Examen de Matemàtiques 29-Gener-2003

Heu de triar 5 problemes dels 6 proposats i justificar les vostres respostes.

1. Donada la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

   (a) Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció. Trobeu també els seus extrems.

   (b) Estudieu si existeix algun valor c amb $0 < c < 2$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2} = \frac{-1}{2}$$

2. En una població el nombre inicial d'individus és 500. A cada generació, el nombre d'individus és igual al nombre d'individus de la generació anterior, més els que neixen, menys els que moren. Sabent que neixen el doble dels que hi havia a la generació anterior i que moren 10 individus, determineu:

   (a) Quants individus hi haurà a la generació 20?

   (b) Quin és el nombre mínim necessari d'individus per a que no s'extingeixi la població?

   (c) Què passarà per a temps suficientment gran?

   (d) Busqueu els punts d'equilibri d'aquest model.

3. La següent equació diferencial es fa servir en un model de població on N és el nombre d'individus i t el temps,

$$\frac{dN}{dt} = -N^3 + 5N^2 - 6N$$

   Resoleu l'equació diferencial donada pel model i intenteu simplificar, en la mesura que sigui possible, l'expressió de la solució.

4. Donada l'equació diferencial del problema 3, trobeu els punts d'equilibri del model i estudieu la seva estabilitat. Feu la gràfica de la funció derivada $N'(t)$, com a funció de $N(t)$, i discutiu l'evolució de la població si, en un determinat instant t, ens trobem en : a) $N(t) = 1.5$, b) $N(t) = 2.5$, c) $N(t) = 4$.

5. Calculeu la següent integral:

$$\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin(2x)\, dx$$

6. Donada la funció $f(x) = e^x$

   (a) Trobeu el polinomi de Taylor de grau n, centrat o desenvolupat en $a = 0$, d'aquesta funció.

   (b) Calculeu $e^{-1/5}$ amb un error més petit que 10^{-6}, acotant el reste del polinomi de Taylor, i digueu el grau del polinomi usat.

Examen de Matemàtiques 04-Juliol-2003

Heu de triar 5 problemes dels 6 proposats i justificar les vostres respostes.

1. Una malaltia tropical molt estranya dóna febre i, en cas de no ser tractada, la mort instantània passades $t = 6$ hores. La febre segueix el següent model:

$$f(t) = \begin{cases} 38 + \dfrac{1}{t^2+1} & \text{si} \quad 0 \le t \le 3 \\ 38.1 + (t-3)^3 & \text{si} \quad 3 < t \le 6 \end{cases}$$

   (a) És f contínua i derivable?
   (b) S'assoleix en algun moment una temperatura màxima o mínima? Quina o quines?
   (c) Interpreteu el comportament de la temperatura.

2. En dinàmica de poblacions, un model usat freqüentment per a poblacions de peixos és l'equació de Ricker, basat en la següent equació empírica:

$$X_{n+1} = \alpha X_n e^{-\beta X_n} \qquad \alpha, \beta > 0$$

   En aquesta equació α representa l'índex de creixement màxim de l'organisme i β la inhibició del creixement causada per la superpoblació.

   (a) Demostreu que podem expressar: $X_n = \alpha^n X_0 e^{-\beta \sum_{i=0}^{n-1} X_i}, \qquad \forall n \ge 1$
   (b) Trobeu els punts d'equilibri del model.

3. El creixement d'una població de Drosophila segueix el model

$$y'(t) = r y(t) \left(1 - \frac{1}{346} y(t)\right)$$

   Suposant que el temps està en dies, que inicialment hi ha 25 individus i que passats 12 dies n'hi ha 150, determineu:

   (a) La solució de l'equació anterior.
   (b) El valor de r.
   (c) El nombre d'individus passats 50 dies.
   (d) Què passa amb la població passat un temps suficientment gran?
   (e) En quin instant s'assolirà una població de 173 individus?.

4. Donada l'equació diferencial del problema 3, trobeu els punts d'equilibri del model i estudieu la seva estabilitat.

5. Calculeu la següent integral:

$$\int_0^{+\infty} x\, e^{-|x-3|}\, dx$$

6. Donada la funció $f(x) = \sqrt{1+x}$

   (a) Trobeu el polinomi de Taylor de grau n, centrat o desenvolupat en $a = 0$, d'aquesta funció.
   (b) Calculeu $\sqrt{1.5}$ amb un error més petit que 10^{-4}, acotant el reste del polinomi de Taylor, i digueu el grau del polinomi usat.