UNIVERSITAT DE BARCELONA

Convergències estocàstiques

Diplomatura d'Estadística

Estadística Matemàtica I

Jordi Ocaña Rebull

Departament d'Estadística

Divisió de Ciències Experimentals i Matemàtiques

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Punts que tractarem:

- Concepte de successió de v.a. i límit.
- Convergència en distribució.Convergència de funcions característiques.
- Convergència en probabilitat. Lleis febles dels grans nombres.
- Convergència quasi segura. Lleis fortes dels grans nombres.
- Convergència en mitjana d'ordre k.

Repàs: convergència d'una successió de nombres reals

- Concepte de successió de nombres reals: $\{a_n\}$: una aplicació $\begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto a_n \end{array}$
- Límit d'una successió de nombres reals "convergència segura"

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad (\text{o } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\ ):$$

$$\text{sii, per tot } \varepsilon > 0,$$

$$\text{existeix } n_0 \in \mathbb{N}, \text{t.q. n} \geq \text{n}_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Concepte de successió de variables aleatòries

- Sigui $\mathcal{F}$ del conjunt de les v.a. definibles sobre un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
- Una successió de v.a. és una aplicació

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathcal{F} \\ n &\mapsto X_n \end{aligned}$$

- Normalment $X_n = g(Y_1, \ldots, Y_n)$ on les Y_i són dades, observacions d'una mateixa v.a Y.
- En quin sentit podem dir que $X_n \to X$?

Convergència en distribució (o en llei)

- Concepte: suposem que X_n té distribució F_n, per tot n, i que X té distribució F,

$$X_n \xrightarrow{\quad d \quad} X \quad \left(\text{o } X_n \xrightarrow{\quad \mathcal{L} \quad} X\right)$$

$$\text{sii} \quad \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

en tot punt de continuïtat de F

- També direm en aquest cas que F és la distribució asimptòtica de X_n.

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Convergència de funcions característiques.

- Sigui $\{X_n\}$ una successió de v.a. i $\{C_n(t)\}$ la corresponent successió de f. característiques. Si

$$\lim_{n \to \infty} C_n(t) = C(t)$$

i $C(t)$ és contínua a $t = 0$, aleshores és funció característica d'una v.a. X i la successió $\{X_n\}$ convergeix **en distribució** a X.

Relació amb la convergència de funcions característiques

- Sigui C_n la funció de característica de X_n amb funció de distribució F_n. Tenim que:

$$\boxed{X_n \xrightarrow{\quad d \quad} X \sim F}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{per tot } t, \lim\limits_{n\to\infty} C_n(t) = C(t) \\ \text{amb } C \text{ funció característica (la de } F) \end{array}}$$

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Convergència en probabilitat

- Concepte: $X_n \xrightarrow{\quad P \quad} X$

  sii $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$

- És un concepte "local": ***no*** diu res del límit de tota la successió $X_n(\omega)$, només assegura que, per n prou gran, "és molt probable" que els valors de X_n s'assemblin als de X.

Relació amb la convergència de funcions característiques

- Sigui $\{X_n\}$ una successió de v.a. i $\{C_n(t)\}$ la corresponent successió de funcions característiques. Si

$$\lim_{n \to \infty} C_n(t) = e^{itc}$$

on $c \in \mathbb{R}$, aleshores la successió $\{X_n\}$ convergeix **en probabilitat** al valor c.

Lleis febles dels grans nombres

- Enunciat general (i imprecís): la mitjana aritmètica convergeix en probabilitat cap a l'esperança.
- Direm que $\{X_n\}$ verifica la ll.f.g.n. sii quan $E(X_i) < \infty, \ \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

existeixen successions a_n i b_n t.q.

$$\frac{\bar{X}_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0$$

Lleis febles dels grans nombres: casos particulars

– Teorema de Bernouilli (primera formulació de la llei feble dels grans nombres):

$$\text{Si } X_n \sim b(n,p) \qquad Y_n = \frac{X_n}{n}$$

$$\text{aleshores} \quad Y_n \xrightarrow{P} p$$

– Teorema de Txebytxev: suposem

$$\operatorname{var}(X_n) = \sigma_n^2 < \infty, \ \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = 0$$

$$\rho\left(X_i, X_j\right) = 0 \text{ per tot } i, j$$

aleshores

$$\bar{X}_n - E\left(\bar{X}_n\right) \xrightarrow{P} 0$$

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Lleis febles dels grans nombres: casos particulars (i II)

– Teorema de Khintxine: si les X_n són *iid* no cal que existeixin els moments de segon ordre per que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} E(X_n) = \mu$

– Conseqüència del teorema de Khintxine: sota les condicions anteriors, si $E\left(X_n^k\right) < \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} E\left(X_n^k\right)$$

– i també pels moments centrals, com

$$S_n^2 \xrightarrow{P} \operatorname{var}(X_n)$$

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Convergència quasi segura

- Concepte: $X_n \xrightarrow{qs} X$

sii $P\{\omega \in \Omega : \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1$

- És un concepte "global", la definició afirma que, amb tota seguretat, el límit de les successions numèriques $X_n(\omega)$ és el valor $X(\omega)$.

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Lleis fortes dels grans nombres

- Concepte similar a les lleis febles però amb convergència quasi segura.
- Teoremes de Kolmogorov: si

$$X_1, \ldots, X_n \text{ est. independents, } E(X_i) < \infty,$$

$$\operatorname{var}(X_i) = \sigma_i^2 < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$$

aleshores $\bar{X}_n - E(\bar{X}_n) \xrightarrow{q.s.} 0$

(i si són *iid*: $\bar{X}_n \xrightarrow{q.s.} E(X_n) = \mu$)

Convergència en mitjana d'ordre k

- Concepte: $$X_n \xrightarrow{k} X$$

  sii $$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^k = 0$$

  per $E|X_n|^k$ i $E|X|^k$ finites

- Casos més importants:
  - k=1, convergència en mitjana d'ordre 1 o L^1
  - k=2, convergència en mitjana quadràtica:

$$X_n \xrightarrow{2} c \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} E(X_n) = c \;\text{ i }\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{var}(X_n) = 0$$

Relació entre els diversos tipus de convergències estocàstiques