UNIVERSITAT DE BARCELONA

Funció Característica

Diplomatura d'Estadística

Estadística Matemàtica I

Departament d'Estadística

Divisió de Ciències Experimentals i Matemàtiques

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Punts que tractarem:

- ✔ Motivació
- ✔ Funció característica univariant: cas discret i continu
- ✔ Algunes propietats
- ✔ Funció característica multivariant: cas discret i continu
- ✔ Algunes propietats
- ✔ Famílies reproductives

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Motivació

- ✔ És un altra manera de definir la llei de probabilitat d'una v.a.
- ✔ Avantatges. Resulta més fàcil el càlcul:
  - dels moments respecte al origen
  - de les distribucions mostrals (suma de v.a. *i.i.d.*)
  - de les convergències en distribució.

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Funció característica

- ✔ S'anomena funció característica $C_X(t)$ de la variable X a l'esperança de e^{itX}

$$C_X(t) = E(e^{itX}) =$$

$$E[cos(tX)] + i\ E[sin(tX)]$$

$$(i = \sqrt{-1})$$

- ✔ És una funció de variable real t que agafa valors complexos.
- ✔ **Sempre existeix**

Càlcul de la funció característica

✔Cas discret:

$$C_X(t) = \sum_j e^{itx_j} P(X = x_j)$$

✔Cas absolutament continu:

$$C_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx$$

Propietat bàsiques

✔$C_X(0) = 1$

✔$|C_X(t)| \leq 1$;

✔$C_X(-t) = \overline{C_X(t)}$

✔És contínua a tot $\mathbb{R}$

✔**Teorema d'unicitat**. A tota funció característica $C_X(t)$ li correspon una i solament una funció de distribució.

Teorema d'inversió

- Si X és una v.a. amb funció de distribució $F(x)$, on $x_1 < x_2$ són dos punts de continuïtat d'aquesta funció, es demostra que:

$$F(x_2)-F(x_1)=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{+T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}C_X(t)\,dt$$

si $C_X(t)$ és integrable per a tot t real.

Teorema d'inversió, casos absolutament continu i discret

- Si X és una **v.a. absolutament contínua**:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}C_X(t)\,dt$$

- Si X és una **v.a. discreta**:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}e^{-itx}C_X(t)\,dt=\begin{cases}0 & \text{si } x\neq x_j\\ P(X=x_j) & \text{si } x=x_j\end{cases}$$

Càlcul de moments amb la funció característica

✔Si la v.a. X té tots els moments finits:

$$C_X(t) =$$

$$1 + itE(X) + (it)^2 \frac{E(X^2)}{2!} + \ldots + (it)^k \frac{E(X^k)}{k!} + \ldots$$

✔Com conseqüència tenim que

$$E(X^k) = \frac{C_X^{(k)}(0)}{i^k} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Propietats

✔Si $Z = aX + b$, on X és una v.a i a,b són nombres reals:

$$C_Z(t) = e^{itb}\, C_X(at)$$

✔Si X i Y són estocàsticament independents:

$$C_{X+Y}(t) = C_X(t) \cdot C_Y(t)$$

Convergència de funcions característiques.

✔ Sigui $\{X_n\}$ una successió de v.a. i $\{C_n(t)\}$ la corresponent successió de f. característiques. Si

$$\lim_{n \to \infty} C_n(t) = C(t)$$

i $C(t)$ és contínua a $t = 0$, aleshores és funció característica d'una v.a. X i la successió $\{X_n\}$ convergeix **en distribució** a X.

Convergència de funcions característiques.

✔ Sigui $\{X_n\}$ una successió de v.a. i $\{C_n(t)\}$ la corresponent successió de funcions característiques. Si

$$\lim_{n \to \infty} C_n(t) = e^{itc}$$

on $c \in \mathbb{R}$, aleshores la successió $\{X_n\}$ convergeix **en probabilitat** al valor c.

Funció característica multivariant

✔ Sigui **X** = (X_1, X_2, …, X_n) un vector aleatori *n*-dimensional. S'anomena funció característica de **X** a

$$C_{\mathbf{X}}\left(t_1, t_2, \ldots, t_n\right) = E\left\{e^{i\left(t_1 X_1 + t_2 X_2 + \cdots + t_n X_n\right)}\right\}$$

✔ És una funció de n variables reals t_1, t_2, …, t_n que agafa valors complexos.

✔ **Sempre existeix**

Càlcul de la funció característica bivariant

✔ Cas discret :

$$C_{(X,Y)}(t_1, t_2) =$$

$$\sum_j \sum_k e^{i(t_1 x_j + t_2 y_k)} P(X = x_j, Y = y_k)$$

✔ Cas absolutament continu:

$$C_{(X,Y)}(t_1, t_2) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t_1 x + t_2 y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Propietats

- ✔Són similars al cas univariant:
- ✔$C_{\mathbf{X}}(0,\ldots,0) = 1$; $|C_{\mathbf{X}}(t_1, t_2,\ldots, t_n)| \le 1$
- ✔**Teorema d'unicictat**:la funció característica caracteritza totalment la funció de distribució conjunta.
- ✔Dues v.a. X i Y són independents sii:

$$C_{(X,Y)}(t_1, t_2) = C_X(t_1) \cdot C_Y(t_2)$$

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Propietats

- ✔Sota certes condicions, admet un desenvolupament en sèrie expressat en funció dels moments mixtos.
- ✔Si existeix el moment respecte a l'origen, es pot calcular com (al cas bivariant)

$$m_{r,s} = \frac{1}{i^{r+s}} \left(\frac{\partial^{r+s} C_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_1^r \partial t_2^s} \right)_{t_1, t_2 = 0}$$

Funció característiques marginals

✔ Bidimensional

$$C_X(t_1) = C_1(t_1) = C_{X,Y}(t_1, 0)$$

$$C_Y(t_2) = C_2(t_2) = C_{X,Y}(0, t_2)$$

✔ Cas general

$$C_j(t_j) = C_{\mathbf{X}}(0, \ldots, 0, t_j, 0, \ldots, 0)$$

$$C_{jl}(t_j, t_l) = C_{\mathbf{X}}(0, \ldots, 0, t_j, 0 \ldots 0, t_l, 0 \ldots, 0)$$

$$\ldots$$

Famílies reproductives

✔ Una família de distribucions és reproductiva si la suma de v.a. indep. de la família pertany també a la família

✔ Exemples:

- Binomial respecte al paràmetre n
- Poisson respecte al seu paràmetre
- Binomial negativa respecte al paràmetre n
- Normal respecte μ y σ
- Gamma respecte al paràmetre p