

## FACULTAT DE QUÍMICA DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES

La següent llista avarca tot un seguit de models de problemes que van des de operacions algebràiques senzilles, fins a problemes d'integració més complicats. Hem preferit proposar-vos problemes concrets que siguin representatius dels diversos temes, en lloc de preguntes genèriques, ja que creiem que així us seran més fàcils de valorar.

### I - Operacions

#### Operacions algebràiques:

- 1 Sense utilitzar calculadora, calculeu  $352 \cdot 10^{-3} + 0.021 \cdot 10^2$ .
- 2 Escriure el polinomi  $x^2 - 6x + 3$  en la forma  $(x - a)^2 + b$ .
- 3 Descomposar els polinomis  $2x^2 + x - 3$  i  $x^3 + x^2 - 2$  en factors simples.
- 4 Calcular  $\frac{3x + 2}{x + 2} + \frac{3x - 1}{x^2 - 4}$  simplificant el quocient.

#### Equacions i inequacions:

- 1 Resoldre l'equació  $x^6 + 2x^3 - 3 = 0$ .
- 2 Resoldre l'equació  $\sqrt{x + 1} - x + 5 = 0$ .
- 3 Resoldre el sistema  $\left. \begin{array}{l} xy - y = 0 \\ y^2 - x^2 - 5y + 5 = 0 \end{array} \right\}$ .
- 4 Resoldre la inequació  $|2x - 4| < x$ .

### II - Trigonometria i geometria

#### Trigonometria:

- 1 Quants radians són 108 graus? Quants graus són  $2\pi/5$  radians?
- 2 Quina és la longitud d'un arc de circumferència en funció del radi i de l'angle? I l'àrea d'un sector circular?
- 3 Quines són les raons trigonomètriques dels angles múltiples de 30 i 45 graus compresos entre 0 i 360 graus?
- 4 Si dos costats d'un triangle medeixen 3cm i 4cm i formen un angle de  $30^\circ$ , quant medeix l'altre costat i els altres angles? Quina és la seva àrea?

- 5 Quina és l'àrea d'un exàgon regular de costat 6cm?

### Figures geomètriques:

- 1 Escriure l'equació cartesiana de l'esfera de radi 3 centrada en el punt (1,0,-2).
- 2 Quina és la superfície d'una esfera de radi  $r$ ? I el volum d'una bola de radi  $r$ ?
- 3 Quina és la superfície d'un cilindre de radi  $r$  i altura  $h$  (amb les dues bases incloses)? I el volum?
- 4 Parametritzar el punts  $(x, y)$  de la circumferència de radi 3, centrada en el punt (1,-1), utilitzant coordenades polars centrades en el centre de la circumferència.
- 5 Quina figura geomètrica representen els punts  $(x, y)$  del pla que compleixen l'equació  $3x^2 + 4y^2 = 5$ ? I els que compleixen  $y = 1 - 2x^2$ ?
- 6 Quina figura geomètrica representen els punts  $(x, y)$  del pla que compleixen  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 4$ ?

## III - Àlgebra i geometria

Considerem les següents matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ a & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

### Operacions amb matrius:

- 1 Calculeu els productes de matrius  $AB, CA$  i  $CX$ .
- 2 Calculeu els determinants de les matrius  $A$  i  $C$  utilitzant la regla de Sarrus.
- 3 Calcular el rang de les matrius  $B$  i  $C$ .
- 4 Calculeu la inversa de la matriu  $A$ .

### Propietats dels determinants:

- 1 Si  $M$  i  $N$  són dues matrius  $n$  per  $n$ , és cert que  $\det(M + N) = \det(M) + \det(N)$ ? I  $\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$ ?
- 2 Calculeu el determinant de la matriu  $C$  desenvolupant per la segona fila.
- 3 Calcular els determinant de la matriu  $A$  operant amb files i utilitzant pivotatge, si cal, fins arribar a una matriu triangular.

**Resolució de sistemes lineals:**

- 1 Resoleu el sistema lineal  $AX = D$  mitjançant eliminació.
- 2 Resoleu el sistema lineal  $AX = D$  utilitzant la regla de Cramer.
- 3 Discutir el sistema  $CX = D$  en funció del paràmetre  $a$ .

**Productes escalar i vectorial. Ortogonalitat:**

- 1 Quin és el cosinus de l'angle que formen els vectors  $(1,1,-2)$  i  $(1,2,0)$ ?
- 2 Calcular el producte vectorial dels vectors  $(1,1,-2)$  i  $(1,2,0)$ . Quin angle forma el vector resultant amb els dos anteriors?
- 3 Trobeu una base ortonormal de  $\mathbf{R}^3$  que contingui el vector  $(3/5, 0, -4/5)$ .

**Rectes i plans:**

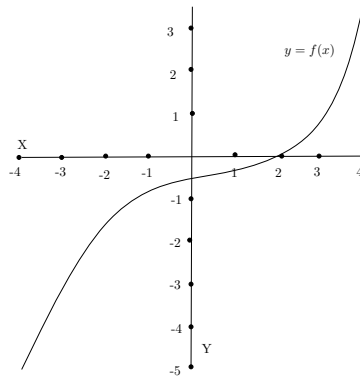
- 1 Escriure les equacions paramètrica i cartesiana de la recta que passa pels punts  $(1,0,-1)$  i  $(1,-1,2)$ .
- 2 Escriure les equacions paramètrica i cartesiana del pla que passa pels punts  $(1,1,0)$ ,  $(1,0,-1)$  i  $(2,-1,2)$ .
- 3 Per a quin valor d' $a$  els plans  $x + ay - z = 1$  i  $2x + 4y - 2z = 3$  són perpendiculars? Per a quin valor d' $a$  són paral·lels?
- 4 Quina és l'equació de la recta que passa pel punt  $(1, 1, 0)$  i és perpendicular al pla  $x + y = 1$ ?

**IV - Anàlisi****Funcions bàsiques (exp, log, sin , cos,...)**

- 1 Representar gràficament les funcions  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\tan(x)$ ,  $\ln(x)$  i  $e^x$ .
- 2 Dibuixar la gràfica de les funcions  $a^x$  i  $\log_a x$  per a  $0 < a < 1$  i per a  $a > 1$ .
- 3 Resoleu les equacions  $\sin(x) = 1/2$ ,  $e^{-x} = 3$  i  $\log_4(x) = -1$ .
- 4 Utilitzant calculadora, trobar el valor aproximat de  $\log_7 3$ .
- 5 Resoleu les equacions  $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$  i  $2 \ln(x + 2) - \ln(8x) = 0$ .
- 6 Resoleu l'equació  $\cos(x) - \sin(2x) = 0$ .

**Domini i gràfiques de funcions reals:**

- 1 Quins són els domini de les funcions  $\sqrt{x/(x+1)}$  i  $\ln(x^2 - 3x + 2)$ ?
- 2 A partir de les representacions gràfiques de les funcions  $x$  i  $\cos(x)$ , veure que  $x - \cos(x) = 0$  té una única solució real.
- 3 A partir de la següent representació gràfica de la funció  $f(x)$ ,



dibuixeu la gràfica de la funció  $-f(x - 2) + 4$ .

- 4 És invertible la funció  $f(x)$  de la qüestió anterior? En cas afirmatiu dibuixeu la gràfica de la funció inversa.

**Límits i continuïtat:**

- 1 Quines són les definicions de límit i de continuïtat d'una funció  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  en un punt  $c \in (a, b)$ ?
- 2 En quins punts és contínua la funció  $y = \text{part entera de } 2x$ ?
- 3 Calculeu  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} \right)^{x^2}$  i  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ .
- 4 Utilitzant el teorema de Bolzano, proveu que l'equació  $x - \cos(x) = 0$  té almenys una solució real situada entre 0 i 1.

**Derivades:**

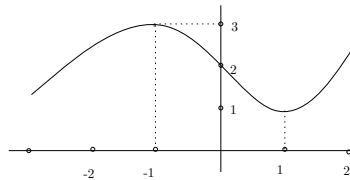
- 1 Escriure la definició de derivada d'una funció  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  en un punt  $c \in (a, b)$ .
- 2 Quina és l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció  $y = x^3 - 4x$  en el punt  $(1, -3)$ ? I en el punt  $(a, a^3 - 4a)$ ?
- 3 Derivar les funcions  $x^2 \sin(x)$ ,  $\ln(x^2 + 3)$  i  $e^x/(3x^2 + 2)$ .

- 4 Si  $y = y(x)$  és una funció derivable tal que  $y(1) = 2$  i  $y'(1) = -1$ , quin és el valor de la funció  $z = x^2y^3$  en el punt 1? I el de  $z'(1)$ ?
- 5 Calcular el següents límits utilitzant la regla de l'Hôpital:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin(x)}$  i  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$ .

### Representació gràfica de funcions:

En aquests problemes es tracta de fer una taula de punts, estudiar els intervals de creixement i de convexitat, els extrems locals i els punts d'inflexió, i les asímptotes, per a finalment dibuixar la gràfica de la funció de tal forma que quedin clars aquests resultats.

- 1 Representar gràficament la funció  $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 11$ .
- 2 Representar gràficament  $y = \frac{x^2}{x+3}$ .
- 3 Representar gràficament la funció  $x/(x^2 + 1)$  (adonant se'n de l'antisimetria de la funció).
- 4 Representar gràficament la funció  $y = xe^x$ .
- 5 Donada la següent gràfica de la funció  $f$ , marqueu sobre l'eix  $X$  els punts on les dues primeres derivades de la funció són negatives.



### Càlcul de primitives immediates:

- 1 Quines són les primitives de les funcions  $y = x^3 + x - 2$ ,  $y = e^x$  i  $y = \cos(x)$ .
- 2 Quines són les primitives de les funcions  $\sin(2x)$ ,  $1/e^x$ ,  $(\ln x)^2/x$  i  $\tan(2x)$ ?
- 3 Quines són les primitives de les funcions  $(3x + 1)^2$  i  $1/(2x - 1)^3$ ?

### Càlcul de primitives no immediates:

- 1 Quines són les primitives de les funcions racionals  $x^2/(x^2 - 1)$ ,  $(x + 1)/(x^3 + 2x)$ ?
- 2 Calcular les primitives de les funcions  $x^2e^x$ ,  $\ln(x)$  i  $e^x \sin(x)$ .
- 3 Utilitzeu el canvi  $x = \sin(t)$  per trobar primitives de  $\sqrt{1 - x^2}$ .
- 4 Trobar canvis adequats per trobar primitives de  $y = 1/(e^x + 1)$  i de  $y = \sqrt{4 - x^2}$ .

**Càlcul d'àrees planes, i de superfícies i volums de revolució:**

- 1 Quina és l'àrea compresa entre les gràfiques de les funcions  $y = 3x^2 - x^3$  i  $y = 2x$ ?
- 2 Quina és la longitud del tros de gràfica de la funció  $y = \ln(x)$  comprès entre  $x = 1$  i  $x = 4$ ?
- 3 Quin és el volum del cos de revolució generat per l'àrea compresa entre l'eix X, les rectes  $x = 0$  i  $x = 2$  i la gràfica de la funció  $y = \sqrt{x}$ , al girar al voltant de l'eix X?
- 4 Quina és l'àrea de la superfície de revolució generada pel tros de gràfica de la funció  $y = 3x + 2$  comprès entre  $x = 0$  i  $x = 2$ , al girar al voltant de l'eix X?

**V - Probabilitat****Tècniques per comptar:**

- 1 Quin és el coeficient de  $a^3b^4$  en el desenvolupament de  $(a + b)^7$ ?
- 2 Quantes paraules diferents de 8 lletres es poden formar utilitzant sempre 3 A's i 5 B's?

**Probabilitat:**

- 1 El conjunt  $A$  està format pels nombres enters de l'1 al 20, el conjunt  $B$  pels nombres senars i el  $C$  pels múltiples de 3. Quina és la probabilitat que al triar un nombre a l'atzar del conjunt  $A$  estigui en  $B \cup C$ ? I en  $B \cap C$ ?
- 2 En una empresa de 800 treballadors el 20% són oficinistes i el 80% operaris. Un 40% del oficinistes fuma i dels operaris ho fa un 30%. Quants operaris fumen?
- 3 Si en l'empresa anterior, triem una persona a l'atzar i és fumadora, quina és la probabilitat que sigui oficinista?
- 4 Si en una població de 10000 habitants el 55% dels residents són dones, quina és la probabilitat que en una mostra de 10 habitants, triats a l'atzar, hi hagi 6 dones?