

Diplomatura d'Estadística, Universitat de Barcelona	Curs 1999-2000
ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I	Convocatòria de gener
Cognoms:	Nom:

Per les quatre preguntes següents, marca l'opció (una sola) i explica breument (en les dues línies reservades, com a màxim) la raó de la teva tria.

1. La funció de densitat de probabilitat f d'un vector aleatori (X, Y) verifica $f(x,y) \neq f_1(x)f_2(y)$ per algun x, y , on $f_i, i=1,2$, representen les densitats marginals. Suposem que el coeficient de correlació entre X i Y existeix. D'aquí en deduïm que:
- $\rho(X, Y) \neq 0$.
 - $\rho(X, Y) > 0$.
 - No podem assegurar res. Podríem dir que $\rho(X, Y) \neq 0$ si la distribució conjunta de (X, Y) fos normal bivariant.

2. Si $\varphi_X(t)$ és la funció característica d'una variable aleatòria X , k és un enter positiu i $\varphi_X^{(k)}$ representa la derivada d'ordre k de la funció característica; marca l'afirmació *falsa*:

- Per tota v.a. X podem afirmar que $E(X^k) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{i^k}$.
- Tota v.a. té funció característica, $\varphi_X(t)$, encara que no tingui moments finits.
- X i Y estoc. independents \Rightarrow per tot t , $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

3. Si una successió de variables aleatòries X_n convergeix quasi segurament vers una v.a. X , $X_n \xrightarrow{q.s.} X$, indica quina de les següents afirmacions pot ser falsa:

- $P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right\} = 1$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = E(X)$.
- $X_n \xrightarrow{P} X$.

4. Un dels processos estocàstics més importants és l'anomenat *procés de Poisson*. Sota aquest model, la distribució de primer ordre d'un procés $N(t)$ és una distribució de Poisson de paràmetre $\lambda_t = \lambda t$. És a dir, $N(t) \approx \mathcal{P}(\lambda_t)$. De les tres afirmacions següents, referides al procés $N(t)$, solament una és correcta, marca-la:

- És estacionari.
- És estacionari en variància.
- La funció de mitjana i de variància sempre coincideixen.

5. Suposem que tots aquests moments existeixen. Omple el quadre amb el valor numèric de la resposta, o marca l'opció, que creguis que és correcta. *No cal cap justificació addicional ni cap càlcul.*

- ◆ sempre es compleix que $\text{var}(E(X/Y)) - \text{var}(X) \leq 0$ és ... veritat mentida
- ◆ $E\{E(X/Y)\} - E(X) =$
- ◆ sempre es compleix que $E\{\text{var}(X/Y)\} \geq 0$ és ... veritat mentida
- ◆ $\text{var}(E\{E(X/Y)\}) =$

Diplomatura d'Estadística, Universitat de Barcelona	Curs 1999-2000
ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I	Convocatòria de gener
Cognoms:	Nom:

Problema 1

(Utilitza aquest full com a primer de la solució i afegeix els fulls que calgui, entrega aquest problema per separat amb aquest full com a portada).

Sigui la parella de variables aleatòries X, Y amb la següent funció de densitat:

$$f(x, y) = \begin{cases} axy & \text{si } (x, y) \in C \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

on la regió C correspon a un recinte triangular delimitat per les rectes $y = 1$, $y = 1 - x$, $y = x - 1$.

1. Determina el valor que ha de tenir a per a que $f(x, y)$ sigui funció de densitat.
2. Determina la funció de densitat marginal de X .
3. Determina la funció de densitat condicionada $Y | X = x$.
4. Calcula el moment mixt $E(XY)$.

Diplomatura d'Estadística, Universitat de Barcelona	Curs 1999-2000
ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I	Convocatòria de gener
Cognoms:	Nom:

Problema 2

(Utilitza aquest full com a primer de la solució i afegeix els fulls que calgui, entrega aquest problema per separat amb aquest full com a portada).

Un investigador vol fer una simulació per ordinador. Com que en el model que vol simular hi intervenen variables aleatòries X amb distribució normal i ell solament sap fer que l'ordinador li generi valors aleatoris provinents d'una v.a. U , uniforme entre 0 i 1, $U \sim \mathcal{U}(0,1)$, decideix generar cada un dels valors normals que necessita a base de sumar grups de n (n gran) valors uniformes dels anteriors, $X_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$, on les v.a. uniformes U_i es poden considerar independents.

1. Indica *exactament* quin teorema li permet afirmar que X_n tindrà una distribució aproximadament normal i enuncia'l (el teorema al qual ens referim té un enunciat general, imprecís, i nombroses versions molt més concretes; la resposta estarà tant més bé com més concreta sigui la versió del teorema). Indica també quan valdran els paràmetres (mitjana i variància) de la distribució normal que seguirà aproximadament X_n quan $n = 30$.
2. Demuestra que $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} \frac{1}{2}$.

Un amic, més expert en Estadística, li explica que hi ha una forma molt més curta (i que, a més, és exacta i no aproximada com l'anterior) de generar valors segons una distribució normal. Aquest mètode permet obtenir els valors normals per parelles, és a dir, cada vegada que s'aplica produeix el valor d'una parella de valors provinents de v.a. Z_1 i Z_2 , normals $N(0,1)$ i independents.

3. Amb el vector aleatori anterior (l'obtingut pel segon mètode de generació) fa el següent canvi de variable:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

Quina distribució conjunta tenen les variables Y_1 i Y_2 ?

4. Troba la distribució conjunta de les variables aleatòries (agafant sempre l'arrel quadrada positiva)

$T_1 = \sqrt{\frac{V}{1+W^2}}$ i $Z_2 = W \sqrt{\frac{V}{1+W^2}}$ on les v.a. V i W són independents i amb funció de densitat

$$f(v) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{v}{2}\right) \text{ per } v > 0$$

$$f(w) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+w^2} \text{ per } -\infty < w < +\infty$$

és a dir, exponencial i de Cauchy respectivament.

(Aquesta densitat conjunta ja quasi demostra que el mètode proposat per l'amic és correcte, només

caldria finalment fer $Z_1 = \begin{cases} T_1 \text{ amb probabilitat } \frac{1}{2} \\ -T_1 \text{ amb probabilitat } \frac{1}{2} \end{cases}$ i ja tindriem les dues v.a. normals

independents esmentades abans. Això no cal, però comprovar-ho).