Solucions de l'examen de Matemàtiques 30-Juny-2005

1. Donada la funció

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{1+2^{\frac{1}{x}}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   (a) Estudieu el domini, la continuïtat i la derivabilitat de $f(x)$.

   (b) Calculeu els seus extrems absoluts, en el cas que en tingui.

Solució:

(a) Expressarem, primerament, aquesta funció sense valors absoluts, ja que això ens simplificarà els càlculs.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{1+2^{\frac{1}{x}}} & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

El domini d'aquesta funció és clarament el conjunt de tots els nombres reals, doncs en el punt $x = 0$ que és on podria presentar problemes de definició es dóna un valor concret $f(0) = 0$. Per tant el domini de f és: Dom $f = \mathbb{R}$.

Per estudiar la continuïtat cal que tinguem en compte que $f(x)$ és una funció contínua per a $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, en ser quocient de funcions clarament contínues, caldrà doncs estudiar la continuïtat en el punt $x = 0$, comprovant si els límits laterals són iguals i iguals al valor de la funció en aquest punt.

Considerem primer el límit per la esquerra

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1+2^{-\infty}} = \frac{0}{1} = 0$$

D'altra banda el límit per la dreta és

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1+2^{+\infty}} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

i resulta que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

per tant, la funció és contínua en el punt $x = 0$ i, en resum, podem dir que la funció f és contínua en tot el seu domini, és a dir, f contínua en $\mathbb{R}$.

Respecte la derivabilitat, f és una funció derivable per a $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, doncs és quocient de funcions derivables. Falta ara estudiar la derivabilitat de f en $x = 0$. Per a fer-ho, usem la definició de derivada de f en $x = 0$.

Mirem primer la derivada per l'esquerra

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{-h}{1+2^{\frac{1}{h}}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h(1+2^{\frac{1}{h}})} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1}{1+2^{\frac{1}{h}}} = \frac{-1}{1+2^{-\infty}} = -1$$

Mirem ara la derivada per la dreta

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h}{1+2^{\frac{1}{h}}}-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h(1+2^{\frac{1}{h}})} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{1+2^{+\infty}} = 0$$

Aleshores com $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ podem concloure que f no és derivable en $x=0$. El domini de f' o conjunt de punts on f és derivable serà doncs: Dom $f' = \mathbb{R} - \{0\}$.

(b) Per estudiar els seus extrems absoluts cal tenir en compte primerament que $f(x) \geq 0$, per tant, si en algun punt s'assoleix el valor zero, aquest serà el mínim absolut. Com l'únic punt on la funció val zero és en $x=0$, podem assegurar que $(0,0)$ és un mínim absolut de f.

Mirarem ara el comportament de la funció quan $x \to \infty$ i quan $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{+\infty}{1+2^0} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{+\infty}{1+2^0} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

Aleshores, com f tendeix cap a $+\infty$, podem assegurar que no té cap màxim absolut.

2. Calculeu

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} \qquad\qquad \text{(b)} \int_0^2 |x-1|e^{|x-1|}\,dx$$

Solució:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} = \frac{\ln(\cos(0))}{\ln(\cos(0))} = \frac{\ln(1)}{\ln(1)} = \frac{0}{0}\ (\mathit{Ind.})$$

Apliquem la regla de l'Hôpital i tenim

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(3x)}(-\sin(3x))3}{\frac{1}{\cos(2x)}(-\sin(2x))2} = \lim_{x\to 0} \frac{3\tan(3x)}{2\tan(2x)} = \frac{0}{0}\ (\mathit{Ind.})$$

Tornem a aplicar la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{9}{\cos^2(3x)}}{\frac{4}{\cos^2(2x)}} = \frac{\frac{9}{\cos^2(0)}}{\frac{4}{\cos^2(0)}} = \frac{9}{4}$$

També podíem fer servir els infinitèssims equivalents $\tan(3x) \approx 3x$ i $\tan(2x) \approx 2x$.

$$\text{(b)} \int_0^2 |x-1|e^{|x-1|}\,dx = \int_0^1 (-x+1)e^{(-x+1)}\,dx + \int_1^2 (x-1)e^{(x-1)}\,dx$$

donat que el valor absolut que hi ha a la integral es descompon

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -x+1 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

Aleshores anomenarem

$$I_1 = \int_0^1 (-x+1)e^{-x+1}\,dx \qquad I_2 = \int_1^2 (x-1)e^{x-1}\,dx$$

Resoldrem primer la integral I_1 per parts

$$\begin{array}{ll} u = -x+1 & du = -\,dx \\ dv = e^{-x+1}\,dx & v = -e^{-x+1} \end{array}$$

de manera que

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[(-x+1)(-e^{-x+1})\right]_0^1 - \int_0^1 e^{-x+1}\,dx \\ &= \Big((-1+1)(-e^{-1+1}) - (0+1)(-e^{0+1})\Big) - \left[-e^{-x+1}\right]_0^1 \\ &= e + e^0 - e = 1 \end{aligned}$$

Resoldrem ara la integral I_2 també per parts

$$\begin{array}{ll} u = x-1 & du = dx \\ dv = e^{x-1}\,dx & v = e^{x-1} \end{array}$$

de manera que

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[(x-1)(e^{x-1})\right]_1^2 - \int_1^2 e^{x-1}\,dx \\ &= \Big((2-1)(e^{2-1}) - (1-1)(e^{1-1})\Big) - \left[e^{x-1}\right]_1^2 \\ &= e - e + e^0 = 1 \end{aligned}$$

Així doncs tindrem que el valor de la integral inicial és

$$\int_0^2 |x-1|e^{|x-1|}\,dx = I_1 + I_2 = 2$$

3. En un parc natural es pretén potenciar el creixement de la població de linxs. Inicialment tenim 14 linxs, la taxa de naixements anual és α i la taxa de mortalitat anual és β. Si, a més, afegim C linxs cada any, i tenint en compte que $\alpha, \beta, C > 0$:

   (a) Formuleu l'equació en diferències que descriu l'evolució del nombre d'individus d'un any al següent i trobeu l'expressió general del nombre de linxs en funció dels anys transcorreguts des de l'inici.

   (b) Discutiu en funció dels valors de α, β, C, quines han de ser les condicions per a que la població de linxs no s'extingeixi.

   (c) Si $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.04$ i $C = 10$, quants linxs hi haurà passats 20 anys?

   Solució:

   (a) Per expressar l'equació en diferències que descriu l'evolució del nombre de linxs cal tenir en compte que en un any n el nombre d'individus serà: els que ja teníem l'any anterior, més els naixements, menys els morts i més els que afegim. Ens quedarà per tant

$$x_n = x_{n-1} + \alpha x_{n-1} - \beta x_{n-1} + C = (1+\alpha-\beta)x_{n-1} + C$$

on $\alpha > 0$, $\beta > 0$ i $C > 0$.

Inicialment sabem que tenim 14 linxs, $x_0 = 14$

L'equació és una equació en diferències lineal no homogènia de primer ordre i sabem que la seva solució ve donada per:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1+\alpha-\beta)x_0 + C \\
x_2 &= (1+\alpha-\beta)x_1 + C = (1+\alpha-\beta)((1+\alpha-\beta)x_0 + C) + C \\
&= (1+\alpha-\beta)^2 x_0 + (1+\alpha-\beta)C + C \\
x_3 &= (1+\alpha-\beta)^3 x_0 + (1+\alpha-\beta)^2 C + (1+\alpha-\beta)C + C \\
&\vdots \\
x_n &= (1+\alpha-\beta)^n x_0 + C\sum_{i=0}^{n-1}(1+\alpha-\beta)^i
\end{aligned}$$

Donat que en la darrera igualtat apareix una suma parcial geomètrica de raó $1+\alpha-\beta$, també ho podrem expressar d'una altra manera, diferenciant dos casos:

(i) Si $1+\alpha-\beta = 1$, és a dir, si $\alpha - \beta = 0$

$$x_n = x_0 + nC$$

(ii) Si $1+\alpha-\beta \neq 1$, ó dit d'una altra manera, si $\alpha - \beta \neq 0$

$$x_n = (1+\alpha-\beta)^n x_0 + C\left[\frac{1-(1+\alpha-\beta)^n}{1-(1+\alpha-\beta)}\right]$$

(b) Per a que la població no s'extingeixi cal que per a tot n, $x_n > 0$.

És evident que en el cas (i) tenim $x_n > 0$, $\forall n$ i a més $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, per tant la població no s'extingirà mai.

En al cas (ii) la discussió de quan $x_n > 0$ dependrà del valor de $1+\alpha-\beta$ i les seves potències. Veiem els diferents casos amb detall:

(ii)$_1$ Quan $1+\alpha-\beta \geq 0$, és evident que la relació de recurrència implica que $x_n > 0$.

(ii)$_2$ Si $-1 < 1+\alpha-\beta < 0$, es té que $\lim_{\to\infty}(1+\alpha-\beta)^n = 0$, la població no s'extingirà i tendirà a una grandària $\lim_{n\to\infty} x_n = C/(\beta-\alpha)$.

(ii)$_3$ Si $1+\alpha-\beta = -1$, observem que com $x_1 = -x_0 + C$; $x_2 = x_0$ aleshores, de forma recurrent es dedueix que $x_{2k+1} = -x_0 + C$; $x_{2k} = x_0$, $\forall\, k \geq 0$, i la població no s'extingirà si $C > x_0 = 14$, en qualsevol altre cas, si s'extingirà.

(ii)$_4$ Si $1+\alpha-\beta < -1$, la successió $(1+\alpha-\beta)^n$ tendeix a $-\infty$ quan $n = 2k+1$, $k \geq 0$ i a $+\infty$ quan $n = 2k$, $k \geq 0$, per tant hi haurà algun moment en que la població s'extingeixi, sinó x_n arribaria a prendre valors negatius.

Observem que en el cas (ii) també podem expressar x_n com

$$x_n = (1+\alpha-\beta)^n\left[x_0 - \frac{C}{1-(1+\alpha-\beta)}\right] + \frac{C}{1-(1+\alpha-\beta)}$$

aleshores si $x_0 = \frac{C}{1-(1+\alpha-\beta)} = C/(\beta-\alpha)$, per a qualsevol valor de $1+\alpha-\beta$ sempre que $\beta > \alpha$ $(1+\alpha-\beta < 1)$, la població es mantindrà constant i igual a $x_n = C/(\beta-\alpha)$. En aquest cas tampoc s'extingiria.

(c) Passats 20 anys tindrem

$$\begin{aligned} x_{20} &= (1+\alpha-\beta)^{20}x_0 + C\left[\frac{1-(1+\alpha-\beta)^{20}}{\beta-\alpha}\right] \\ &= (1+0.05-0.04)^{20}\cdot 14 + 10\cdot\frac{1-(1+0.05-0.04)^{20}}{0.04-0.05} \\ &= 1.01^{20}\cdot 14 + 10\cdot\frac{1-(1.01)^{20}}{-0.01} \approx 237 \end{aligned}$$

És a dir, aproximadament 237 linxs.

4. Mitjançant un sistema de refrigeració, una habitació es manté a una temperatura de 10^oC. Un objecte metàl·lic situat en aquesta habitació està a 100^oC en un instant donat. Passada una hora, aquest objecte es troba a 70^oC. A quina hora estarà l'objecte a una temperatura de 30^oC? Passat un temps suficientment gran, a quina temperatura estarà l'objete analitzat? Suposem que la velocitat de refredament és directament proporcional a la diferència de temperatures entre l'objecte i l'ambient.

Solució:

Sigui $y(t)$ la temperatura de l'objecte, en ^oC, a l'instant t, on el temps t el mesurarem en hores, i considerarem temps $t=0$ el moment en el qual el cos està a 100^oC.

L'equació diferencial que descriu la taxa de canvi de la temperatura d'aquest objecte respecte al temps, és

$$\frac{dy}{dt} = \alpha\,(y-T)$$

on T és la temperatura de l'ambient, que en el nostre cas es manté constant a 10^oC. Llavors tindrem

$$\frac{dy}{y-10} = \alpha\,dt; \qquad \int\frac{dy}{y-10} = \int\alpha\,dt$$

$$\ln|y-10| = \alpha\,t + C; \qquad y-10 = K\,e^{\alpha\,t}$$

si suposem que inicialmente $(t=0)$ l'objecte està a 100^oC obtenim

$$100-10 = K\,e^{\alpha\,0} \Longrightarrow K = 90$$

i podem expressar la temperatura en funció del temps de la forma:

$$y(t) = 10 + 90\,e^{\alpha\,t}$$

Considerant que l'objecte es refreda fins a 70^oC en 1 hora. Llavors podrem determinar el valor de la constant α, i.e.:

$$\frac{70-10}{90} = e^{\alpha\,1} \Longrightarrow \alpha = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0.405465$$

per tant

$$y = 10 + 90\,e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)\,t}$$

i quan arribi a $30^{\text{o}}C$ el temps transcorregut s'obtindrà:

$$30 = 10 + 90\, e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)\, t} \Longrightarrow \frac{2}{9} = e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)\, t}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{2}{9}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 3.709511$$

És a dir, hauran passat 3.709511 hores aproximadament, o en hores, minuts i segons, 3 hores 42 minuts 34 segons, aproximadament.

Quan el temps tendeix a infinit, donat que $\alpha = \ln(\frac{2}{3}) < 0$ resulta:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \left(10 + 90\, e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)\, t}\right) = 10 + 90 \lim_{t\to\infty} e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)\, t} = 10 + 0 = 10$$

5. Donada la funció $f(x) = \ln(1 + x^3)$ determineu el valor de $f(\frac{1}{2})$ amb un error inferior a 10^{-4}. Justifiqueu la vostra resposta.

   Nota: Useu el desenvolupament de Taylor de la funció logaritme. No es consideraran correctes les respostes donades usant la funció logaritme de la calculadora.

   Solució:

   (a) Per simplificar els càlculs considerarem el polinomi de Taylor de grau n de la funció $g(x) = \ln(1 + x)$ desenvolupat o centrat en $a = 0$, $P_{n,g,0}$ és el polinomi en x que ve definit de la següent manera:

$$P_{n,g,0}(x) = g^{(0)}(0) + \frac{g^{(1)}(0)}{1!}\, x + \frac{g^{(2)}(0)}{2!}\, x^2 + \ldots + \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\, x^{n-1} + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$$

on $g^{(k)}$ és la funció derivada k-èsima de g, i, notarem $g^{(0)} \equiv g$.

Aleshores, en el nostre cas, necessitem avaluar $g(x)$ i les successives derivades fins a ordre n en el punt $a = 0$.

$$\begin{array}{ll}
g^{(0)}(x) = \ln(1+x) & g^{(0)}(0) = 0 \\
g^{(1)}(x) = \frac{1}{x} & g^{(1)}(0) = 1 \\
g^{(2)}(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} & g^{(2)}(0) = -1 \\
g^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} & g^{(3)}(0) = 2 \\
g^{(4)}(x) = \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4} & g^{(4)}(0) = -2\cdot 3 \\
\vdots & \vdots \\
g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} & g^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{array}$$

l'última fila definida per a $n \geq 1$.

Aleshores el Polinomi de Taylor de grau n centrat o desenvolupat en $a = 0$, per a la nostra funció g quedarà

$$\begin{aligned}
P_{n,g,0}(x) &= 0 + x - \frac{x^2}{2} + 2\,\frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{x^n}{n!} \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}
\end{aligned}$$

(b) Volem avaluar $f(1/2) = \ln(1 + (1/2)^3) = \ln(1 + 1/8) = g(1/8)$ amb un error més petit que 10^{-4}

Anomenarem reste de Taylor corresponent al polinomi de Taylor de grau n de la funció g desenvolupat en a i avaluat en x, a la quantitat $R_{n,g,a}(x)$ definida per:

$$R_{n,g,a}(x) = g(x) - P_{n,g,a}(x)$$

Considerarem la fórmula del reste de Lagrange que és:

$$R_{n,g,a}(x) = \frac{g^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$$

on z és un valor que està entre x i a.

Aleshores l'error, en valor absolut, que fem en avaluar el polinomi de Taylor l'acotarem de la següent manera:

$$|\mathrm{Error}(x)| = |R_{n,g,a}(x)| < 10^{-4}$$

en el nostre cas ens queda

$$|R_{n,g,0}(1/8)| = \left|\frac{g^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\,(1/8)^{n+1}\right|$$

amb $z \in [0, 1/8]$. Si tenim en compte que

$$g^{(n+1)}(z) = (-1)^n \frac{n!}{(1+z)^{n+1}}$$

ens quedarà

$$|R_{n,g,0}(1/8)| = \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\frac{n!}{(1+z)^{n+1}}(1/8)^{n+1}\right|$$

Observem que $\dfrac{1}{1+z} \leq \dfrac{1}{1+0} = 1$, i si ho substituïm a l'expressió del reste tindrem una cota superior de l'error. Si aquesta cota superior és menor que 10^{-4}, l'error també ho serà. Per tant

$$|R_{n,g,0}(1/8)| < \left|\frac{(1/8)^{n+1}}{n+1}\right| < 10^{-4}$$

Si donem valors a n obtenim que:

si $n = 2$, $\quad |R_{2,g,0}(1/8)| \leq \dfrac{(1/8)^3}{3} = 0.000651 > 10^{-4}$

si $n = 3$, $\quad |R_{3,g,0}(1/8)| \leq \dfrac{(1/8)^4}{4} = 0.000061 < 10^{-4}$

És a dir, que si usem el Polinomi de Taylor de grau 3 centrat o desenvolupat en $a = 0$ i avaluat en $x = 1/8$, per aproximar $\ln(1 + 1/8)$, estem fent un error més petit que 10^{-4}.

Finalment, calculem aquest valor

$$\begin{aligned} P_{3,g,0}(1/8) &= \frac{1}{8} - \frac{(1/8)^2}{2} + \frac{(1/8)^3}{3} = 0.125 - 0.0078125 + 0.0006510417 \\ &= 0.11783854 \end{aligned}$$

6. Justifiqueu que $\dfrac{d(\sin x)}{dx} = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

   Determineu raonadament que $\dfrac{d^n(\sin x)}{dx^n} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

   Nota: La comprovació es fa per inducció.

   És cert que $\dfrac{d^n(\cos x)}{dx^n} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$?

   Solució:

   Sabem que la derivada
$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$
   però resulta que $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ ja que
$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \\
\sin(x + \pi/2) &= \sin x \cdot \cos(\pi/2) + \cos x \cdot \sin(\pi/2) \\
&= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x
\end{aligned}$$

   També podem fer una demostració gràfica com la que podeu veure en el següent enllaç:

   `http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Bach_CNST_1/Razones_trigonometricas_operaciones_identidades/angcompl.htm#diferencian`

   Per provar que
$$\frac{d^2(\sin x)}{dx^2} = \sin(x + \pi)$$
   utilitzarem la regla de la cadena
$$\frac{d^2(\sin x)}{dx^2} = \frac{d(\sin(x + \pi/2))}{dx} = \sin(x + \pi/2 + \pi/2) \cdot (x + \pi/2)' = \sin(x + \pi) \cdot 1$$

   Finalment, la demostració de la fórmula
$$\frac{d^n(\sin x)}{dx^n} = \sin(x + n\pi/2)$$
   es fa per inducció.

   Per a $n = 1$ ja ho sabem. Si suposem que la fórmula és certa per a n, llavors
$$\begin{aligned}
\frac{d^{(n+1)}(\sin x)}{dx^{n+1}} &= \left(\frac{d^n(\sin x)}{dx^n}\right)' = (\sin(x + n\pi/2))' \\
&= \sin(x + n\pi/2 + \pi/2) \cdot (x + n\pi/2)' = \sin(x + (n+1)\pi/2) \cdot 1
\end{aligned}$$

   De la mateixa forma es pot provar que
$$\frac{d^n(\cos x)}{dx^n} = \cos(x + n\pi/2)$$
   Nota: Recordeu que $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$.