



UNIVERSITAT DE BARCELONA



ENSENYAMENT D'ESTADÍSTICA

ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

Recull de problemes

Curs 2000-2001
primer quadrimestre

Esteban Vegas i Francesc Oliva

Barcelona, Setembre de 2000

DEPARTAMENT D'ESTADÍSTICA

Sèrie de Quaderns Docents del Departament d'Estadística.

ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

PROBLEMES

Repàs de variable aleatòria.

1. Sigui X una variable aleatòria amb funció de distribució

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ (1+x)/9 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ (2+x^2)/9 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Calculeu:

- $P(X = 2)$
 - $P(X \in [-\frac{1}{2}, 3))$
 - $P(X \in (0, \frac{1}{2}] \cup (1, 2))$
 - $P(X \in \{x; |x| + 2x^2 > 1\})$
2. Sigui X una variable aleatòria amb densitat $f(x) = ke^{-|x|}$. Trobeu el valor de k i calculeu les probabilitats
- $P(X \in [-2, 2])$
 - $P(X \in \{x; |x| + |x-3| \leq 3\})$

3. Sigui X una variable aleatòria amb distribució de Rayleigh

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right\} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Calculeu la funció de distribució.
- Calculeu l'esperança, la mediana, la moda, la variància i la desviació absoluta mediana.
- L'amplitud d'una senyal de radar enviada des de la superfície del mar segueix una distribució de Rayleigh. Calculeu α sabent que les mesures efectuades mostren que l'amplitud supera a x_0 en el 3% dels casos, essent $x_0^2 = -\ln 0.03$.

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

4. Es coneix com a funció de risc d'una variable aleatòria continua no negativa T la funció $r(t) = f(t)/[1 - F(t)]$, on f és la funció de densitat i F és la funció de distribució.

- a) Determineu la funció de distribució a partir de la funció de risc.
 b) Caracteritzeu les variables aleatòries amb risc constant.
 c) Calculeu la funció de risc d'una variable amb distribució de Rayleigh.

5. Sigui X una variable aleatòria amb funció de distribució $F(x) = 1 - 2^{-[x]}$, $\forall x \geq 1$ ($F(x) = 0$ en cas contrari). Calculeu l'esperança i la variància.

6. La durada en minuts de les trucades en un telèfon públic té la següent distribució de probabilitat

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x/3} - \frac{1}{2}e^{-[x/3]} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Quina és la probabilitat de que una trucada duri més de sis minuts? I de que duri tres minuts?.

7. Calculeu l'esperança i la variància d'una variable aleatòria amb funció de densitat

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} & \text{si } x > 0 \quad (\lambda > 0; k = 3, 4, 5, \dots) \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i x} & \text{si } x > 0 \quad (\alpha_i \geq 0, \lambda_i > 0; i = 1, \dots, n; \sum \alpha_i = 1) \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

8. Sigui X una variable aleatòria amb distribució uniforme en l'interval $[-1, 1]$. Trobeu la densitat de $Y = X^2$ i de $Z = |X|$.

9. Sigui X una variable aleatòria absolutament continua amb funció de distribució F . Demostreu que la variable aleatòria $Y = F(X)$ té distribució uniforme en l'interval $[0, 1]$.

10. Sigui X una variable aleatòria amb funció de distribució $F(x) = (x+2)^2/32$ si $x \in [-1, 2)$ ($F(x) = 0$ si $x < -1$; $F(x) = 1$ si $x \geq 2$). Calculeu l'esperança i la variància

Vectors aleatoris: Discrets i continus

11. Es llança un dau equilibrat. Siguin X, Y les variables aleatòries definides per:

$$X = \begin{cases} -1 & \text{si el resultat és senar} \\ 1 & \text{si el resultat és parell} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} -1 & \text{si el resultat és 1, 2 o 3} \\ 0 & \text{si el resultat és 4} \\ 1 & \text{si el resultat és 5 o 6} \end{cases}$$

- Trobeu les funcions de probabilitat i de distribució conjunta i les funcions de probabilitat marginals.
- Calculeu $P(X + Y = 0 | Y \leq 0)$ i $P(X = 1 | X + Y = 2)$

12. Sigui (X, Y) una variable aleatòria bidimensional discreta amb funció de densitat:

$$f(x, y) = \begin{cases} k \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{y-1} & \text{si } x, y \in \mathbb{N} - \{0\} \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas} \end{cases}$$

- Trobeu la constant k .
- Calculeu les funcions de probabilitat marginals i la funció de distribució conjunta. Són les variables X, Y estocàsticament independents?
- Calculeu $P[(3 \leq X \leq 5) \cap (15 \leq Y \leq 20)]$.

13. La funció de densitat de probabilitat conjunta de dues variables aleatòries X, Y és:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y) & \text{si } x \in (0,1), y \in (0,1) \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas} \end{cases}$$

- Trobeu la constant k .
- Calculeu les funcions de densitat marginals, l'esperança i la variància de X i Y .
- Són les variables estocàsticament independents?
- Trobeu la funció de densitat de Y condicionada a $X = x$.

14. La funció de distribució de probabilitat conjunta de dues variables aleatòries X, Y és:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ o } y \leq 0 \\ (1 - e^{-x})^{1-\rho} (1 - e^{-y}) & \text{si } x \geq y > 0 \\ (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})^{1-\rho} & \text{si } y > x > 0 \end{cases}$$

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

essent ρ un paràmetre que verifica $0 \leq \rho \leq 1$.

- Trobeu les funcions de distribució marginals de X, Y .
- Trobeu la funció de densitat conjunta.
- Són les variables estocàsticament independents?. Quina relació hi ha entre les dues variables si $\rho = 1$?

15. Donades les dues funcions de densitat bidimensionals següents:

$$\begin{aligned} 1) \quad f(x, y) &= kx^2 y^3 e^{-(5x+2y)} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 2) \quad f(x, y) &= k(x^2 + y^3) e^{-(x+y)} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

Trobeu en cada cas:

- la constant k .
- les funcions de densitat marginals.
- la funció de densitat condicionada $f(y|x)$. Són les variables estocàsticament independents?

16. La funció de densitat de probabilitat conjunta de dues variables aleatòries X, Y és:

$$f(x, y) = k(\cos x + \cos y) \quad \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2$$

Calculeu:

- la constant k .
- la funció de distribució conjunta i les funcions de distribució marginals. Són X, Y independents?
- esperança i variància de X, Y .
- $P[(X \geq \pi/6) \cap (Y \geq \pi/3)] \quad P[X \geq \pi/6 | Y \geq \pi/3]$
 $P[X \geq \pi/6 | Y = \pi/3] \quad P(X + Y \leq 1)$
 $P(X < \pi/4)$

17. Sigui (X, Y) un vector aleatori amb funció de densitat uniforme dins el recinte delimitat per $x = 0, y = 0$ i $x + y = 1$.

- Trobeu la funció de densitat i la funció de distribució conjunta.
- Calculeu les funcions de densitat marginals. Són X, Y independents?
- Calculeu $P[1/2 \leq Y \leq 7/8 | X = 1/3]$.

18. Com és sabut, en un sorteig qualsevol de la LOTO 6/49 s'extreuen sense retornar sis (deixant apart el complementari) de les 49 boles (numerades del 1 fins al 49). Siguin les variables aleatòries $X =$ "nombre de boles (de les sis) amb xifra senar",

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si el nombre més petit ha estat inferior a 10} \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

- Construïu les funcions de probabilitat marginals i la conjunta.
- Són X, Y independents? Trobeu la funció de densitat de X condicionada a Y .

19. Sigui el vector aleatori (X, Y, Z) amb funció de densitat

$$f(x, y, z) = \begin{cases} kxyz & \text{si } (x, y, z) \in C \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

on $C = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$. Calculeu:

- la constant k .
- totes les funcions de densitat marginals, univariants i bivariants. Són les tres variables estocàsticament independents?
- la funció de densitat del vector aleatori (X, Y) condicionat per la variable Z .
- $P[(X < 1/2) \cap (Y > 1/2) \cap (1 < Z < 2)]$.

20. Sigui el vector aleatori (X, Y, Z) amb funció de densitat

$$f(x, y, z) = \begin{cases} kxy \exp\{-\frac{x+y+z}{3}\} & \text{si } x, y, z \geq 0 \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

Trobeu:

- la constant k .
- totes les funcions de densitat marginals, univariants i bivariants. Són les tres variables estocàsticament independents? Són X, Y independents?
- $P(X < Y < Z)$.

21. Es trien punts a l'atzar en $C \subset R^2$, on $C = \{(x, y) / 0 \leq y \leq x \leq 1\}$. Calculeu:

- les funcions de densitat i de distribució conjunta de la variable aleatòria bidimensional (X, Y) .
- les funcions de densitat marginals i les funcions condicionades.
- $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y), E(Y | X = x)$ i $Var(Y | X = x)$.
- Comproveu per aquesta distribució bivariant les següents igualtats (certes per a qualsevol distribució bivariant, suposant que $E(X), E(Y), Var(X)$ i $Var(Y)$ siguin finites):

$$E[E(Y|X)] = E(Y) \text{ i } Var(Y) = E[Var(Y|X)] + Var[E(Y|X)]$$

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

- e) Siguin U_1, U_2 dues variables aleatòries independents amb distribució uniforme en l'interval $[0,1]$. Demostreu que els valors que pren el vector aleatori $(\max\{U_1, U_2\}, \min\{U_1, U_2\})$ són punts a l'atzar en C .

22. Sigui el vector aleatori (X, Y) amb funció de probabilitat

$$f(x, y) = k \binom{3}{x} \binom{3}{y} \binom{4}{3-x-y} \quad x, y = 0, 1, 2, 3; \quad x + y \leq 3$$

- a) Trobeu la constant k .
- b) Calculeu $P[(0 < X \leq 2) \cap (Y = 3)]$.
- c) Calculeu $P(X \geq 1)$.
23. Considerem tres llançaments d'una moneda i definim les següents variables aleatòries: $X =$ "nombre de cares obtingudes", $Y =$ "nombre de creus abans de la primera cara". Calculeu:
- a) La funció de probabilitat conjunta i les marginals.
- b) La funció de distribució de X condicionada a $Y = 0$.

Canvi de variables.

24. Siguin X, Y dues variables aleatòries independents. La densitat de la variables X és $f(x) = 2(1-x)$ si $0 \leq x \leq 1$, mentre que la de Y és $f(y) = e^{-y}$ si $y > 0$. Calculeu la probabilitat de que el quocient X / Y sigui inferior a 2.

25. Siguin X, Y dues variables aleatòries independents amb distribució $N(0,1)$. Calculeu el valor del paràmetre a per tal de que les noves variables

$$U = \frac{X + Y}{a} \qquad V = \frac{X - Y}{a}$$

siguin també $N(0,1)$ independents.

26. Siguin X, Y dues variables aleatòries independents amb distribució exponencial de paràmetres α i β respectivament.

a) Calculeu la funció de densitat conjunta de les variables $U = aX + bY, V = aX/bY$.

b) Són U, V variables estocàsticament independents?.

c) Calculeu $P((U \leq 1) \cap (V \geq 2))$.

27. Siguin X, Y dues variables aleatòries independents amb distribució uniforme en l'interval $(0,1)$. Determineu la funció de densitat i calculeu l'esperança de la variable

$$R = \max\{X, Y\} - \min\{X, Y\}$$

28. Sigui X una variable aleatòria amb distribució exponencial de paràmetre α .

a) Considerem la variable aleatòria $Y = X^{1/\beta}, \beta > 0$. Trobeu la distribució de la variable aleatòria Y , coneguda com distribució de Weibull de paràmetres α, β .

b) Demostreu que la variable aleatòria $Z = \min\{Y_1, \dots, Y_n\}$ segueix una distribució de Weibull $n\alpha, \beta$ si les variables Y_1, \dots, Y_n són independents i idènticament distribuïdes a Y .

29. Siguin X_1, \dots, X_n variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes.

a) Calculeu la funció de densitat conjunta de les variables

$$W = \max\{X_1, \dots, X_n\} \qquad Z = \min\{X_1, \dots, X_n\}$$

b) Suposem que la distribució de $X_i (i = 1, \dots, n)$ és uniforme en l'interval $(0,1)$.

b.1) Calculeu la distribució de $R = W - Z$

b.2) Calculeu la distribució de $Q = Z/W$.

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

30. Siguin X, Y dues variables aleatòries independents amb funció de densitat

$$f_1(x) = 1 \quad \text{si } 0 < x < 1, \quad f_2(y) = (1+y)^{-2} \quad \text{si } y > 0$$

- Calculeu la funció de distribució de la variable aleatòria "àrea del rectangle de base X i alçària Y ".
- Trobeu, si existeix, l'esperança de l'àrea del rectangle anterior.

31. Siguin X, Y dues variables aleatòries independents tals que X es distribueix segons una uniformement en l'interval $(1,3)$, mentre que la funció de densitat de Y és

$$f_Y(y) = e^{2-y} \quad \text{si } y > 2$$

Trobeu la funció de densitat conjunta de les noves variables $V = X/Y$ i $W = XY$.

32. Siguin X, Y dues variables aleatòries independents amb distribució $N(0,1)$. Trobeu les funcions de densitat de les noves variables $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ i $W = \arctg(Y/X)$ ($0 < W < 2\pi$). Demostreu que Z i W són independents.

Coefficient de correlació, regressió lineal i corba de regressió.

33. Trobeu el coeficient de correlació de les variables X, Y del problema 22 i del problema 23.

34. Trobeu el coeficient de correlació de les variables X, Y del problema 17 i del problema 21.

35. Siguin X, Y dues variables aleatòries independents amb distribució uniforme en l'interval $(0,1)$. Calculeu el coeficient de correlació entre les variables $U = XY$ i $V = (1-X)(1-Y)$.

36. Siguin X, Y dues variables aleatòries amb distribució uniforme en l'interval $(-1,1)$.

- Trobeu el conjunt de possibles valors que pot prendre $a = Cov(X, Y)$. Determineu el valor de a en els següents casos: 1) X, Y independents, 2) $X = -Y$.
- Sigui $Z = X^k$, $k \in N$. Trobeu k de manera que $Cov(X, Z) = 0$. Interpreteu el resultat.

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

37. Siguin X_1, X_2 dues variables aleatòries qualsevol amb la condició de que existeix la seva variància i és no nul·la. Determineu el coeficient de correlació de les variables aleatòries $Y_1 = X_1 + X_2$ i $Y_2 = X_1 - X_2$. Què succeeix si X_1, X_2 són independents?

38. Siguin X_1, \dots, X_n n variables aleatòries *iid* (independents i idènticament distribuïdes), amb mitjana μ i desviació típica σ . Definim les noves variables aleatòries

$$Y_i = \sum_{j=1}^i X_j \quad i = 1, \dots, n$$

Calculeu el coeficient de determinació (ρ^2) entre Y_i i Y_k (suposeu sense pèrdua de generalitat que $k \leq i$)

39. Donades n variables X_1, \dots, X_n qualsevol amb variància coneguda i finita, calculeu la mitjana i la variància de la variable aleatòria

$$Y = \sum_{i=1}^n (a_i X_i + b_i)$$

40. Siguin X, Y dues variables aleatòries reduïdes amb correlació $\rho(X, Y) = 0.5$. Així mateix, siguin també Z, W unes altres dues variables reduïdes amb correlació $\rho(Z, W) = 0.75$. Definim el parell de variables U, V de la manera següent

$$(U, V) = \begin{cases} (X, Y) & \text{amb probabilitat } p \\ (Z, W) & \text{amb probabilitat } 1 - p \end{cases}$$

($0 < p < 1$). Calculeu $\rho(U, V)$.

41. Sigui X una variable aleatòria amb distribució uniforme en l'interval $(0, 1)$. Considerem la variable aleatòria $Y = |X - a|$, on $a \in (0, 1)$. Calculeu el coeficient de correlació entre X i Y . Existeix algun valor de a pel qual les dues variables siguin incorrelacionades?

42. Sigui la funció de densitat bivariant

$$f(x, y) = k(x + e^{-y}) \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

Calculeu el coeficient de correlació $\rho(X, Y)$, les rectes de regressió mínim quadràtiques i les corbes de regressió.

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

43. Sigui la funció de densitat bivariant

$$f(x, y) = k(x^3 + y^2) \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

Calculeu el coeficient de correlació $\rho(X, Y)$, les rectes de regressió mínim quadràtiques i les corbes de regressió. Interpreteu els resultats.

44. Una variable aleatòria bidimensional discreta X, Y té la següent funció de probabilitat

$$f(x_i, y_j) = k(i + j) \quad x_i = 1, 2, \dots, n; \quad y_j = 1, 2, \dots, q$$

- Trobeu la constant k .
- Calculeu $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$.
- Calculeu el coeficient de correlació $\rho(X, Y)$

45. Sigui (X, Y) una variable aleatòria bidimensional de la qual es coneix que les rectes de regressió són

$$y = (x + 9)/5 \quad x = (y + 8)/2$$

Trobeu el coeficient de correlació entre X i Y .

46. Sigui (X, Y) una variable aleatòria bidimensional amb funció de densitat

$$f(x, y) = 3y/8 \quad \text{si } y \geq 0, xy < 2, y < 2x$$

($f(x, y) = 0$ en cas contrari). Trobeu les rectes de regressió, el coeficient de correlació i les corbes de regressió.

Funció generatriu de moments i funció característica.

47. Es diu que una variable aleatòria X segueix una funció degenerada o de Dirac, $D(s)$, quan agafa un sol valor $s \in \mathfrak{R}$ amb probabilitat igual a 1, és a dir,

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = s \\ 0 & \text{cas contrari} \end{cases}$$

Obteniu la funció característica, la funció generatriu de moments, el moment d'ordre k respecte a l'origen i la variància.

48. Calculeu la funció característica i la funció generatriu de moments de les següents variables aleatòries:

- a) Una uniforme entre (α, β)
- b) Una exponencial de paràmetre α .
- c) Una normal tipificada.
- d) Una gamma de paràmetres α i r
- e) Una Laplace estàndard
- f) Una Cauchy estàndard

49. Demostreu que la suma de n variables aleatòries Bernouilli de paràmetre p és una binomial de paràmetres n i p , utilitzant com eina, la funció característica.

50. Utilitzant la funció característica tipificada o estàndard que correspongui obteniu la funció característica general de :

- a) Una normal de paràmetres μ i σ .
- b) Una Cauchy de paràmetres μ i λ

51. Sigui la variable aleatòria amb funció de densitat

$$f(x) = 2e^{-2x} \quad \text{si } x > 0$$

Determineu:

- a) Funció característica.
- b) La variància a través de la funció característica
- c) La funció característica de $R = 0,5X + 3$

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

52. Mitjançant l'aplicació de les propietats de les funcions característiques es demana les següents preguntes:

- És la suma de dos variables independents de Poisson de paràmetres 3 i 2, una variable de Poisson de paràmetre 5?
- És la seva diferència una variable de Poisson de paràmetre 1?
- És la variable normal reproductiva respecte a ambdós paràmetres?

53. La funció de densitat conjunta de dues variables X, Y és

$$f(x, y) = 2e^{-(x+y)} \quad \text{si } y > x > 0$$

Trobeu la funció generatriu de moments bivariant i, mitjançant aquesta funció, calculeu el coeficient de correlació $\rho(X, Y)$.

54. Sigui X, Y dues variables aleatòries *iid* amb funció generatriu de moments

$$M(t) = e^{t(t+3)} \quad t \in \mathfrak{R}$$

Calculeu la funció generatriu de moments de la variable $Z = 2X - 3Y + 4$.

55. La funció de densitat conjunta de dues variables aleatòries X, Y és

$$f(x, y) = e^{-x} \quad \text{si } x > y > 0$$

- Trobeu la funció característica bivariant i les marginals.
- Calculeu el coeficient de correlació $\rho(X, Y)$ utilitzant la funció característica.
- Obteniu la funció característica conjunta de les variables $R = 2X + Y - 1$ i $S = X + Y$

56. Sigui X una variable aleatòria uniforme sobre l'interval $(-1/2, 1/2)$. Sigui X_1, X_2, \dots, X_n una successió de variables aleatòries independents també uniformes $(-1/2, 1/2)$.

- Quina és l'expressió de la funció generatriu de moments $M_X(t)$ i de la funció característica $C_X(t)$ de X
- Utilitzant la funció generatriu $M_X(t)$ o la funció característica, demostra que

$$\sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{L} N(0, 1) \quad \text{quan } n \rightarrow \infty$$

57. Sigui X una variable aleatòria Poisson de paràmetre λ . Sigui X_1, X_2, \dots, X_n una successió de variables aleatòries independents també Poisson de paràmetre λ .

- Troba la funció generatriu de moments $M_X(t)$ i la funció característica $C_X(t)$ de X .

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

- b) Si sabent que $\lambda = 1$, utilitzant la funció generatriu de moments o la funció característica, demostra la convergència en probabilitat de

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p} 1 \text{ quan } n \rightarrow \infty$$

58. Obteniu la funció de densitat o probabilitat de massa, segons el cas, a partir de la funció característica utilitzant el teorema d'inversió en el següent casos.

- a) Distribució de Cauchy estàndard
- b) Distribució Bernouilli

Convergències estocàstiques. Lleis dels grans nombres. Teorema central del límit.

59. Siguin X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatòries uniformes (a, b) independents.

- a) Demostreu que $Y_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ convergeix en probabilitat al valor a
- b) Demostreu que $Y_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ convergeix en probabilitat al valor b

60. Siguin X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatòries independents igualment distribuïdes. Considerem les successions

$$Y_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \quad Z_n = n(1 - Y_n)$$

- a) Prova que si la distribució comú de X_1, X_2, \dots, X_n és uniforme (0,1) aleshores Z_n convergeix en llei a una variable amb distribució exponencial de paràmetre $\alpha=1$.
- b) Prova que si la distribució comú de X_1, X_2, \dots, X_n és exponencial de paràmetre α , aleshores

$$W_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

és també exponencial per a qualsevol n. Discuteix la diferència amb el cas anterior.

61. Consideren la successió de variables aleatòries independents X_1, X_2, \dots, X_n on cada X_n és Poisson de paràmetre $\lambda = 1/n$.

- a) Demostrea la convergència $X_n \rightarrow 0$ especificant el tipus de convergència: ordinària, en probabilitat, en distribució, etc
- b) Estudia si la successió de v. a. $\{Y_n\}$ tal que

$$Y_1 = X_1, Y_2 = X_1 + X_2, \dots, Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \dots$$

també convergeix.

62. Siguin (X, Y) dues variables aleatòries independents amb distribució absolutament continua on $E(X) = 2/3, E(Y) = 7/6, \text{Var}(X) = 2/36$ i $\text{Var}(Y) = 11/36$. Sigui $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ parelles de v.a. independents amb la mateixa distribució que (X, Y). Suposem n gran. Calcula la probabilitat:

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_n + (n/2) < Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)$$

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

63. Quantes vegades s'haurà de llançar un dau per tal que la probabilitat de l'esdeveniment {que la freqüència relativa del nombre de vegades que surt el "6" sigui diferent de 1/6 en menys de 0.01 } sigui més gran o igual que 0.95
- Utilitzant la desigualtat de Tchebychev
 - Utilitzant el teorema de Laplace-Moivre.
 - Comenta els resultats.

64. Sigui una successió de variables aleatòries $\{X_n\}$ definides com:

$$P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = P\left(X_n = -\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

Convergeixen en probabilitat? Convergeixen casi segurament?

65. Sigui una successió de variables aleatòries $\{U_n\}$ amb distribució uniforme $[-n, n]$.
Estudiar si aquesta successió convergeix en distribució.

66. Demostreu que si es compleix:

$$X_n \xrightarrow{d} c$$

aleshores també es cert que

$$X_n \xrightarrow{p} c$$

67. Sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries independents amb funció de massa

$$p_n(k) = P(X_n = k), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

i sigui $p(k) = P(X = k)$ la funció de massa d'una variable aleatòria X . Demostreu que una condició necessària i suficient per a que X_n convergeixi en distribució cap a X és que

$$p_n(k) \rightarrow p(k), \quad \forall k$$

68. Demostreu que la distribució binomial (n, p) convergeix cap a la distribució de Poisson $(\lambda=np)$ quan $n \rightarrow \infty$ i $p \rightarrow 0$.

69. Sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries amb distribució χ^2 amb n graus de llibertat. Demostreu que X_n/n convergeix en distribució a 1.

70. Sigui $\{X_n, n \geq 1\}$ una successió de variables aleatòries amb distribució t Student amb n graus de llibertat. Demostreu que X_n convergeix en distribució a una variable aleatòria X amb distribució normal tipificada.

Distribucions multivariants notables.

71. Siguin X, Y dues variables aleatòries amb distribució $N(0,1)$ i amb coeficient de correlació 0.5. Suposem endemés que la distribució conjunta és normal bivariant.

- Quina és la distribució de la variable aleatòria $Z = 2X - 7Y + 8$?
- Calculeu $P(2Y > X + 2)$.

72. Sigui X una variable aleatòria amb distribució $N(0,1)$. Suposem que la distribució d'una altra variable aleatòria Y condicionada a $X = x$ segueixi una distribució $N(x,1)$. És cert que la variable bidimensional (X, Y) segueix una distribució normal bivariant?

73. Sigui (X, Y) una variable aleatòria amb distribució normal bidimensional de paràmetres

$$\boldsymbol{\mu} = (50 \ 45) \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Trobeu la distribució conjunta de les variables aleatòries

$$U = 4X + Y \quad V = X + 4Y$$

i calculeu les probabilitats $P(U \geq 250)$ i $P(V > 220)$.

74. La distribució conjunta del vector aleatori $\mathbf{X} = (X_1 \ X_2 \ X_3)'$ és $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, on

$$\boldsymbol{\mu} = (1 \ 0 \ 1) \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calculeu la matriu de correlacions.
- Calculeu $P(X_1 + X_2 + X_3 \leq 3)$.
- Trobeu a de manera que la variable $Z = aX_1 + X_2$ sigui estocàsticament independent de X_3 .

75. L'ESA (Agència Europea de l'Espai) està preparant un vol no tripulat a Mart. Siguin X, Y les desviacions en els dos eixos del pla respecte al punt d'aterratge. Suposem que X, Y són dues variables aleatòries independents amb distribució normal, amb esperança zero i variàncies iguals. Quina ha de ser la desviació estàndard màxima permesa per tal de que puguem assegurar amb una probabilitat del 99% de que el vehicle espacial aterrarà a menys de 100 metres del lloc escollit?

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

76. A una població, els quatre grups sanguinis es troben distribuïts segons els percentatges:

$$O = 45\% \quad A = 43\% \quad B = 8\% \quad AB = 4\%$$

- a) Escollim a l'atzar i en condicions independents 10 individus de la població. Calculeu la probabilitat de que quatre siguin del grup O, tres del A, dos del B i un de l'AB.
- b) Quina és la probabilitat de que dels 10 individus al menys un sigui del grup AB?
- c) Quina és la probabilitat de que dels 10 individus al menys un sigui del grup B o del grup AB?

ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

SOLUCIÓ DELS PROBLEMES

Repàs de variable aleatòria.

1. (a) $1/3$ (b) $17/18$ (c) $13/36$ (d) $29/36$

2. $k = 1/2$ (a) $1 - e^{-2}$ (b) $1/2(-e^{-3} + 1)$

3. (a) $F(x) = 1 - \exp\left(\frac{-x^2}{2\alpha^2}\right), x \geq 0$ (b) $E(x) = \alpha\sqrt{\pi/2}$ $Var(x) = \alpha^2(2 - \frac{\pi}{2})$

$Moda(x) = \alpha$ $Med(x) = \alpha\sqrt{2 \ln(2)}$

$$E(|x - Med(x)|) = \alpha\sqrt{2} \left\{ \sqrt{\ln(2)} + \sqrt{\pi} \left[1,5 - 2 F_{N(0,1)}\left(\frac{Med(x)}{\alpha}\right) \right] \right\}$$

(c) $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. (a) $F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t r(x) dx\right), t \geq 0$ (b) $F(t) = 1 - \exp(-ct), t \geq 0$

(c) $r(t) = \frac{t}{\alpha^2}, t \geq 0$

5. $E(x) = Var(x) = 2$

6. $P(X > 6) = e^{-2}, P(X = 3) = 1/2(1 - e^{-1})$

7. (a) $E(x) = \frac{k}{\lambda}, Var(x) = \frac{k}{\lambda^2}$ (b) $E(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\lambda_i}, Var(x) = 2 \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\lambda_i^2} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\lambda_i}\right)^2$

8. $f(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad y \in [0,1], \quad f(z) = 1 \quad z \in [0,1]$

9. $F(y) = P(Y \leq y) = P(F(x) \leq y) = \dots$

10. $E(x) = \frac{43}{32}, Var(x) = 0,844$

Vectors aleatoris: Discrets i continus.

11. (a) $P(x) = 1/2, x = -1, 1; P(y) = \begin{cases} 1/2, & \text{si } y = -1 \\ 1/6, & \text{si } y = 0 \\ 2/6, & \text{si } y = 1 \end{cases}$

$$P(x, y) = \begin{cases} 2/6, & \text{si } (x, y) = (-1, -1) \\ 1/6, & \text{si } (x, y) = (-1, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1) \end{cases}$$

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 1, y \geq 1 \\ 1/2, & \text{si } -1 \leq x < 1, y \geq 1 \text{ o } x \geq 1, -1 \leq y < 0 \\ 1/3, & \text{si } -1 \leq x < 1, -1 \leq y < 1 \\ 2/3, & \text{si } x \geq 1, 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{si } x < -1 \text{ o } y < -1 \end{cases}$$

(b) $P(X + Y = 0 | Y \leq 0) = 1/4, P(X = 1 | X + Y = 2) = 1$

12. (a) $k = 1/12$ (b) $P(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} x \in N - \{0\}; P(y) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{y-1} y \in N - \{0\};$

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - (3/4)^{[y]}) (1 - (2/3)^{[x]}) & \text{si } x, y \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \text{ o } y < 1 \end{cases}; \text{ Si}$$

(c) $P[(3 \leq X \leq 5) \cap (15 \leq Y \leq 20)] = 0,00458$

13. (a) $k = 6/5$

(b) $f(x) = \frac{6}{5} \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) \text{ si } x \in (0, 1); f(y) = \frac{6}{5} \left(y + \frac{1}{3}\right) \text{ si } y \in (0, 1)$

$E(x) = E(y) = 3/5, Var(x) = 2/25, Var(y) = 11/150, (c) \text{ No}$

(d) $f(y | X = x) = \begin{cases} \frac{x^2 + y}{x^2 + 1/2} & \text{si } y \in (0, 1) \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas} \end{cases}$

14. (a)

$$F(x) = \begin{cases} (1 - e^{-x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas} \end{cases}; F(y) = \begin{cases} (1 - e^{-y}) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas} \end{cases}$$

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ o } y \leq 0 \\ (1 - \rho)(1 - e^{-x})^{-\rho} e^{-(x+y)} & \text{si } x \geq y > 0 \\ (1 - \rho)(1 - e^{-y})^{-\rho} e^{-(x+y)} & \text{si } y > x > 0 \end{cases}$$

(c) No, $\rho = 1 \Rightarrow X = Y$

15. Funció 1: (a) $k = 500/3$

$$(b) f(x) = \frac{125}{2} x^2 e^{-5x} \quad \text{si } x \geq 0; \quad f(y) = \frac{8}{3} y^3 e^{-2y} \quad \text{si } y \geq 0$$

$$(c) f(y | X = x) = f(y)$$

Funció 2: (a) $k = 1/8$

$$(b) f(x) = \frac{1}{8} e^{-x} (x^2 + 6) \quad \text{si } x \geq 0; \quad f(y) = \frac{1}{8} e^{-y} (y^3 + 2) \quad \text{si } y \geq 0$$

$$(c) f(y | X = x) = \begin{cases} \frac{(x^2 + y^3) e^{-y}}{x^2 + 6} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas} \end{cases}, \text{ No}$$

16. (a) $k = 1/\pi$

$$(b) F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } y < 0 \\ \frac{1}{\pi} (y \sin x + x \sin y) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2, \quad 0 \leq y \leq \pi/2 \\ \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \sin x + x \sin \frac{\pi}{2} \right) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2, \quad y > \pi/2 \\ \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \sin y + y \sin \frac{\pi}{2} \right) & \text{si } x > \pi/2, \quad 0 \leq y \leq \pi/2 \\ 1 & \text{si } x > \pi/2, \quad y > \pi/2 \end{cases},$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\sin x}{2} + \frac{x}{\pi} & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 1 & \text{si } x > \pi/2 \end{cases}, \quad F(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{\sin y}{2} + \frac{y}{\pi} & \text{si } 0 \leq y \leq \pi/2 \\ 1 & \text{si } y > \pi/2 \end{cases}$$

No son independents

$$(c) E(x) = E(y) = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}, \quad \text{Var}(x) = \text{Var}(y) = \frac{5\pi^2}{192} + \frac{3\pi}{8} - \frac{5}{4}$$

$$(d) P[(X \geq \pi/6) \cap (Y \geq \pi/3)] = 0,1280, \quad P[X \geq \pi/6 | Y \geq \pi/3] = 0,5477$$

$$P[X \geq \pi/6 | Y = \pi/3] = 0,5733, \quad P(X + Y \leq 1) = 0,2927, \quad P(X < \pi/4) = 0,6036$$

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

17. (a) $f(x,y) = 2$ si $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } y < 0 \\ (2-x)x & \text{si } 0 \leq x < 1, y > 1 \\ (2-y)y & \text{si } x > 1, 0 \leq y < 1 \\ 2 \left\{ \frac{-(1-y)^2}{2} + x \left(1 - \frac{x}{2} \right) \right\} & \text{si } 1 \leq x + y \leq 2 \\ 2xy & \text{si } 0 \leq x + y < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

(b) $f(x) = 2(1-x)$ si $x \in (0, 1)$; $f(y) = 2(1-y)$ si $y \in (0, 1)$; No

(c) $P[1/2 \leq Y \leq 7/8 | X = 1/3] = 0,25$

18. (a) $X \sim H(49, 25, 6)$; $P(Y = 0) = 0,27, P(Y = 1) = 0,73$;

$f(x,y) = f(y)f(x|y)$ on $f(x|y=0) \sim H(40, 20, 6)$ (b) No

19. (a) $k = 2/9$

(b) $f(x) = 2x$ $0 \leq x \leq 1$; $f(y) = \frac{y}{2}$ $0 \leq y \leq 2$; $f(z) = \frac{2}{9}z$ $0 \leq z \leq 3$

$f(x,y) = xy$ $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$, $f(x,z) = \frac{4}{9}xz$ $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 3$;

$f(y,z) = \frac{1}{9}yz$ $0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$, Si

(c) $f(x,y|z) = xy$ $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, (0 \leq z \leq 3)$

(d) $P[(X < 1/2) \cap (Y > 1/2) \cap (1 < Z < 2)] = 0,078125$

20. (a) $k = 1/243$

(b) $f(x) = \frac{x}{9} e^{-(x/3)}$ $x \geq 0$; $f(y) = \frac{y}{9} e^{-(y/3)}$ $y \geq 0$; $f(z) = \frac{1}{3} e^{-(z/3)}$ $z \geq 0$

$f(x,y) = \frac{xy}{81} e^{-(x+y)/3}$ $x, y \geq 0$, $f(y,z) = \frac{y}{27} e^{-(y+z)/3}$ $y, z \geq 0$;

$f(x,z) = \frac{x}{27} e^{-(x+z)/3}$ $x, z \geq 0$, Si, Si (c) $P(X < Y < Z) = 7/108$

21. (a) $f(x,y) = 2$ si $0 \leq y \leq x \leq 1$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } y < 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq y, 0 \leq x < 1 \\ y(2x-y) & \text{si } 0 \leq y \leq x < 1 \\ y(2-y) & \text{si } x > 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

(b) $f(x) = 2x \quad 0 \leq x \leq 1; f(y) = 2(1-y) \quad 0 \leq y \leq 1$

$$f(x|y) = \frac{1}{(1-y)} \quad \text{si } x \in [y, 1], (y \in [0, 1]); f(y|x) = \frac{1}{x} \quad \text{si } y \in [0, x], (x \in [0, 1])$$

(c) $E(X) = 2/3; E(Y) = 1/3; \text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1/18;$

(d) $E(Y|X = x) = \frac{x}{2} \quad (x \in [0, 1]); \text{Var}(Y|X = x) = \frac{x^2}{12} \quad (x \in [0, 1])$

(e) $F(x,y) = P\{(\max\{U_1, U_2\} \leq x) \cap (\min\{U_1, U_2\} \leq y)\} = \dots$

22. (a) $k = 1/120$ (b) $P[(0 < X \leq 2) \cap (Y = 3)] = 0$ (c) $P(X \geq 1) = 85/120$

23. (a) $X \sim B(3, 0.5); P(y) = \begin{cases} 1/2, & \text{si } y = 0 \\ 1/4, & \text{si } y = 1 \\ 1/8, & \text{si } y = 2, 3 \end{cases}$

$$P(x,y) = \begin{cases} 2/8, & \text{si } (x,y) = (2, 0) \\ 1/8, & \text{si } (x,y) = (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (3, 0) \end{cases}$$

$$F(x|y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Canvi de variables.

24. $P(X/Y < 2) = 0,8522$

25. $a = \pm\sqrt{2}$

26. (a) $f(u, v) = \alpha\beta \exp\left\{-\frac{u}{v+1}\left(\frac{\alpha v}{a} + \frac{\beta}{b}\right)\right\} \frac{u}{ab(v+1)^2} \quad u, v > 0;$

(b) En general no

(c) $P((U \leq 1) \cap (V \geq 2)) =$

$$\frac{\alpha\beta}{a\beta - b\alpha} \left[\frac{a}{\alpha} \left(1 - \exp\left\{-\frac{\alpha}{a}\right\} \right) + \frac{3ab}{(2\alpha b + \beta a)} \left(\exp\left\{-\frac{1}{3a}\left(2\alpha + \frac{\beta a}{b}\right)\right\} - 1 \right) \right]$$

27. $f(r) = 2(1-r) \quad 0 \leq r \leq 1; E(R) = 1/3$

28. (a) $F(y) = 1 - e^{-\alpha y^\beta} \quad y > 0 \quad \alpha, \beta > 0, \quad f(y) = \alpha\beta e^{-\alpha y^\beta} y^{\beta-1} \quad y > 0 \quad \alpha, \beta > 0$

(b) $F(z) = P(Z \leq, z) = P(\min\{Y_1, \dots, Y_n\} \leq, z) = \dots$

29. (a) $f(w, z) = n(n-1)f_X(z)f_X(w)[F_X(w) - F_X(z)]^{n-2} \quad a \leq z \leq w \leq b$

(b.1) $f(r) = n(n-1)(1-r)r^{n-2} \quad 0 < r < 1$

(b.2) $f(q) = (n-1)(1-q)^{n-2} \quad 0 \leq q \leq 1$

30. (a) $F(z) = \begin{cases} z \ln\left(\frac{1+z}{z}\right) & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{si } z \leq 0 \end{cases}$

(b) No existeix la $E(Z)$

31. (a) $f(v, w) = \frac{1}{4v} e^{2-\sqrt{w/v}} \quad \frac{1}{v} \leq w \leq \frac{9}{v}; \quad w > 4v$

32. (a) $f(z, w) = \begin{cases} \frac{z}{2\pi} e^{-\frac{1}{2z^2}} & \text{si } z \geq 0, \quad 0 < w < 2\pi \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas} \end{cases}$

$$f(z) = \begin{cases} z e^{-\frac{1}{2z^2}} & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases} ; f(w) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 < w < 2\pi \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas} \end{cases}$$

Coefficient de correlació, regressió lineal i corba de regressió.

33. (22) $\text{Corr}(X, Y) = -0,4286$; (23) $\text{Corr}(X, Y) = -0,6271$

34. (17) $\text{Corr}(X, Y) = -0,5$; (21) $\text{Corr}(X, Y) = 0,5$

35. $\text{Corr}(U, V) = -5/7$

36. $-1/3 \leq \text{Cov}(X, Y) \leq 1/3$; (a.1) $\text{Cov}(X, Y) = 0$; (a.2) $\text{Cov}(X, Y) = -1/3$

(b) $\text{Cov}(X, Z) = 0$ si k és parell

37.
$$\text{Corr}(Y_1, Y_2) = \frac{\text{Var}(X_1) - \text{Var}(X_2)}{\sqrt{(\text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2))^2 - 4\text{Cov}^2(X_1, X_2)}}$$

Si X_1, X_2 són independents:
$$\text{Corr}(Y_1, Y_2) = \frac{\text{Var}(X_1) - \text{Var}(X_2)}{\text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2)}$$

38. $\rho^2(Y_i, Y_k) = k/i$

39.
$$E(Y) = \sum_{i=1}^n (a_i \mu_i + b_i) \quad \text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i>j} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j)$$

40. $\rho(U, V) = -0,25p + 0,75$

41.
$$\rho(X, Y) = \frac{\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{12}}{\sqrt{\frac{1}{12} \left(-a^4 + 2a^3 - a^2 + \frac{1}{12} \right)}}$$
; $a = 0,5$

42.
$$\rho(X, Y) = \frac{e(-e+3)}{\sqrt{\frac{1}{2} [(13e^2 - 6e + 2)(81e^2 - 224e + 48)]}}$$

rectes M.Q.O.:
$$Y|X \quad y - k \left(\frac{5}{4} - \frac{2}{e} \right) = \frac{e(-e+3)}{13e^2 - 6e + 2} \left(x - k \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2e} \right) \right)$$

$$X|Y \quad x - k \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2e} \right) = \frac{e(-e+3)}{81e^2 - 224e + 48} \left(y - k \left(\frac{5}{4} - \frac{2}{e} \right) \right)$$

corbes de regressió:
$$Y|X \quad y = E(Y|X = x) = \frac{1 + \frac{x}{2} - \frac{2}{e}}{1 + x - \frac{1}{e}} \quad (0 < x < 1)$$

$$X|Y \quad x = E(X|Y = y) = \frac{\frac{e^{-y}}{2} + \frac{1}{3}}{e^{-y} + \frac{1}{2}} \quad (0 < y < 1)$$

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

43. $\rho(X, Y) = -0,24$;

rectes M.Q.O.: $Y|X \quad y - \frac{9}{14} = \frac{-9/490}{2086/25725} \left(x - \frac{22}{35} \right)$

$X|Y \quad x - \frac{22}{35} = \frac{-9/490}{497/6860} \left(y - \frac{9}{14} \right)$

corbes de regressió: $Y|X \quad y = E(Y|X = x) = \frac{3(2x^3 + 1)}{4(3x^3 + 1)} \quad (0 \leq x \leq 1)$

$X|Y \quad x = E(X|Y = y) = \frac{2(5y^2 + 2)}{5(4y^2 + 1)} \quad (0 \leq y \leq 1)$

44. (a) $k = \frac{2}{nq(n+q+2)}$

(b) $E(x) = \frac{kqn(1+n)}{4} \left\{ (1+q) + \frac{2+4n}{3} \right\}$; $E(y) = \frac{kqn(1+q)}{4} \left\{ (1+n) + \frac{2+4q}{3} \right\}$,

$Var(x) = \frac{kqn(1+n)}{4} \left\{ n(1+n) + \frac{(1+q)(1+2n)}{3} \right\} - \left[\frac{kqn(1+n)}{4} \left\{ (1+q) + \frac{2+4n}{3} \right\} \right]^2$

$Var(y) = \frac{kqn(1+q)}{4} \left\{ q(1+q) + \frac{(1+n)(1+2q)}{3} \right\} - \left[\frac{kqn(1+q)}{4} \left\{ (1+n) + \frac{2+4q}{3} \right\} \right]^2$

(c) $Cov(X, Y) =$

$\frac{kqn(1+q)(1+n)}{6} (n+q+1) - \left[\frac{kqn(1+n)}{4} \left\{ (1+q) + \frac{2+4n}{3} \right\} \right] \left[\frac{kqn(1+q)}{4} \left\{ (1+n) + \frac{2+4q}{3} \right\} \right]$

45. $Corr(X, Y) = \frac{1}{\sqrt{10}}$

46. No existeix la $Corr(X, Y)$. Tampoc les rectes de regressió.

corbes de regressió: $Y|X \quad y = E(Y|X = x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x & (0 < x < 1) \\ \frac{4}{3x} & (x \geq 1) \end{cases}$

$X|Y \quad x = E(X|Y = y) = \frac{4+y^2}{4y} \quad (0 < y < 2)$

Funció generatriu de moments i funció característica.

47. $M_X(t) = e^{ts} \quad t \in \mathfrak{R}; \quad C_X(t) = e^{its} \quad t \in \mathfrak{R}; \quad \mu'_k = s^k; \quad \text{var}(X) = 0$

48. a) $M_X(t) = \frac{e^{t\beta} - e^{t\alpha}}{t(\beta - \alpha)} \quad t \in \mathfrak{R} \quad C_X(t) = \frac{e^{it\beta} - e^{it\alpha}}{it(\beta - \alpha)} \quad t \in \mathfrak{R}$

b) $M_X(t) = -\alpha/(t - \alpha) \quad t < \alpha \quad C_X(t) = -\alpha/(it - \alpha) \quad t \in \mathfrak{R}$

c) $M_X(t) = \exp(t^2/2) \quad t \in \mathfrak{R} \quad C_X(t) = \exp(-t^2/2) \quad t \in \mathfrak{R}$

d) $M_X(t) = (1 - it/\alpha)^{-r} \quad t < \alpha \quad C_X(t) = (1 - t/\alpha)^{-r} \quad t \in \mathfrak{R}$

e) $M_X(t) = \frac{1}{1-t^2} \quad |t| < 1 \quad C_X(t) = \frac{1}{t^2 + 1} \quad t \in \mathfrak{R}$

f) No es calculen directament. No existeix $M_X(t)$ $C_X(t) = \exp(-|t|) \quad t \in \mathfrak{R}$

49. Teòric

50. a) $C_X(t) = e^{i\mu t - \frac{t^2 \sigma^2}{2}} \quad t \in \mathfrak{R} \quad b) C_X(t) = e^{i\mu t - |t|^\lambda} \quad t \in \mathfrak{R}$

51. a) $C_X(t) = 2(2-it)^{-1} \quad t \in \mathfrak{R}$

b) $\text{var}(X) = 1/4$

c) $C_R(t) = \frac{4e^{it^3}}{(4-it)} \quad t \in \mathfrak{R}$

52. a) Sí b) No c) Sí

53. $M_{(X,Y)}(t_1, t_2) = 2 / \{(t_2 - 1)(t_1 + t_2 - 2)\} \quad t_2 < 1, t_1 + t_2 < 2$

$\rho(X, Y) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

54. $M_Z(t) = e^{t(13t+1)} \quad t \in \mathfrak{R}$

55. a) $C_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \frac{1}{(it_1 + it_2 - 1)(it_1 - 1)} \quad t_1, t_2 \in \mathfrak{R}$

$C_X(t) = \frac{1}{(it-1)^2} \quad t \in \mathfrak{R} \quad C_Y(t) = \frac{-1}{(it-1)} \quad t \in \mathfrak{R}$

b) $\rho(X, Y) = 1/\sqrt{2}$

c) $C_{(R,S)}(t_1, t_2) = \frac{e^{-it_2}}{(3it_1 + 2it_2 - 1)(2it_1 + it_2 - 1)} \quad t_1, t_2 \in \mathfrak{R}$

56. a) $M_X(t) = \frac{e^{t/2} - e^{-t/2}}{t} \quad t \in \mathfrak{R}; \quad C_X(t) = \frac{e^{it/2} - e^{-it/2}}{it} \quad t \in \mathfrak{R}$

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I

57. a) $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$ $t \in \mathfrak{R}$; $C_X(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$ $t \in \mathfrak{R}$;

58. Calculeu la integral

**Convergències estocàstiques. Lleis dels grans nombres.
Teorema central del límit.**

59. Teòric

60. a) Convergeix en probabilitat b) No convergeix

61. 0.5

62. a) $n \geq 27778$ b) $n \geq 5336$

63. Convergeix en probabilitat i casi segurament al valor zero

64. Convergeix en distribució al valor $\frac{1}{2}$

65. Teòric

66. Teòric

67. Teòric: Apliqueu el resultat de l'exercici anterior

68. Teòric

69. Teòric, Apliqueu propietats del quocient de successions de v.a.

70. Teòric

Distribucions multivariants notables.

71. (a) $Z \sim N(8, \sqrt{39})$ (b) $P(2Y > X + 2) = 0,1251$

72. Si, $(X, Y) \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$

73. $(U, V) \sim N\left(\begin{pmatrix} 245 \\ 230 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 116 & 74 \\ 74 & 86 \end{pmatrix}\right)$ $P(U \geq 250) = 0,3228$; $P(V > 220) = 0,8599$

74. (a) $R = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \end{pmatrix}$

(b) $P(X_1 + X_2 + X_3 \leq 3) = 0,5871$

(c) $a = -1$

75. ≤ 33

76. (a) $P(O = 4, A = 3, B = 2, AB = 1) = 0,0105$

(b) $P(AB \geq 1) = 0,3352$

(c) $P(\{B \geq 1\} \cup \{AB \geq 1\}) = 0,7215$

PROBLEMES ESTADÍSTICA MATEMÀTICA I