

Regularitat i singularitats en problemes de frontera lliure

XAVIER ROS-OTON I JOAQUIM SERRA

Resum: Els problemes de frontera lliure són equacions en derivades parcials en les quals hi ha també una interfície com a incògnita. L'exemple més clàssic és la transició de fase del gel desfent-se, conegut com el *problema de Stefan*. En aquest cas, la frontera lliure és la interfície sòlid-líquid entre el gel i l'aigua.

La qüestió matemàtica més important en aquest context és entendre la regularitat i les possibles singularitats de les fronteres lliures. L'objectiu d'aquest article és introduir aquesta àrea de recerca i presentar alguns resultats recents dels autors en col·laboració amb Alessio Figalli.

Paraules clau: problemes de frontera lliure, singularitats, problema de Stefan.

Classificació MSC2010: 35R35.

1 Introducció

Les equacions en derivades parcials (EDP) són un camp d'investigació molt actiu en matemàtiques, amb connexions molt importants en d'altres àrees com l'anàlisi harmònica, la geometria diferencial, el càlcul de variacions, la teoria de la probabilitat, la teoria geomètrica de la mesura, la mecànica de fluids o la matemàtica computacional i aplicada.

Una de les preguntes més bàsiques i centrals en l'estudi d'EDP és la regularitat: *Donada una determinada EDP (o una classe general d'EDP), són regulars totes les seves solucions, o poden tenir singularitats?*

La teoria de regularitat per a EDP es va desenvolupar enormement durant la segona meitat del segle XX, amb treballs de Caffarelli, Nirenberg, De Giorgi, Nash, Krylov, Evans, i molts d'altres; i és encara avui dia un dels temes centrals de recerca en EDP. A més, preguntes molt similars apareixen de forma natural

Aquest article és una traducció i adaptació de l'article dels mateixos autors que forma part d'un volum especial de la revista *Matematica, Cultura e Società*, publicada per la Unione Matematica Italiana; vegeu [51].

en contextos purament geomètrics, i aquestes idees van tenir fins i tot un paper clau en la demostració de Perelman de la conjectura de Poincaré [61].

En aquest article estudiarem la regularitat per a *problemes de frontera lliure*. Per una banda, aquest tipus de problemes modelen molts fenòmens naturals en física, biologia, ecologia, economia i matemàtica financera. Per altra banda, la seva teoria matemàtica té una vessant molt geomètrica, i està íntimament lligada amb l'estudi de les superfícies mínimes i d'alguns fluxos geomètrics.

A continuació presentem els problemes que estudiarem, així com algunes motivacions i exemples. Després passarem a descriure la teoria matemàtica clàssica sobre la regularitat de les fronteres lliures, i finalment presentarem alguns resultats recents dels autors en col·laboració amb Alessio Figalli sobre l'estudi de les singularitats en aquests problemes.

1.1 El problema de Stefan

El problema de Stefan, introduït durant el segle XIX, és el problema de frontera lliure més clàssic i important. Va ser considerat per primera vegada per Lamé i Clapeyron el 1831, i descriu la distribució de la temperatura en un medi homogeni durant una transició de fase, per exemple, un bloc de gel submergit en aigua. El nom prové del físic eslovè Jožef Stefan, que va introduir una classe general de problemes d'aquest tipus al voltant del 1890 [59, 60, 43].

La formulació més clàssica del problema de Stefan és la següent: sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domini fitat. Podem pensar que Ω és, per exemple, un tanc cilíndric d'aigua, com en la figura 1. Denotem per

$$\theta = \theta(x, t)$$

la temperatura de l'aigua al punt $x \in \Omega$ a temps $t \in \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$. Suposem que $\theta \geq 0$ en $\Omega \times \mathbb{R}^+$. La temperatura inicial i la temperatura a la vora del tanc són donades.

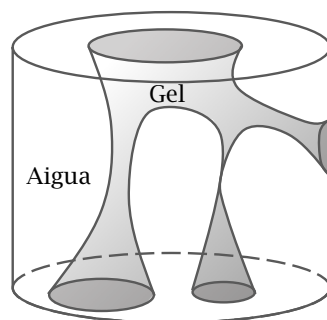


FIGURA 1: El problema de Stefan.

El conjunt $\{(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ : \theta(x, t) > 0\}$, que denotarem per $\{\theta > 0\}$, representa l'aigua líquida, mentre que el seu complementari, que denotem per $\{\theta = 0\}$, representa el gel. La temperatura θ és solució de l'equació de la calor

$$\partial_t \theta - \Delta \theta = 0 \quad \text{a la regió } \{\theta > 0\},$$

mentre que en el complementari θ és simplement zero.

Determinar on és la interfície o *frontera lliure* que separa les dues regions (és a dir, la superfície $\partial\{\theta > 0\}$) forma part del problema, i per això necessitem una equació (o una condició de frontera) addicional sobre aquesta interfície, que s'anomena *condició de Stefan*:

$$\partial_t \theta = |\nabla \theta|^2 \quad \text{a } \partial\{\theta > 0\}. \quad (1)$$

Aquesta relació addicional ve de dues consideracions. Primer, la velocitat de la interfície en la direcció normal, V , és proporcional a la quantitat de calor absorbida (que es fa servir per desfer el gel). A més, aquesta calor que «entra» és, per la llei de Fourier, proporcional al gradient de la temperatura. Per tant, tindrem que $V = C|\nabla \theta|$ per a alguna constant C . Segon, com que $\theta = 0$ a la interfície, obtenim que, sobre aquesta, V i $\nabla \theta$ són paral·lels i $(\partial_t + V \cdot \nabla)\theta = 0$. Combinant les dues informacions prèvies i escollint les unitats físiques de manera que $C = 1$, obtenim la condició de Stefan (1).

També es pot veure que, pel «principi del màxim», el gel $\{\theta = 0\}$ es va fent petit a mesura que avança el temps. En altres paraules, si en algun punt de Ω hi ha aigua líquida en un instant de temps determinat, aleshores aquest punt seguirà essent líquid per a tots els temps futurs.

Es pot demostrar que, després de la transformació

$$u(x, t) := \int_0^t \theta(x, \tau) d\tau$$

(vegeu [3, 20]), la nova funció

$$u: \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

compleix

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= -\chi_{\{u>0\}}, \\ u &\geq 0, \\ \partial_t u &\geq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

on χ_A denota la funció característica del conjunt A .

Com que podem recuperar θ a partir de u simplement derivant respecte de t , veiem que (2) és una formulació equivalent del problema de Stefan. La nova formulació és útil perquè té millors propietats matemàtiques (té l'estructura d'una «desigualtat variacional») que la formulació original amb θ . Per exemple, mentre que en la formulació original amb θ no és clar com demostrar existència

i unicitat de solució (no n'hi havia cap demostració rigorosa durant més d'un segle!), és molt més fàcil de fer-ho amb la formulació equivalent (2).

La versió estacionària de (2) és el *problema de l'obstacle*:

$$\begin{aligned}\Delta u &= \chi_{\{u>0\}}, \\ u &\geq 0.\end{aligned}\tag{3}$$

És un dels problemes més coneguts en EDP el·líptiques, ja que sorgeix de manera natural en molts contextos diferents.

1.2 Motivacions i aplicacions

Tots dos problemes, el de Stefan i el de l'obstacle, apareixen en molts models diferents en física, indústria, biologia i finances. A continuació comentem breument alguns d'aquests models, i referim el lector als llibres [21, 40, 49, 33, 48, 25] per a més detalls i altres aplicacions d'aquest tipus de problemes.

- **Transicions de fase.** En el problema de Stefan clàssic, tal com hem explicat a la subsecció prèvia, la solució u de (2) és la integral de la temperatura d'un sòlid sota una transició de fase, com per exemple gel que es desfà en aigua.
- **Filtració de fluids.** El *problema de la presa* descriu la filtració d'aigua dins una presa feta d'un material porós. Es considera una presa porosa que separa dues reserves d'aigua a diferents altures; vegeu la figura 2. Aleshores, l'interior de la presa té una part molla, on l'aigua flueix, i una part seca. En aquest context, la integral de la pressió és solució del problema de l'obstacle (3), i la frontera lliure correspon a la interfície entre la part molla i la part seca de la presa.

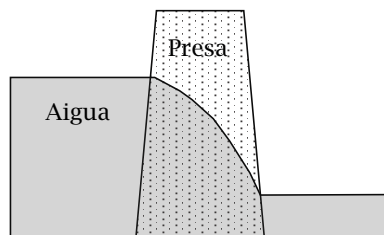


FIGURA 2: El problema de la presa.

- **Flux de Hele-Shaw.** Aquest model, introduït l'any 1898, descriu un flux d'un fluid entre dues plaques paral·leles separades per un espai molt prim. Diversos problemes en mecànica de fluids es poden aproximar per fluxos de Hele-Shaw, i aquest és el motiu pel qual entendre aquest model és important.

Una cèl·lula de Hele-Shaw (vegeu la figura 3) és un dispositiu experimental en el qual un fluid viscos és atrapat en l'espai entre dues plaques paral·leles molt juntes entre si. En algunes regions, l'espai entre les plaques conté fluid mentre que en d'altres l'espai conté aire. Quan injectem líquid dins el dispositiu (per exemple, a través d'un petit forat a la placa superior) la regió que conté fluid creix. En aquest context, la integral de la pressió resol, per a cada $t > 0$ fixat, el problema de l'obstacle (3). Igual que en el problema de la presa, la frontera lliure correspon a la interfície entre la regió amb fluid i la regió amb aire.

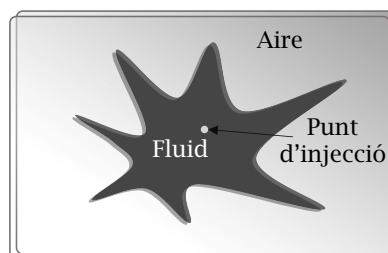


FIGURA 3: Una cèl·lula de Hele-Shaw.

- **Estratègies òptimes, finances.** En la teoria de la probabilitat i en finances, el problema de Stefan (2) i el problema de l'obstacle (3) apareixen quan considerem alguns problemes d'optimització per a processos estocàstics.

Un exemple típic és el model de Black-Scholes per al preu de les opcions americanes. Una opció americana és un contracte que dona el dret (a la persona propietària de l'opció) a comprar algun actiu financer (típicament accions d'una certa empresa) a un preu especificat (preu d'exercici) en qualsevol moment abans de la data de venciment. Aquesta opció té un valor, ja que, en cas que el preu de mercat pugi per sobre del preu d'exercici, aleshores l'opció es pot exercir i comprar així l'actiu a un preu més barat.

L'objectiu del model de Black-Scholes és calcular el preu racional $u = u(x, t)$ d'una opció en un temps t (previ a la data de venciment) i dependent del preu $x \in \mathbb{R}^+$ de l'actiu financer. Com que l'opció es pot exercir en qualsevol moment abans del venciment, determinar la «regió d'exercici», *i. e.* els parells (x, t) pels quals l'estratègia òptima és exercir l'opció, forma part del problema. Potser, sorprenentment, aquest model probabilístic ens porta una altra vegada a un problema de Stefan del tipus (2), i la frontera lliure correspon a la vora de la regió d'exercici.

- **Sistemes de partícules en interacció.** Els sistemes amb un gran nombre de partícules en interacció apareixen en física, biologia o ciència de materials.

En alguns d'aquests models les partícules s'atrauen entre elles quan són lluny, però es repelleixen quan són a prop [16]. En altres models de mecànica estadística, les partícules (per exemple, electrons) es repelleixen amb una força de Coulomb i es vol entendre el seu comportament sota la presència d'un camp extern que les manté atrapades [55].

En els models anteriors, una qüestió natural i interessant és determinar les configuracions d'equilibri. Per exemple, en sistemes de Coulomb els electrons s'acumulen en una regió que té una vora ben definida; vegeu la figura 4. Remarcablement, aquests problemes són també equivalents a problemes de l'obstacle del tipus (3) —el potencial elèctric $u = u(x)$ generat pels electrons resol un problema com (3) i la frontera lliure correspon a la vora de la regió en què les partícules es concentren.

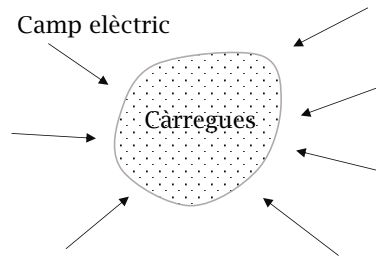


FIGURA 4: La configuració d'equilibri per un sistema de Coulomb.

• **Elasticitat.** Considerem ara la posició d'equilibri $v(x)$ d'una membrana elàstica amb la vora fixada, i que es manté per sobre d'un obstacle fixat $\varphi(x)$.

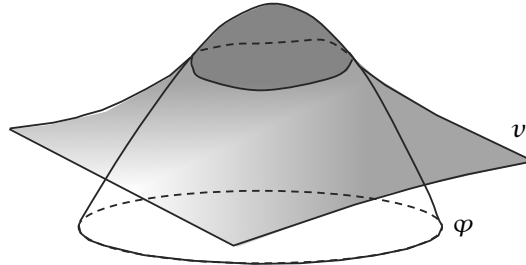


FIGURA 5: Una membrana elàstica sobre un obstacle φ .

A la regió on la membrana rau sobre l'obstacle φ , la solució v resol una EDP (*i. e.*, $\Delta v = 0$ en $\{v > \varphi\}$), mentre que en l'altra regió la membrana simplement coincideix amb l'obstacle (*i. e.*, $v = \varphi$). Considerant la funció $u := v - \varphi \geq 0$, trobem un problema de l'obstacle del tipus (3).

2 Regularitat de les fronteres lliures

Des del punt de vista matemàtic, una pregunta central en el problema de Stefan (2) i en el problema de l'obstacle (3) és entendre la *regularitat de les fronteres lliures* [14, 48].

Per exemple, en el problema de Stefan: hi ha alguna propietat de regularització que fa que la frontera lliure sigui regular, independentment de la condició inicial? (Notem que a priori la frontera lliure podria ser un conjunt molt irregular, fins i tot un conjunt fractal!) Aquest tipus de preguntes són en general molt difícils, i fins i tot en casos més senzills no se sabia res abans del 1970. El desenvolupament de la teoria de regularitat per a fronteres lliures va començar a finals dels anys setanta, i des d'aleshores ha estat un camp de recerca molt actiu.

2.1 Alguns exemples de Schaeffer

La primera cosa a intentar és construir algunes solucions explícites del problema de l'obstacle, i veure com es comporten les seves fronteres lliures. Quan fem això ens trobem que, en la majoria de casos senzills, les fronteres lliures són molt regulars.

Va ser Schaeffer qui s'adonà que, amb una mica més d'esforç, es poden construir diversos exemples amb fronteres lliures amb singularitats. En concret, va elaborar diferents solucions del problema de l'obstacle a \mathbb{R}^2 en les quals la frontera lliure té una cúspide.

De fet, aquests exemples es poden construir fent servir eines d'anàlisi complexa, i les cúspides venen donades per les corbes

$$x_2 = \pm x_1^{2k+\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq x_1 \leq 1.$$

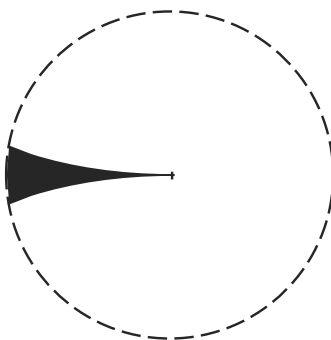


FIGURA 6: Una cúspide.

El conjunt $\{u > 0\}$ és la imatge de $\{|z| \leq 1, \text{Im } z > 0\}$ després de la transformació conforme $f(z) = z^2 + iz^{4k+1}$, i u prop de l'origen compleix

$$u(z) \approx \frac{x_2^2}{2} + c_k \text{Im}(z^{2k+\frac{3}{2}}) + \dots,$$

on $z = x_1 + ix_2$.

Un altre tipus de singularitats (una cúspide doble) també va ser construïda per Schaeffer. En aquest cas, les cúspides dobles venen donades per les corbes

$$x_2 = \pm |x_1|^{2k}, \quad -1 \leq x_1 \leq 1.$$

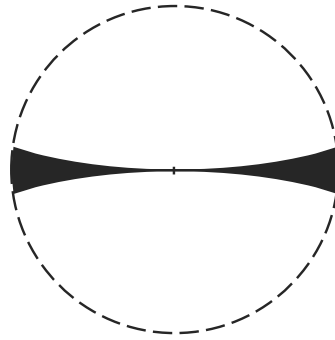


FIGURA 7: Una cúspide doble.

Considerant problemes de l'obstacle del tipus (3) lleugerament més generals a \mathbb{R}^2 , Schaeffer va demostrar que és possible construir fins i tot exemples en què la frontera lliure té infinites cúspides.



FIGURA 8: La frontera lliure podria tenir un nombre infinit de cúspides.

2.2 El teorema de Caffarelli

Malgrat tenir tots aquests exemples, fins a finals dels anys setanta no hi havia cap resultat general de regularitat per a fronteres lliures. Una conjectura natural, donats aquests exemples, seria que les fronteres lliures són regulars fora d'un cert conjunt de «punts singulars». Tot i així, no hi havia cap resultat d'aquest tipus, i semblava un problema obert extremament difícil.

Això va canviar l'any 1977 amb l'article de Luis Caffarelli [7]. Aquest treball va desenvolupar per primera vegada una teoria de regularitat de les fronteres lliures en el problema de l'obstacle (3) i el problema de Stefan (2).

Els principals resultats de [7] (vegeu també [39]) es podrien resumir així:

- La frontera lliure es pot dividir entre *punts regulars* i *punts singulars*.
- El conjunt de *punts regulars* és un subconjunt obert de la frontera lliure, i és C^∞ .

- Els punts singulars x_0 es poden caracteritzar com aquells on el «conjunt de contacte» $\{u = 0\}$ té densitat zero (com en una cúspide), *i. e.*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\{u = 0\} \cap B_r(x_0)|}{|B_r(x_0)|} = 0. \quad (4)$$

En altres paraules:

La frontera lliure és regular, excepte en un cert conjunt de singularitats de tipus cúspide.

Aquest és un dels resultats pels quals Caffarelli va rebre el Premi Wolf l'any 2012 i el Premi Shaw l'any 2018.

2.3 Els *blow-ups*

Per a demostrar aquest resultat de regularitat, es consideren el que anomenem *blow-ups*. Aquesta és una idea clau que és comuna en molts problemes d'EDP i d'anàlisi geomètrica.

Donat un punt x_0 de la frontera lliure, es consideren les funcions reescalades

$$u_r(x) := \frac{u(x_0 + rx)}{r^2}, \quad (5)$$

per a $r \in (0, 1)$. Noteu que, en agafar $r > 0$ més i més petit, estem ampliant la solució¹ (fent zoom) al voltant del punt x_0 .

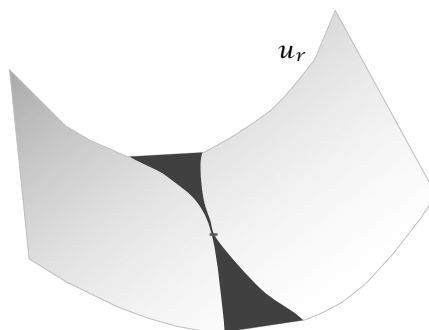


FIGURA 9: La funció reescalada u_r en un punt singular.

Aleshores, la idea és prendre el límit $r \downarrow 0$, i demostrar que

$$u_r(x) := \frac{u(x_0 + rx)}{r^2} \xrightarrow{r \downarrow 0} u_0(x)$$

¹ Es pot demostrar que, per a qualsevol punt de la frontera lliure x_0 , es té $\max_{B_r(x_0)} u \approx r^2$, per a $r > 0$ petit. Per tant, el factor de reescalament $1/r^2$ a (5) és escollit simplement per tal que les funcions u_r compleixin $\max_{B_1} u_r \approx 1$.

per a una certa funció u_0 que és una solució *global* del problema de l'obstacle en tot l'espai. Aquesta funció u_0 és el que anomenem un *blow-up* de u en x_0 .

Bàsicament, la idea és que la funció u_0 ens hauria de donar informació sobre quin aspecte té la solució u en el punt x_0 .

Una de les principals dificultats és, de fet, *classificar els possibles* blow-ups. Pel problema de l'obstacle, Caffarelli va demostrar que, o bé

- (a) u_0 és una solució unidimensional de la forma

$$u_0(x) = (x \cdot e)_+^2,$$

on $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ és algun vector unitari;

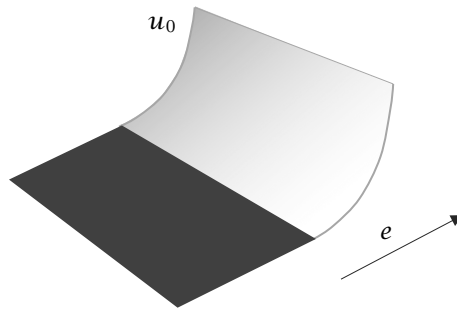


FIGURA 10: Una solució 1D u_0 .

o bé

- (b) u_0 és un polinomi quadràtic de la forma

$$u_0(x) = \frac{1}{2}x^T A x,$$

on $A \geq 0$ és una matriu simètrica, semidefinida positiva, i tal que $\text{tr}(A) = 1$.

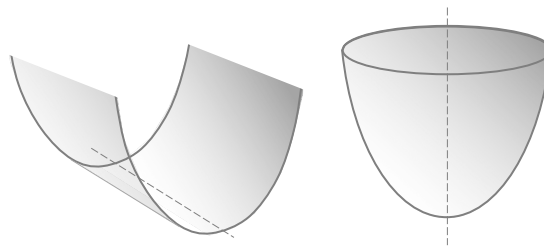


FIGURA 11: Possibles polinomis quadràtics u_0 del tipus (b).

Notem que, en el cas (a), el conjunt de contacte $\{u_0 = 0\}$ és un semiespai, mentre que, en el cas (b), el conjunt $\{u_0 = 0\}$ té mesura zero. El primer cas és el que esperem als punts regulars, mentre que el segon cas és el que esperem als punts singulars.² Aquesta intuïció no només és correcta sinó que, de fet, es tradueix en una definició matemàtica rigorosa: diem que un punt de la frontera lliure x_0 és *regular* si el *blow-up* u_0 en x_0 és del tipus (a), i diem que x_0 és un punt *singular* si el *blow-up* u_0 en x_0 és del tipus (b).

Per completar la demostració del teorema de Caffarelli, s'ha de *transferir la informació* de u_0 a la solució u , i demostrar que, si x_0 era un punt regular, aleshores la frontera lliure és C^1 en un entorn de x_0 . Aquesta part també és delicada, i és una altra de les principals contribucions de [7]. D'altra banda, el fet que $\{u = 0\}$ compleixi (4) en els punts singulars és una conseqüència més immediata de la definició de punt singular, fent servir que la convergència de u_r a u_0 és uniforme i que $u_0 > 0$ fora d'un subespai lineal de \mathbb{R}^n . Per a més detalls, el lector pot consultar [8, 9] o bé [48, 25].

3 Singularitats

Després dels resultats de Caffarelli [7], el pas següent és entendre millor el conjunt de punts singulars.

Entendre l'estructura de les singularitats és un tema de recerca central en diverses àrees relacionades amb EDP no lineals i anàlisi geomètrica. En el nostre context, és ben natural preguntar-se:

- Com de «gran» pot ser el conjunt singular?
- En cas que sigui un conjunt gran, es podria demostrar que té bones propietats estructurals o de regularitat?

3.1 El cas 2D

Els primers resultats en aquesta direcció van ser demostrats per L. Caffarelli i N. Rivière en dues dimensions [12]. Van provar que, en qualsevol punt singular x_0 , qualsevol solució u del problema de l'obstacle en \mathbb{R}^2 compleix

$$u(x) = p_2(x) + o(|x - x_0|^2), \quad (6)$$

on p_2 és un polinomi quadràtic $p_2 \geq 0$ i $\Delta p_2 = 1$. A més, això implica que el conjunt singular està contingut en una corba de classe C^1 .

Van passar molts anys abans que aquest resultat es pogués millorar. El següent resultat important en aquesta direcció va ser el de Sakai el 1991 [52, 53], qui va demostrar que les cúspides de Schaeffer (descrites abans a la subsecció 2.1) són bàsicament les úniques que poden aparèixer en el problema de l'obstacle (3) en \mathbb{R}^2 . Aquest resultat elegant i òptim dona una imatge completa del problema de l'obstacle en el pla, i la seva demostració fa servir de forma crucial eines d'anàlisi complexa.

² Per exemple, si fem el *blow-up* a la solució de la figura 9, en el límit $r \rightarrow 0$ hauríem d'obtenir un polinomi com el primer de la figura 11.

3.2 Dimensions més altes

En dimensions $n \geq 3$, on l'anàlisi complexa no ens pot ajudar, els primers resultats per al conjunt singular van ser obtinguts per Caffarelli l'any 1998 [9] (vegeu també [46]). Va demostrar que, si u és qualsevol solució del problema de l'obstacle (3) a \mathbb{R}^n , aleshores (6) es compleix en tot punt singular x_0 . A més, això implica que el conjunt singular està contingut en una varietat C^1 de dimensió $(n - 1)$.

Durant gairebé dues dècades, aquest era el millor resultat conegut per al conjunt singular en dimensions $n \geq 3$. Tot i així, una qüestió oberta important era entendre si (6) es podia millorar o no.

En dimensió dos, gràcies als resultats de Sakai, en tot punt singular de la frontera lliure tenim

$$u(x) = p_2(x) + O(|x - x_0|^3). \quad (7)$$

És important remarcar, però, que els mètodes de Sakai, basats en anàlisi complexa, no poden funcionar en dimensions més altes, ni tampoc per al problema de Stefan. Per tant, millorar (6) en dimensions $n \geq 3$ requeriria idees completament diferents.

El primer resultat nou en aquesta direcció per a dimensions $n \geq 3$ va ser establert per Colombo, Spolaor i Velichkov el 2017 [17], ja que van millorar i refinar els mètodes de Weiss [62]. Van demostrar que en tot punt singular l'expansió (6) és certa amb un mòdul de continuïtat logarítmic addicional en el terme $o(|x - x_0|^2)$.

De forma independent i amb mètodes diferents, Figalli i el segon autor van demostrar a [30] el resultat següent per al problema de l'obstacle a \mathbb{R}^n :

TEOREMA 1 ([30]). *Fora d'un conjunt de dimensió de Hausdorff $n - 3$, se satisfà (7).*

En altres paraules, en dimensions més altes, (7) és cert a *gairebé tots* els punts singulars x_0 .

L'expansió (7) de u , de fet, dona una informació millorada per a la cúspide en x_0 . Concretament, se segueix dels resultats de [30] que, en gairebé tots els punts singulars x_0 (possiblement després d'una rotació), en un entorn de x_0 tenim

$$\{u = 0\} \subseteq \{|x_n| \leq C|x'|^2\},$$

on $x = (x', x_n)$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

A més, també es va demostrar a [30] que aquest resultat és òptim, en el sentit que existeixen punts singulars (aïllats) a \mathbb{R}^3 en els quals (7) no és cert. De fet, en aquests punts, el mòdul de continuïtat logarítmic de [17] no es pot millorar.

Tot plegat dona una imatge molt completa de les singularitats per al problema de l'obstacle en qualsevol dimensió.

3.3 El problema de Stefan

Tal com hem explicat, una de les preguntes més importants en problemes d'EDP en què apareixen singularitats és establir estimacions per a la *mida* del conjunt singular.

Alguns resultats famosos en aquesta direcció inclouen teoremes sobre superfícies mínimes [57, 2], les equacions de Navier-Stokes [11], i el flux de curvatura mitjana [64].

En el problema de Stefan (2), les mateixes tècniques usades en l'estudi del problema de l'obstacle impliquen que per al problema (2), per a cada t fixat, el conjunt singular té dimensió $(n - 1)$; vegeu [63, 6, 44]. Aquest resultat és òptim en espai, en el sentit que es poden construir exemples en els quals el conjunt singular conté una hipersuperfície de dimensió $(n - 1)$ (per exemple, una esfera) per a algun temps fixat $t = t_0$. En aquest sentit, semblaria que el conjunt de punts singulars pot ser tan gran com el de punts regulars, que sempre és $(n - 1)$ -dimensional. Ara bé, encara es podria tenir l'esperança que, mirant conjuntament l'espai i el temps, el conjunt singular pogués ser molt més petit que el conjunt regular.

Per exemple, no es coneixen casos en els quals apareguin punts singulars per a tot temps t , però no és (o era) clar *a priori* si això podria passar o no. En cas negatiu, la següent qüestió seria establir estimacions per al conjunt de *temps singulars*. Concretament, si denotem Σ_t el conjunt dels punts singulars a temps t , aleshores podem definir com a

$$S = \{t : \Sigma_t \neq \emptyset\}$$

el conjunt de tots els temps per als quals existeix alguna singularitat.

El resultat següent va ser anunciat a la xerrada plenària d'Alessio Figalli a l'ICM2018 [27], i apareixerà demostrat a l'article [29]:

TEOREMA 2 ([29]). *Sigui $u(x, t)$ una solució del problema de Stefan (2) a \mathbb{R}^3 . Suposem que*

$$u_t > 0 \quad \text{a} \quad \{u > 0\}.$$

Aleshores,

$$\dim_{\mathcal{H}^1}(S) \leq \frac{1}{2}.$$

En particular, la frontera lliure és C^∞ gairebé per a tot temps t .

Aquí, $\dim_{\mathcal{H}^1}(S)$ denota la dimensió de Hausdorff³ del conjunt S .

Aquest és el primer resultat sobre la mida del conjunt de temps singulars per al problema de Stefan. El teorema l'hem enunciat per simplicitat en la dimensió física $n = 3$, però a [29], de fet, demostrem nous resultats per al problema de Stefan a \mathbb{R}^n per a tota dimensió $n \geq 2$. Com hem dit abans,

³ La dimensió de Hausdorff es defineix per a qualsevol conjunt mesurable. En cert sentit, ens dona una idea de la «mida» d'un conjunt.

prèviament no se sabia ni tan sols si les solucions al problema de Stefan (2) a \mathbb{R}^3 podrien tenir singularitats per a *tot* temps t .

Finalment, volem remarcar que no és clar si la dimensió $\frac{1}{2}$ és òptima o no. El que sí és clar de les demostracions és que aquest és un exponent *crític* per a aquest problema. Això és similar (tot i que els resultats i demostracions són molt diferents) al que passa per a les equacions de Navier-Stokes; vegeu el resultat clàssic de Caffarelli, Kohn i Nirenberg [11].

4 Regularitat genèrica

Una segona qüestió molt important en l'estudi de singularitats és el desenvolupament de mètodes per demostrar resultats de *regularitat genèrica*.⁴ Aquest és un dels grans reptes per a la teoria d'EDP avui en dia.

En efecte, en problemes d'EDP en els quals poden aparèixer singularitats, és important entendre si aquestes singularitats apareixen «sovint», o si en canvi «la majoria» de solucions no tenen singularitats.

En el context del problema de l'obstacle (3), la pregunta clau és entendre la regularitat genèrica de les fronteres lliures. Com hem vist abans, exemples explícits mostren que els punts singulars en el problema de l'obstacle poden formar un conjunt molt gran, de dimensió $n - 1$ (tan gran com el conjunt regular). Tot i així, s'espera que els punts singulars siguin «rars» ([54]):

CONJECTURA (SCHAEFFER, 1974). *Genèricament, les fronteres lliures en el problema de l'obstacle són C^∞ , sense punts singulars.*

En altres paraules, la conjectura diu que, genèricament, la frontera lliure no hauria de tenir singularitats.

La conjectura només havia estat demostrada en el pla \mathbb{R}^2 [46], i fins fa poc no se sabia res a \mathbb{R}^3 o en dimensions més altes. Noteu que en el problema de l'obstacle la qüestió de regularitat genèrica és particularment rellevant, ja que el conjunt singular, en principi, podria ser tan gran com el conjunt regular —mentre que en altres problemes el conjunt singular és de dimensió més petita [37]. A més, des del punt de vista de les motivacions i aplicacions, és particularment rellevant entendre el problema en l'espai físic \mathbb{R}^3 .

El resultat següent va ser demostrat recentment per Figalli i els autors a [28]:

TEOREMA 3 ([28]). *Genèricament, a \mathbb{R}^n el conjunt de punts singulars Σ té dimensió de Hausdorff menor o igual que $n - 4$, i*

$$\mathcal{H}^{n-4}(\Sigma) = 0.$$

En particular, la conjectura de Schaeffer és certa a \mathbb{R}^3 i \mathbb{R}^4 .

⁴ Aquí, per regularitat genèrica ens referim al fet que existeixi un conjunt obert i dens de condicions de vora per a les quals la solució corresponent no té singularitats.

Aquí, \mathcal{H}^{n-4} denota la mesura de Hausdorff de dimensió $n - 4$. És una generalització de l'àrea o el volum, vàlida per a conjunts que *a priori* poden ser molt irregulars.

És important remarcar que hi ha molt pocs resultats coneguts en aquesta direcció en EDP el·líptiques, i la majoria tracten només els casos en què el conjunt singular és molt petit (per exemple, el problema de l'obstacle a \mathbb{R}^2 [46], o les hipersuperfícies que minimitzen l'àrea a \mathbb{R}^8 [58]).

Donat el caràcter general de les demostracions de [28], es poden aplicar aquests resultats fins i tot al *flux de Hele-Shaw* (introduït abans).

COROLLARI 4 ([28]). *Sigui $u(x, t)$ una solució del flux de Hele-Shaw a \mathbb{R}^2 . Aleshores, la frontera lliure és C^∞ gairebé per a tot temps t .*

Cal recordar que, en aquest model, el cas 2D és el més important; és per això que enunciem el teorema a \mathbb{R}^2 . A més, igual que en el problema de Stefan, a l'article [28] s'estableix una nova cota sobre la mida del conjunt singular: per al flux de Hele-Shaw en \mathbb{R}^2 , el conjunt de temps singulars té dimensió de Hausdorff com a màxim $\frac{1}{4}$.

5 El problema de l'obstacle fraccionari

5.1 Estratègies òptimes i finances

Tal com s'ha explicat a la subsecció 1.2, una motivació maca i interessant per a l'estudi de problemes de l'obstacle ve de la teoria de la probabilitat i la matemàtica financera. En particular, apareixen en modelar els preus de les opcions americanes. A continuació ho veurem amb més detall.

Recordem que una opció americana consisteix a donar al propietari la possibilitat de comprar un cert actiu a un preu fixat en qualsevol moment abans de la data de venciment. En el model de Black-Scholes, el preu (logarítmic) d'aquest actiu X_t es modela com un procés de Wiener (o moviment brownià) amb un paràmetre de deriva (*drift*) que recrea el creixement a llarg termini i un paràmetre de variància que coincideix amb la volatilitat de l'actiu. Sota aquesta hipòtesi, tal com hem dit a la subsecció 1.2, el preu racional de l'opció és solució d'un problema de l'obstacle parabòlic com a (2). Tot i així, en finances, les fluctuacions de preus sovint es poden modelar millor amb processos estocàstics X_t més generals: els processos de Lévy (vegeu, per exemple, [18]). Són processos estocàstics amb salts, i van ser introduïts en models de preus d'opcions pel premi Nobel R. C. Merton cap al 1970, vegeu [45].

Sota aquesta hipòtesi més general, el preu racional d'una opció americana encara és solució d'un problema de l'obstacle semblant a (2), però on el laplacià Δ és reemplaçat per un altre operador (de fet, l'anomenat *generador infinitesimal del procés X_t* , que és un operador el·líptic de tipus integrodiferencial). L'exemple més canònic i important de procés de Lévy (a banda del moviment brownià) correspon al cas en el qual la distribució de X_t és rotacio-

nalment simètrica i compleix una propietat de reescalament. En aquest cas, el que obtenim és el problema de l'obstacle per al *laplacà fraccionari*

$$(-\Delta)^s u(x) := c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(x+y)}{|y|^{n+2s}} dy,$$

amb $s \in (0, 1)$.

El problema de l'obstacle per a aquest operador s'anomena usualment el *problema de l'obstacle fraccionari*. Degut a la seva connexió amb la teoria de la probabilitat i la matemàtica financera, durant l'última dècada s'han dedicat esforços considerables a entendre'l millor (en la seva versió estacionària, i també amb la variable en el temps).

5.2 Resultats coneguts

Les principals preguntes en aquest context són:

- Quina és la regularitat òptima de les solucions?
- Es pot demostrar regularitat de les fronteres lliures?

Els primers resultats en aquesta direcció els va obtenir Silvestre a [56] en el cas estacionari, on va demostrar la regularitat quasiòptima de les solucions, $u \in C^{1,s-\varepsilon}$ per a tot $\varepsilon > 0$.⁵ La regularitat òptima va ser establerta més tard per Caffarelli, Salsa i Silvestre [15]:

Les solucions u són $C^{1,s}$.

A més, també van demostrar el següent:

Les fronteres lliures són regulars, fora d'un cert conjunt de punts degenerats.

Més concretament, van demostrar que, si u resol el problema de l'obstacle per al laplacà fraccionari $(-\Delta)^s$ a \mathbb{R}^n , aleshores $u \in C^{1,s}$, i per a cada punt de la frontera lliure x_0 es té la dicotomia següent: o bé la solució u és degenerada a x_0 , o bé la frontera lliure és regular en un entorn de x_0 .

Després dels resultats de [15], se n'han establert molts més per al problema de l'obstacle fraccionari (estacionari): la regularitat C^∞ del conjunt de punts regulars [41, 19, 42, 38], l'estudi dels punts degenerats o singulars [34, 4, 31, 36, 22, 32], el cas d'operadors amb deriva (*drift*) [47, 35, 23] o l'estudi de problemes de l'obstacle per a operadors de Lévy més generals [13, 1].

Més recentment, Fernández-Real i el primer autor han estudiat la regularitat genèrica per a aquest problema [24], i han demostrat que:

Genèricament, els punts degenerats tenen mesura zero dins la frontera lliure.

⁵ Aquí, denotem $C^{1,\alpha}$ amb $\alpha \in (0, 1]$ l'espai de Hölder d'ordre $1 + \alpha$. És l'espai de funcions $w \in C^1$ tals que $|\nabla w(x) - \nabla w(y)| \leq M|x - y|^\alpha$ per a alguna constant M independent de x, y . Noteu que aquests espais compleixen $C^2 \subset C^{1,\alpha} \subset C^1$. Per exemple, la funció $|x|^{1+\alpha}$ és $C^{1,\alpha}$ però no C^2 .

Tot i la gran varietat de resultats per al problema de l'obstacle fraccionari, hi havia una qüestió de la qual sabíem molt menys: què passa en el context evolucionari quan afegim la variable en el temps?

5.3 El cas parabòlic

El primer resultat en aquesta direcció va ser establert per Caffarelli i Figalli a [10], on van demostrar la regularitat òptima de les solucions:

TEOREMA 5 ([10]). *Sigui $u(x, t)$ una solució del problema de l'obstacle fraccionari parabòlic.*

Aleshores, u és $C^{1,s}$ en x .

La qüestió de la regularitat de les fronteres lliures va seguir oberta durant alguns anys. La principal dificultat aquí era que en el context estacionari les demostracions es basen molt fortament en determinades fórmules de monotonia que semblen no existir en el context parabòlic. Per tant, s'havia de desenvolupar un argument completament diferent.

Això va ser dut a terme a [5], on Barrios, Figalli i el primer autor van demostrar el següent:

TEOREMA 6 ([5]). *Sigui $s > \frac{1}{2}$, i sigui $u(x, t)$ una solució del problema de l'obstacle fraccionari parabòlic.*

Aleshores, la frontera lliure és regular, fora d'un cert conjunt de punts degenerats.

Aquest teorema estenia per primera vegada els resultats de [15] al cas parabòlic, i amb una demostració completament diferent.

6 Alguns problemes oberts

Voldríem tancar aquest article amb alguns comentaris finals i una menció a alguns problemes que queden oberts després dels resultats recents presentats en les seccions anteriors.

En primer lloc, és natural preguntar-se si els mètodes de [29] desenvolupats per demostrar el teorema 2 es podrien adaptar per tractar altres problemes de frontera lliure o fluxos geomètrics. Per exemple, és possible millorar les estimacions per al conjunt de temps singulars obtingudes per White [64] per al flux per curvatura mitjana?

D'altra banda, les qüestions de regularitat genèrica són extremament delicades, i moltes romanen obertes. Per exemple, creiem que dos reptes importants en aquest context són els següents: primer, és certa la conjectura de Schaeffer en dimensió arbitrària $n \geq 5$?; segon, és possible demostrar un resultat de regularitat genèrica per al problema de Stefan que millori les estimacions per a solucions arbitràries obtingudes a [29]? Creiem que els mètodes actuals estan lluny de poder contestar les preguntes anteriors, i, per tant, ens queda molt per entendre completament aquests problemes oberts.

Finalment, en el context del problema de l'obstacle fraccionari, fins i tot algunes preguntes ben bàsiques segueixen encara sense resposta. Per exemple, pel que fa al teorema 6 sobre la regularitat de la frontera lliure per al problema de l'obstacle fraccionari parabòlic, és possible demostrar-lo també per als casos $s = \frac{1}{2}$ i $s < \frac{1}{2}$? I què es pot dir del conjunt singular en aquest context?

Els lectors interessats poden trobar més informació sobre aquests temes, així com més detalls i demostracions, als articles [26, 50] i al llibre [25].

Agraïments

Els autors han rebut finançament de l'European Research Council sota els Grant Agreements número 801867 (XR) i número 721675 (JS). També han rebut finançament del Swiss NSF sota el projecte número 178795 (XR) i el projecte Ambizione PZ00P2 180042 (JS). Finalment, els autors també han rebut finançament del projecte MINECO MTM2017-84214-C2-1-P, i de la Fundació BBVA a través dels projectes associats als premis J. L. Rubio de Francia 2017 (XR) i 2019 (JS).

Referències

- [1] ABATANGELO, N.; ROS-OTON, X. «Obstacle problems for integro-differential operators: higher regularity of free boundaries». *Adv. Math.*, 360 (2020), 106931, 61 p.
- [2] ALMGREN, F. J., JR. *Almgren's Big Regularity Paper. Q-valued functions minimizing Dirichlet's integral and the regularity of area-minimizing rectifiable currents up to codimension 2*. River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co., Inc., 2000. (World Scientific Monograph Series in Mathematics; 1) [Amb un prefaci de Jean E. Taylor i Vladimir Scheffer]
- [3] BAIOCCHI, C. «Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media». A: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Vancouver, 1974, Section 13, 237-245. L'original es pot trobar a <https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1974.2/ICM1974.2.ocr.pdf>.
- [4] BARRIOS, B.; FIGALLI, A.; ROS-OTON, X. «Global regularity for the free boundary in the obstacle problem for the fractional Laplacian». *Amer. J. Math.*, 140 (2) (2018), 415-447.
- [5] BARRIOS, B.; FIGALLI, A.; ROS-OTON, X. «Free boundary regularity in the parabolic fractional obstacle problem». *Comm. Pure Appl. Math.*, 71 (10) (2018), 2129-2159.
- [6] BLANCHET, A. «On the singular set of the parabolic obstacle problem». *J. Differential Equations*, 231 (2) (2006), 656-672.
- [7] CAFFARELLI, L. A. «The regularity of free boundaries in higher dimensions». *Acta Math.*, 139 (3-4) (1977), 155-184.

- [8] CAFFARELLI, L. A. «Compactness methods in free boundary problems». *Comm. Partial Differential Equations*, 5 (4) (1980), 427–448.
- [9] CAFFARELLI, L. A. «The obstacle problem revisited». *J. Fourier Anal. Appl.*, 4 (4-5) (1998), 383–402.
- [10] CAFFARELLI, L.; FIGALLI, A. «Regularity of solutions to the parabolic fractional obstacle problem». *J. Reine Angew. Math.*, 680 (2013), 191–233.
- [11] CAFFARELLI, L.; KOHN, R.; NIRENBERG, L. «Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations». *Comm. Pure Appl. Math.*, 35 (6) (1982), 771–831.
- [12] CAFFARELLI, L. A.; RIVIÈRE, N. M. «Asymptotic behaviour of free boundaries at their singular points». *Ann. of Math. (2)*, 106 (2) (1977), 309–317.
- [13] CAFFARELLI, L.; ROS-OTON, X.; SERRA, J. «Obstacle problems for integro-differential operators: regularity of solutions and free boundaries». *Invent. Math.*, 208 (3) (2017), 1155–1211.
- [14] CAFFARELLI, L.; SALSA, S. *A Geometric Approach to Free Boundary Problems*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2005. (Graduate Studies in Mathematics; 68)
- [15] CAFFARELLI, L. A.; SALSA, S.; SILVESTRE, L. «Regularity estimates for the solution and the free boundary of the obstacle problem for the fractional Laplacian». *Invent. Math.*, 171 (2) (2008), 425–461.
- [16] CARRILLO, J. A.; DELGADINO, M. G.; MELLET, A. «Regularity of local minimizers of the interaction energy via obstacle problems». *Comm. Math. Phys.*, 343 (3) (2016), 747–781.
- [17] COLOMBO, M.; SPOLAOR, L.; VELICHKOV, B. «A logarithmic epiperimetric inequality for the obstacle problem». *Geom. Funct. Anal.*, 28 (4) (2018), 1029–1061.
- [18] CONT, R.; TANKOV, P. *Financial Modelling with Jump Processes*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2004. (Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series)
- [19] DE SILVA, D.; SAVIN, O. «Boundary Harnack estimates in slit domains and applications to thin free boundary problems». *Rev. Mat. Iberoam.*, 32 (3) (2016), 891–912.
- [20] DUVAUT, G. «Résolution d'un problème de Stefan (fusion d'un bloc de glace à zéro degré)». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 276 (1973), A1461–A1463.
- [21] DUVAUT, G.; LIONS, J.-L. *Inequalities in Mechanics and Physics*. Berlín; Nova York: Springer-Verlag, 1976. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 219) [Traduït del francès per C. W. John]
- [22] FERNÁNDEZ-REAL, X.; JHAVERI, Y. «On the singular set in the thin obstacle problem: higher order blow-ups and the very thin obstacle problem». *Anal. PDE*. [En premsa]
- [23] FERNÁNDEZ-REAL, X.; ROS-OTON, X. «The obstacle problem for the fractional Laplacian with critical drift». *Math. Ann.*, 371 (3–4) (2018), 1683–1735.

- [24] FERNÁNDEZ-REAL, X.; ROS-OTON, X. «Free boundary regularity for almost every solution to the Signorini problem». Preprint, 2019. arXiv:1912.02438.
- [25] FERNÁNDEZ-REAL, X.; ROS-OTON, X. *Regularity Theory for Elliptic PDE*. Llibre en preparació, 2020. [Versió preliminar disponible a la pàgina web dels autors: <https://www.ub.edu/pde/xros/Llibre-ellipticPDE.pdf>]
- [26] FIGALLI, A. «Free boundary regularity in obstacle problems». *Journées EDP* (2018), 1–24.
- [27] FIGALLI, A. «Regularity of interfaces in phase transitions via obstacle problems—Fields Medal lecture». A: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018*. Vol. I. *Plenary lectures*. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2018, 225–247.
- [28] FIGALLI, A.; ROS-OTON, X.; SERRA, J. «Generic regularity of free boundaries for the obstacle problem». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2020). <https://doi.org/10.1007/s10240-020-00119-9>.
- [29] FIGALLI, A.; ROS-OTON, X.; SERRA, J. «The singular set in the Stefan problem». Preprint, 2020.
- [30] FIGALLI, A.; SERRA, J. «On the fine structure of the free boundary for the classical obstacle problem». *Invent. Math.*, 215 (1) (2019), 311–366.
- [31] FOCARDI, M.; SPADARO, E. «On the measure and the structure of the free boundary of the lower dimensional obstacle problem». *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 230 (1) (2018), 125–184.
- [32] FOCARDI, M.; SPADARO, E. «The local structure of the free boundary in the fractional obstacle problem». Preprint, 2019. arXiv:1903.05909.
- [33] FRIEDMAN, A. *Variational Principles and Free-Boundary Problems*. A Wiley-Interscience Publication. Nova York: John Wiley & Sons, Inc., 1982. (Pure and Applied Mathematics)
- [34] GAROFALO, N.; PETROSYAN, A. «Some new monotonicity formulas and the singular set in the lower dimensional obstacle problem». *Invent. Math.*, 177 (2) (2009), 415–461.
- [35] GAROFALO, N.; PETROSYAN, A.; POP, C. A.; SMIT VEGA GARCIA, M. «Regularity of the free boundary for the obstacle problem for the fractional Laplacian with drift». *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 34 (3) (2017), 533–570.
- [36] GAROFALO, N.; ROS-OTON, X. «Structure and regularity of the singular set in the obstacle problem for the fractional Laplacian». *Rev. Mat. Iberoam.*, 35 (5) (2019), 1309–1365.
- [37] GIUSTI, E.: *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*. Basilea: Birkhäuser Verlag, 1984. (Monographs in Mathematics; 80)
- [38] JHAVERI, Y.; NEUMAYER, R. «Higher regularity of the free boundary in the obstacle problem for the fractional Laplacian». *Adv. Math.*, 311 (2017), 748–795.

- [39] KINDERLEHRER, D.; NIRENBERG, L. «Regularity in free boundary problems». *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 4 (2) (1977), 373-391.
- [40] KINDERLEHRER, D.; STAMPACCHIA, G. *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*. Nova York; Londres: Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 1980. (Pure and Applied Mathematics; 88)
- [41] KOCH, H.; PETROSYAN, A.; SHI, W. «Higher regularity of the free boundary in the elliptic Signorini problem». *Nonlinear Anal.*, 126 (2015), 3-44.
- [42] KOCH, H.; RÜLAND, A.; SHI, W. «Higher regularity for the fractional thin obstacle problem». *New York J. Math.*, 25 (2019), 745-838.
- [43] LAMÉ, G.; CLAPEYRON, B. P. «Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide». *Ann. Chimie Physique*, 47 (1831), 250-256.
- [44] LINDGREN, E.; MONNEAU, R. «Pointwise regularity of the free boundary for the parabolic obstacle problem». *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 54 (1) (2015), 299-347.
- [45] MERTON, R. C. «Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous». *J. Financ. Econ.*, 5 (1976), 125-144.
- [46] MONNEAU, R. «On the number of singularities for the obstacle problem in two dimensions». *J. Geom. Anal.*, 13 (2) (2003), 359-389.
- [47] PETROSYAN, A.; POP, C. A. «Optimal regularity of solutions to the obstacle problem for the fractional Laplacian with drift». *J. Funct. Anal.*, 268 (2) (2015), 417-472.
- [48] PETROSYAN, A.; SHAHGHOLIAN, H.; URALTSEVA, N. *Regularity of Free Boundaries in Obstacle-Type Problems*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2012. (Graduate Studies in Mathematics; 136)
- [49] RODRIGUES, J.-F. *Obstacle Problems in Mathematical Physics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1987. (North-Holland Mathematics Studies; 134. Notas de Matemática; 114)
- [50] ROS-OTON, X. «Obstacle problems and free boundaries: an overview». *SeMA J.*, 75 (3) (2018), 399-419.
- [51] ROS-OTON, X.; SERRA, J. «Understanding singularities in free boundary problems». *Mat. Cult. Soc. Riv. Unione Mat. Ital. (I)*, 4 (2) (2019), 107-118.
- [52] SAKAI, M. «Regularity of a boundary having a Schwarz function». *Acta Math.*, 166 (3-4) (1991), 263-297.
- [53] SAKAI, M. «Regularity of free boundaries in two dimensions». *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 20 (3) (1993), 323-339.
- [54] SCHAEFFER, D. G. «An example of generic regularity for a non-linear elliptic equation». *Arch. Rational Mech. Anal.*, 57 (1975), 134-141.
- [55] SERFATY, S. *Coulomb Gases and Ginzburg-Landau Vortices*. Zurich: European Mathematical Society (EMS), 2015. (Zurich Lectures in Advanced Mathematics)

- [56] SILVESTRE, L. «Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator». *Comm. Pure Appl. Math.*, 60 (1) (2007), 67-112.
- [57] SIMONS, J. «Minimal varieties in riemannian manifolds». *Ann. of Math. (2)*, 88 (1968), 62-105.
- [58] SMALE, N. «Generic regularity of homologically area minimizing hypersurfaces in eight-dimensional manifolds». *Comm. Anal. Geom.*, 1 (2) (1993), 217-228.
- [59] STEFAN, J. «Ueber einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung», *Sitzungsberichte der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, 98 (1889), 473-484.
- [60] STEFAN, J. «Ueber die Theorie der Eisbildung, insbesondere ueber die Eisbildung im Polarmeere», *Ann. Physik Chemie*, 42 (1891), 269-286.
- [61] TAO, T. «Perelman's proof of the Poincaré conjecture: a nonlinear PDE perspective». Preprint, 2006. arXiv:math/0610903.
- [62] WEISS, G. S. «A homogeneity improvement approach to the obstacle problem». *Invent. Math.*, 138 (1) (1999), 23-50.
- [63] WEISS, G. S. «Self-similar blow-up and Hausdorff dimension estimates for a class of parabolic free boundary problems». *SIAM J. Math. Anal.*, 30 (3) (1999), 623-644.
- [64] WHITE, B. «The size of the singular set in mean curvature flow of mean-convex sets». *J. Amer. Math. Soc.*, 13 (3) (2000), 665-695.

XAVIER ROS-OTON
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT ZÜRICH
8057 ZÜRICH, SWITZERLAND
INSTITUCIÓ CATALANA DE RECERCA I ESTUDIS AVANÇATS (ICREA)
08010 BARCELONA, SPAIN
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES I INFORMÀTICA
UNIVERSITAT DE BARCELONA
08007 BARCELONA, SPAIN
xavier.ros-oton@math.uzh.ch

JOAQUIM SERRA
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
ETH ZÜRICH
8092 ZÜRICH, SWITZERLAND
joaquim.serra@math.ethz.ch