TEMA 9

1. Calculeu el domini de les següents funcions:

$a)\ f(x,y) = \sqrt{x+y}$ $\qquad$ $b)\ f(x,y) = \sqrt{2x-y^2}$

$c)\ f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$ $\qquad$ $d)\ f(x,y) = \ln(x+5y)$

$e)\ f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$ $\qquad$ $f)\ f(x,y) = \ln(x^2-y^2)$

2. Demostreu que el següent límit no existeix.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$$

3. Trobeu les derivades parcials respecte x i respecte y de les següents funcions.

$a) f(x,y) = 2x-3y+5$ $\qquad$ $b) f(x,y) = xy$

$c) f(x,y) = x\sqrt{y}$ $\qquad$ $d) f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

$e) f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$ $\qquad$ $f) f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

4. Identifiqueu quina funció satisfà l'equació d'ones

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c^2\frac{d^2z}{dx^2}$$

quan:

(a) $z(x,t) = \sin(x-ct)$

(b) $z(x,t) = \sin(wct)\sin(wx)$

5. Un laboratori produeix dos tipus de fertilitzants. Sigui C la funció de cost per produir x unitats del fertilitzant del tipus 1 i y unitats del fertilitzant del tipus 2.

$$C(x,y) = 32(xy)^{1/2} + 175x + 205y + 1050$$

Calculeu les variacions del cost respecte x i respecte y per a 80 unitats del fertilitzant del tipus 1 i 20 del tipus 2.

6. Busqueu, per a cada funció, els extrems relatius i els punts sella.

   a) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$

   b) $f(x,y) = \dfrac{3x^2+1}{2} - x(x^2+y^2)$

   c) $f(x,y) = \arctan \dfrac{1}{x^2+y^2}$

   d) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y) \;\; 0 < x < 2\pi \,,\;\; 0 < y < 2\pi$

7. Sigui V la velocitat del vol d'una au en funció del seu pes p i de la seva longitud L:

$$V(p,L) = 8p + 10L - 0.001(x^2 + xy + y^2) - 10000$$

   Quant ha de medir i pesar l'au per assolir la màxima velocitat?.

8. Per a la funció resposta a l'administració de dos medicaments (x,y), que ve donada per

$$R(x,y) = 9xy - x^3 - y^3 + 5$$

   Quina combinació dels medicaments x i y s'administrarà per obtenir resposta màxima?.

9. Trobeu les distàncies màxima i mínima de l'origen a la corba: $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$

10. Trobeu tres números positius $x\,,y\,,z$ tals que la seva suma sigui 30 i el seu producte sigui màxim.

11. Demostreu que la caixa rectangular de volum donat i àrea superficial mínima és un cub.

12. Useu els multiplicadors de Lagrange per a trobar els extrems indicats. (Suposarem x,y,z positius)

a)	*Maximitzar* : $f(x,y) = xy$	lligadura:	$x + y = 10$
b)	*Minimitzar* : $f(x,y) = x^2 + y^2$	lligadura:	$x + y - 4 = 0$
c)	*Maximitzar* : $f(x,y,z) = xyz$	lligadures:	$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + z^2 = 5 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right.$

13. Estudieu els extrems de la funció $f(x,y) = x^2 + y^2$ quan (x,y) estan subjectes a la condició $y + x^2 = 1$.

14. Un laboratori farmacèutic demana als seus proveïdors caixes rectangulars de volum $16\,m^3$ per envasar càpsules d'anti-biòtic. Aquestes caixes estaran fabricades amb dos tipus de material per a la bona conservació del contingut: la base i el sostre ha de ser d'un material M_1 que val 10 pts/m^2 i les cares de la caixa d'un material M_2 que val 5 pts/m^2. Com ha de ser la caixa per a que la seva producció sigui el més barata possible?.

SOLUCIONS

1. a) $\{(x,y) \in \mathbf{R^2}\,;\, x \geq -y\}$, b) $\{(x,y) \in \mathbf{R^2}\,;\, x \geq \frac{y^2}{2}\}$ c)$\{(x,y) \in \mathbf{R^2}\,;\, x > -y\}$ d) $\{(x,y) \in \mathbf{R^2}\,;\, y > \frac{-x}{5}\}$ e) $\{(x,y) \in \mathbf{R^2}\,;\, x \neq -y\}$ f) $\{(x,y) \in \mathbf{R^2}\,;\, |y| < |x|\}$

2.

3. a) $f_x(x,y) = 2, f_y(x,y) = -3$, b) $f_x(x,y) = y,\ f_y(x,y) = x$,

   c)$f_x(x,y) = \sqrt{y},\ f_y(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{y}}$ d) $f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$,

   $f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$ e) $f_x(x,y) = \frac{-2y}{x^2-y^2},\ f_y(x,y) = \frac{2x}{x^2-y^2}$

   f) $f_x(x,y) = -2xe^{(x^2+y^2)}, f_y(x,y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}$

4.

5.

6. a) $(-1,1,-4)$ mínim relatiu b) $(1,0,1)$ màxim relatiu, $(0,0,1/2)$ punt sella c) $(0,0,\pi/2)$ màxim relatiu d) $(\pi/2,\pi/2,1)$ punt sella,

   $(3\pi/2, 3\pi/2, -3)$ mínim relatiu, $(\pi/6,\pi/6,3/2)$ i $(5\pi/6,5\pi/6,3/2)$ màxims relatius, $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},1)$ i $(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2},1)$ punts sella.

7.

8.

9. distància màxima=2, distància mínima=1.

10. Els números són $x = y = z = 10$.

11. a) El màxim és $f(5,5) = 25$, b) el mínim és $f(2,2) = 8$, c) el màxim és $f(\sqrt{10/3}, \sqrt{5/6}, \sqrt{5/3}) = \frac{5}{9}\sqrt{15}$.

12. $(0,1,1)$ màxim relatiu, $(\sqrt{2}/2, 1/2, 3/4)$ i $(-\sqrt{2}/2, 1/2, 3/4)$ mínims relatius.

13.

14.