



UNIVERSITAT DE BARCELONA

U

B

# Moments mixtos, covariància

Diplomatura d'Estadística

Estadística Matemàtica I

*Jordi Ocaña Rebull*

**Departament d'Estadística**

Divisió de Ciències Experimentals i  
Matemàtiques

## Punts que tractarem:

---

- 📄 Concepte i càlcul dels moments mixtos.
- 📄 Esperança d'una funció de dues v.a.
- 📄 Moments de segon ordre. Covariància.
- 📄 Covariància i independència.
- 📄 Desigualtat de Schwarz.
- 📄 Coeficient de correlació.

# Concepte de moment mixt

Considerem una v.a. bivariant  $(X, Y)$

Moment mixt d'ordre  $k+l$

- Respecte de l'origen:  $m_{kl} = E(X^k Y^l)$
- Respecte d'un punt qualsevol  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\nu_{kl} = E\left\{(X - a)^k (Y - b)^l\right\}$$

- Central (cas  $(a, b) = (E(X), E(Y))$ ):

$$\mu_{kl} = E\left\{(X - E(X))^k (Y - E(Y))^l\right\}$$

# Càlcul dels moments mixtos

 Cas discret:

$$m_{kl} = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^l f(x_i, y_j)$$

$$\mu_{kl} = \sum_i \sum_j (x_i - E(X))^k (y_j - E(Y))^l f(x_i, y_j)$$

 Cas absolutament continu:

$$m_{kl} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^l f(x, y) dx dy$$

$$\mu_{kl} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k (y - E(Y))^l f(x, y) dx dy$$

*sii sèries o integrals abs. convergents*

# Esperança d'una funció $g(X, Y)$

Les fórmules anteriors són un cas particular de la fórmula general:

$$E \{ g(X, Y) \} = \begin{cases} \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) f_{XY}(x_i, y_j) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy \end{cases}$$

pel cas discret i continu, respectivament, sempre que la corresponent sèrie o integral sigui absolutament convergent.

# Moments de segon ordre respecte de l'origen

Moment d'ordre 2+0:  $E(X^2)$

Moment d'ordre 0+2:  $E(Y^2)$

Moment d'ordre 1+1:  $E(XY)$

☞ Si  $X$  i  $Y$  són estocàsticament independents aleshores  $E(XY) = E(X)E(Y)$ . La implicació contrària, en general, és falsa.

☞ Si  $E(X^2)$  i  $E(Y^2)$  existeixen, també existeix  $E(XY)$ .

# Moments de segon ordre centrals: **covariància**

Concepte:  $\text{cov}(X, Y) = \mu_{11} = \sigma_{11}$

$$E\{(X - E(X))(Y - E(Y))\}$$

Per tant es calcula:

– al cas discret:

$$\sum_i \sum_j (x_i - E(X))(y_j - E(Y)) f(x_i, y_j)$$

– i al cas absolutament continu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))(y - E(Y)) f(x, y) dx dy$$

# Significat de la covariància

		$y$ "petit"		$y$ "gran"	
		$(y - E(Y))$			
		-	+		
$x$ "petit"	$(x - E(X))$	-	+	$(x - E(X))$	$(y - E(Y))$
$x$ "gran"		+	-	-	+

Mesura el grau de “proporcionalitat”: “coincidència” ( $x$  gran amb  $y$  gran o  $x$  petit amb  $y$  petit) dóna un producte positiu, “no coincidència” un producte negatiu, el signe i magnitud de **cov** determinat pel allò més probable.

# Propietats de la covariància. I

📄 Fòrmula (de vegades) més adequada pel càlcul:  $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

📄 Relacions amb la variància:

$$\text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$$

$$\text{var}(X \pm Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) \\ \pm 2 \text{cov}(X, Y)$$

📄 Simetria

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$$

## Propietats de la covariància. II

(Suposem que  $c$  és una constant real)

☞ Invariant respecte a translacions:

$$\text{cov}(X + c, Y) = \text{cov}(X, Y)$$

☞ (Bi)linealitat:

$$\text{cov}(cX, Y) = c \text{cov}(X, Y)$$

$$\text{cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{cov}(X_1, Y) + \text{cov}(X_2, Y)$$

– En resum:

$$\text{cov} \left( c_0 + \sum_{i=1}^n c_i X_i, d_0 + \sum_{j=1}^m d_j Y_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i d_j \text{cov}(X_i, Y_j)$$

## Propietats de la covariància. III

☞ Si  $X$  i  $Y$  són v.a. estocàsticament independents aleshores  $\text{cov}(X, Y) = 0$


☞ La implicació contrària en general és falsa:


$$X \text{ i } Y \text{ e. indep. } \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \nRightarrow \end{array} \right\} \text{cov}(X, Y) = 0$$


☞ En canvi sí que

$$\text{cov}(X, Y) \neq 0 \Rightarrow X \text{ i } Y \text{ dependents}$$

# Desigualtat de Schwarz


 $(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$  si  
 existeixen aquests moments.


 La igualtat és certa si, per a certa constant  $\beta$ ,  
 es compleix amb tota seguretat la relació  
 lineal (és a dir  $Y = \beta X$ )


 Si ho apliquem a  $\text{Prob}\{Y = \beta X\} = 1$  :  
 -  $X - E(X)$  i  $Y - E(Y)$   
 - igualtat si  $(\text{cov}(X, Y))^2 \leq \text{var}(X)\text{var}(Y)$   
 $(Y - E(Y)) = \beta(X - E(X))$

# Coeficient de correlació

La covariància expressa el grau de relació lineal, en aquesta escala:

$$-\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)} \leq \text{cov}(X, Y) \leq +\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}$$

Màxima relació “inversa”

Màxima relació “directa”

És més adequada l'escala del **coeficient de correlació**

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}}$$

# Significat del coeficient de correlació

Escala:  $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$

Màxima correlació negativa: relació lineal exacta (amb  $\beta < 0$ )

$$\rho(X, Y) = 0$$

Correlació nul·la: total manca de relació lineal,  $\beta = 0$   
(no independència estocàstica !)

Màxima correlació positiva: relació lineal exacta (amb  $\beta > 0$ )

$$Y - E(Y) = \beta (X - E(X))$$

# Altres propietats del coeficient de correlació

Correlació d'una v.a. amb si mateixa:

$$\rho(X, X) = 1 \quad (\text{si } \text{var}(X) > 0)$$

Simetria:  $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$

Invariància respecte de transformacions afins: si  $a$  i  $b$  no són nul·les:

$$\rho(a + bX, c + dY) = \rho(X, Y)$$