

EXAMEN D'ESTADÍSTICA MATEMÀTICA II

10 de gener del 2000

1. Sigui X_1, \dots, X_n una mostra aleatòria simple de mida n d'una variable aleatòria X amb densitat

$$f(x) = \frac{3x^{1/2}}{2\theta^{3/2}} \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x) \quad \theta \in (0, 2]$$

- a) Calculeu $E(\bar{X}_n)$ i $\text{var}(\bar{X}_n)$. Deduïu un estimador no esbiaixat U_n de θ . Quin és el seu error quadràtic?
- b) Determineu un estimador del màxim de versemblança S_n de θ . Calculeu la llei de S_n , $E(S_n)$ i $\text{var}(S_n)$. Deduïu un estimador no esbiaixat V_n de θ . Compareu els estimadors U_n i V_n . Quin és preferible?

2. Tenim una observació d'una variable aleatòria amb densitat

$$f(x) = \frac{2a}{1-a} x^{\frac{3a-1}{1-a}} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

on $a \in (0, 1)$. Fixem dos valors del paràmetre $0 < a_1 < a_0 < 1$.

- a) Trobeu un test UMP per contrastar les hipòtesis

$$H_0 : a = a_0 \quad \text{en front de} \quad H_1 : a = a_1$$

Estudieu el cas $\alpha = 0.01$, $a_0 = \frac{1}{3}$ i $a_1 = \frac{1}{4}$.

- b) Es pot estendre el test anterior per contrastar

$$H_0 : a = \frac{1}{3} \quad \text{en front de} \quad H_1 : a < \frac{1}{3}?$$

3. a) Suposem que tenim 100 blancs i que amb un arc tirem 5 fletxes a cada blanc. Anotem el nombre de dianes que fem a cada blanc i els resultats són:

nº de dianes	0	1	2	3	4	5
nº de blancs	3	14	33	33	12	5

Contrasteu si aquestes dades provenen d'una llei binomial.

- b) Canviem d'arc i tornem a provar amb 50 blancs, amb els següents resultats:

nº de dianes	0	1	2	3	4	5
nº de blancs	5	12	19	10	4	0

Indiqueu com podem contrastar la nostra habilitat amb els dos arcs.