefan problem*, preprint arXiv (2021).

[9] A. Friedman, *Variational Principles and Free Boundary Problems*, Wiley, New York, 1982.

[10] E. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Monographs in Mathematics **80**, Birkhäuser, 1984.

[11] R. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*. J. Differential Geom. **17** (1982), 255-306.

[12] P. Laurence, S. Salsa, *Regularity of the free boundary of an American option on several assets*, Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), 969-994.

[13] F. Maggi, *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems*, Cambridge University Press, 2012.

[14] A. Majda, *Vorticity and Incompressible Flow*, Cambridge University Press, 2010.

[15] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, preprint arXiv (2002).

[16] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, preprint arXiv (2003).

[17] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, preprint arXiv (2003).

[18] A. Petrosyan, H. Shahgholian, N. Uraltseva, *Regularity of Free Boundaries in Obstacle-type Problems*, AMS Graduate Studies in Mathematics, vol. **136**, 2012.

[19] J. F. Rodrigues, *Obstacle Problems in Mathematical Physics*, North-Holland Mathematics Studies, vol. **134**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987.

[20] S. Serfaty, *Coulomb Gases and Ginzburg-Landau Vortices*, Zürich Lectures in Advanced Mathematics **21**, Eur. Math. Soc., 2015.

[21] T. Tao, *Perelman's proof of the Poincaré conjecture: a nonlinear PDE perspective*, preprint arXiv (2006).