Variables aleatòries i distribucions bivariants: cas general i absolutament continu

Diplomatura d'Estadística

Estadística Matemàtica I

Jordi Ocaña Rebull

Departament d'Estadística

Divisió de Ciències Experimentals i Matemàtiques

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Punts que tractarem:

- V.a. bivariants, cas general:
  - Funció de distribució conjunta, concepte
  - Funció de distribució conjunta, propietats
- Cas absolutament continu:
  - Concepte. Funció de densitat conjunta absolutament contínua.
  - Propietats de la funció de densitat.
  - Densitat condicionada.
  - Densitat marginal.

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Variables aleatòries bivariants, cas general

- El concepte de funció de distribució conjunta és totalment general.
- Recordem que es defineix com

$$F(x,\ y) = P([X \leq x] \cap [Y \leq y])$$

En tot el que segueix, per simplificar la notació, indicarem:

$$\lim_{x \to +\infty} F(x,y) = F(+\infty, y) \qquad \lim_{y \to +\infty} F(x,y) = F(x, +\infty)$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x,y) = F(+\infty, +\infty) \qquad \text{etc.}$$

Propietats de la funció de distribució conjunta

1. $F(x,-\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty,-\infty) = 0$
2. $F(x,+\infty) = F_X(x) \qquad F(+\infty, y) = F_Y(y)$
3. $F(+\infty,+\infty) = 1$
4. Si $x_1 < x_2$ aleshores $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$
5. $P([a_1 < X \leq a_2] \cap [b_1 < Y \leq b_2]) =$

$$F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, b_1)$$

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Variables aleatòries bivariants absolutament contínues

- Direm que $(X,\ Y)$ és absolutament contínua si existeix una funció $f(x,\ y)$ (a la que anomenarem *funció de densitat absolutament contínua conjunta* o bivariant) tal que, per tot $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\quad dudv$$

- Si existeix, la funció de densitat absolutament contínua és única.

Propietats de la funció de densitat conjunta

- $f(x,\ y) \geq 0$
- $$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$$
- $$P\{(X,Y) \in S\} = \iint_S f(x,y)\quad dxdy$$
  - i, en particular,

    $$P([a_1 < X \leq a_2] \cap [b_1 < Y \leq b_2]) = \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\quad dxdy$$
- $$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \quad \partial y} = f(x,y)$$

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Densitats contínues marginals i condicionades

- Funcions de densitat marginals:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \quad dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \quad dx$$

- Funcions de densitat condicionades:

$$f(y \mid x) = f(y \mid X = x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$f(x \mid y) = f(x \mid Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Densitat condicionada absolutament contínua

- Concepte: estudiem la distribució de Y quan donem per fet que X ha pres un valor "molt proper" a x.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P(Y \leq y \mid x < X \leq x + \varepsilon) =$$

$$\int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,v)}{f(x)}\, dv =$$

$$\int_{-\infty}^{y} f(v \mid X = x)\, dv$$

Correspon al concepte de "densitat condicionada"

Detall del raonament anterior

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P\,(\,Y \le y \mid x < X \le x+\varepsilon\,) =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{P\Big(Y \le y,\ x < X \le x+\varepsilon\Big)}{P\,(\,x < X \le x+\varepsilon\,)} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+\varepsilon}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv}{F(x+\varepsilon)-F(x)} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\dfrac{\displaystyle\int_x^{x+\varepsilon}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv}{\varepsilon}}{\dfrac{F(x+\varepsilon)-F(x)}{\varepsilon}} =$$

Detall del raonament anterior, continuació

Pel teorema del valor mig...

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{x}^{x+\varepsilon}\frac{f(u,v)}{\varepsilon}\,du\right)dv}{\dfrac{F(x+\varepsilon)-F(x)}{\varepsilon}} =$$

Derivada de F

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{y} f(x+\theta\varepsilon,v)\,dv}{f(x)} = \int_{-\infty}^{y}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\theta\varepsilon,v)}{f(x)}\,dv$$