WAVELETS EN ESTADÍSTICA

A. Miñarro

Barcelona, 2003

0.1. Introducció

Primer algunes definicions:

- Sigui V^0 l'espai vectorial de funcions constants a [n,n+1) $\forall n \in \mathbf{Z}$.
- Sigui $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1) \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$

A partir de la funció $\varphi(x)$, que anomenarem **funció pare**, és possible construir una base de V^0 amb les funcions

$$\{\varphi(x-n)\}_{n\in\mathbf{Z}}.$$

Considerem ara el producte escalar en $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$

$$(f,g) = \int f(t)g(t)dt.$$

La base anterior és ortonormal respecte el producte escalar anterior,

$$(\varphi(x-n), \varphi(x-m)) = \delta_{n,m}$$

Tota funció $f \in V^0$ pot ser expressada com $f(x) = \sum_n c_n\varphi(x-n)$ amb $c_n = (f, \varphi(x-n)) = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

A la figura 1 pot observar-se la construcció amb Mathematica i la forma d'algunes funcions $\varphi(x-n)$.

Una funció $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ pot aproximar-se per la projecció ortogonal sobre V^0.

$$P_{V^0}f(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n\varphi(x-n)$$

Considerem ara l'operador $\lambda_a : \mathrm{L}^2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ definit per

$$\lambda_a f(x) = f(a^{-1}x),$$

on $a > 0$.

Definim ara $V^j = \lambda_{2^{-j}}V^0$ per $j \in \mathbf{Z}$. V^j és ara l'espai de funcions constants als intervals $[2^{-j}n, 2^{-j}(n+1]$, $\forall n \in \mathbf{Z}$.

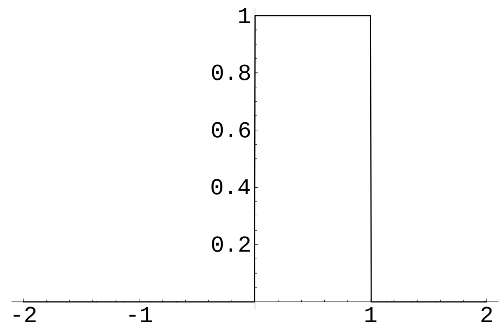
Per exemple V^1 és l'espai de funcions constants a $[n/2,(n+1)/2]$, V^2 és l'espai de funcions constants a $[n/4,(n+1)/4]$ $\forall n \in \mathbf{Z}$.

És immediat que

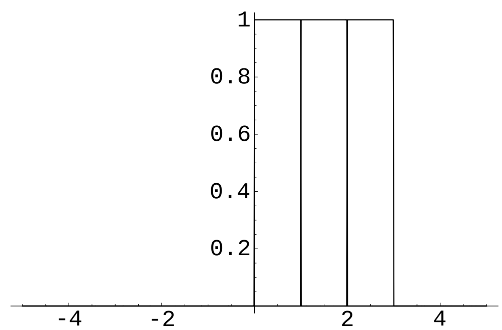
$$\cdots \subset V^{-2} \subset V^{-1} \subset V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \cdots$$

Donada $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$, les projeccions $P_{V^j}f$ poden ser considerades aproximacions de f amb diferents nivells de resolució.

```
In[1]:=  φ[x_] = UnitStep[x (1 - x)];

In[2]:=  Plot[φ[x], {x, -2, 2}]
```



```
Out[2]=  - Graphics -

In[3]:=  Plot[{φ[x], φ[x - 1], φ[x - 2]}, {x, -5, 5}]
```



```
Out[3]=  - Graphics -
```

Figura 1: Representació amb Mathematica de les funcions $\varphi(x-n)$.

Unes bases ortonormals dels espais V^j venen donades per $\{2^{j/2}\varphi(2^j x - n)\}_{n\in\mathbf{Z}}$. Pot comprovar-se que

$$\varphi(2^j x - n) = \begin{cases} 1 & x \in [2^{-j}n, 2^{-j}(n+1)) \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

Farem servir la notació $\varphi_n^j(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - n)$.

Donat que $V^0 \subset V^1$, la funció pare pot expressar-se com

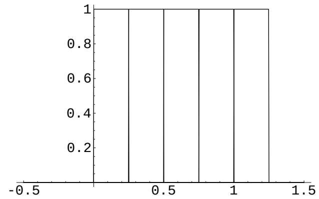
$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \alpha_n \sqrt{2}\,\varphi(2x-n).$$

Els coeficients venen donats per

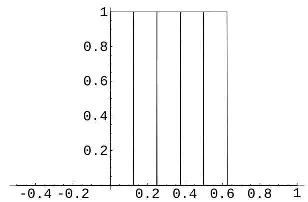
$$\alpha_n = (\sqrt{2}\varphi(2x-n), \varphi(x)) = \sqrt{2}\int_{n/2}^{(n+1)/2} \varphi(x)dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(\delta_{n,0} + \delta_{n,1}),$$

resultant

```
In[11]:= Plot[{φ[2^2 x], φ[2^2 x - 1], φ[2^2 x - 2], φ[2^2 x - 3], φ[2^2 x - 4]}, {x, -0.5, 1.5}]
```



```
Out[11]= - Graphics -
In[13]:= Plot[{φ[2^3 x], φ[2^3 x - 1], φ[2^3 x - 2], φ[2^3 x - 3], φ[2^3 x - 4]}, {x, -0.5, 1}]
```



```
Out[13]= - Graphics -
```

Figura 2: Alguns elements de les bases (no ortonormals) dels espais V^2 i V^3 .

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1),$$

tal i com pot comprovar-se a la figura 3.

Es diu que $\varphi(x)$ verifica una funció d'escala (*scaling function*).

Fixem-nos que

$$\varphi_n^j(x) = 2^{j/2}(\varphi(2^{j+1}x-2n) + \varphi(2^{j+1}x-2n-1)) = 2^{-1/2}(\varphi_{2n}^{j+1}(x) + \varphi_{2n+1}^{j+1}(x))$$

De tot el que hem vist fins ara podem considerar que

$$\mathrm{L}^2(\mathbf{R}) = V^j + V^{j+1} + V^{j+2} + \cdots$$

a partir de qualsevol valor j.

Els subespais i les sumes **no** són ortogonals, la forma d'arreglar-ho es definint uns nous subespais, **l'espais Wavelet** , on W^j és el complement ortogonal de V^j en V^{j+1},

$$V^{j+1} = V^j \oplus W^j$$

Una base de W^0 s'obté buscant aquells elements de V^1 que siguin ortogonals als elements de V^0. La condició és:

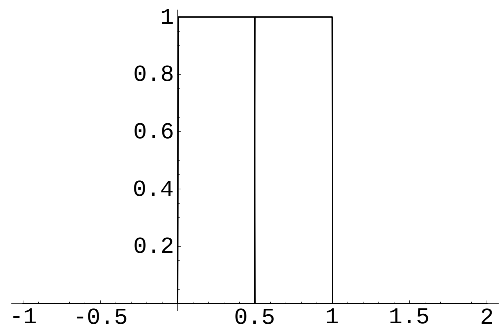
$$0 = (\textstyle\sum_n c_n\sqrt{2}\varphi(2x-n), \varphi(x-m)) = \sum_n c_n\sqrt{2}(\varphi(2x-n), \varphi(x-m)) =$$

$$\textstyle\sum_n c_n\sqrt{2}(\varphi(2x-n), \varphi(2x-2m) + \varphi(2x-(2m+1))) =$$

$$\textstyle\sum_n c_n\sqrt{2}\{(\varphi(2x-n), \varphi(2x-2m)) + (\varphi(2x-n), \varphi(2x-(2m+1))) =$$

$$\textstyle\sum_n c_n\sqrt{2}\frac{\delta_{n,2m}+\delta_{i,2m+1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{2m} + c_{2m+1}),$$

In[14]:= Plot[{φ[x], φ[2 x], φ[2 x - 1]}, {x, -1, 2}]



Out[14]= - Graphics -

Figura 3: $\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1)$.

per tot m.

Per tant són aquells que verifiquen: $c_0 + c_1 = 0, c_2 + c_3 = 0$, etc. Una base s'obté definint la **funció mare**

$$\chi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1)$$

o en forma equivalent

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1/2) \\ -1 & x \in [1/2, 1) \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases} .$$

I la base de W^0 és $\{\chi(x-n)\}_{n\in\mathbf{Z}}$. Les bases ortonormals de W^j les indicarem per $\{\chi_n^j(x)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ on

$$\chi_n^j(x) = 2^{j/2}\chi(2^j x - n).$$

En el nostre exemple

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1/2) \\ -1 & x \in [1/2, 1) \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases} ,$$

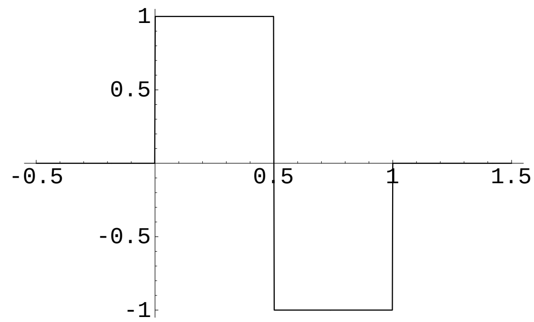
i

$$\chi_n^j(x) = \begin{cases} 2^{j/2} & 2^{-j}n \leq x < 2^{-j}(n+1/2) \\ -2^{j/2} & 2^{-j}(n+1/2) \leq x < 2^{-j}(n+1) \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases} .$$

Fixem-nos que

$$\chi_n^j(x) = 2^{j/2}(\varphi(2^{j+1}x - 2n) - \varphi(2^{j+1}x - 2n - 1)) = 2^{-1/2}(\varphi_{2n}^{j+1}(x) - \varphi_{2n+1}^{j+1}(x)).$$

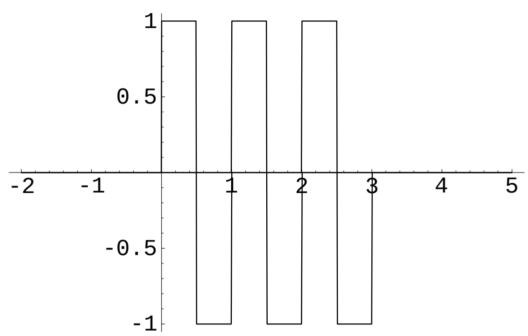
```
In[15]:= χ[x_] = φ[2 x] - φ[2 x - 1];

In[20]:= Plot[χ[x], {x, -0.5, 1.5}]
```



```
Out[20]= - Graphics -
```

Figura 4: Funció mare $\chi(x)$.

```
In[22]:= Plot[{χ[x], χ[x - 1], χ[x - 2]}, {x, -2, 5}]
```



```
Out[22]= - Graphics -
```

Figura 5: Alguns elements de la base del espai W^0 .

Tenim que

$$\mathrm{L}^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W^j$$

o a partir de un J qualsevol

$$\mathrm{L}^2(\mathbf{R}) = V^J \bigoplus_{j=J}^{\infty} W^j$$

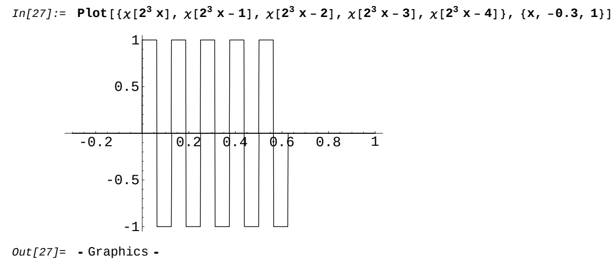


Figura 6: Alguns elements de la base (no ortonormal) de l'espai W^3 .

0.2. Un exemple simplificat

Anem a considerar un exemple més simplificat on només ens interessi l'interval [0,1]. La base de V^0 és $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1) \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$, que verifica la funció d'escala $\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1)$. Considerem les bases dels subespais V^j donades per

$$\varphi_n^j(x) = \varphi(2^j x - n) \;\; 0 \leq n \leq 2^j - 1,$$

-fixem-nos que hem suprimit la condició de normalitat per tal de simplificar l'exemple- i les bases de W^j per

$$\chi_n^j = \chi(2^j x - n) \;\; 0 \leq n \leq 2^j - 1$$

on

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1/2) \\ -1 & [1/2,1) \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases},$$

o en forma equivalent

$$\chi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1)$$

és una base de W^0.

Imaginem ara que disposem d'una serie de dades, per exemple uns valors mostrals d'una funció mostrejats a intervals regulars dintre de l'interval [0,1]. Utilitzarem les següents dades que simplifiquen l'exemple en evitar nombres decimals

64 48 16 32 56 56 48 24

Podem representar les dades a través del gràfic

Anem a manipular les dades segons un algorisme que consisteix en calcular mitjanes dos a dos dels valors de la fila superior, i situar aquestes mitjanes

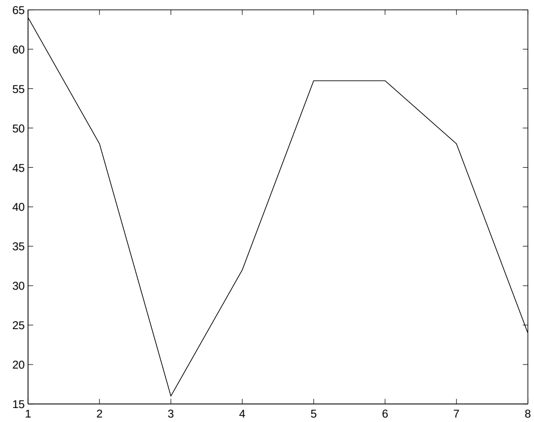


Figura 7: Dades originals sense transformar

al principi de la següent fila i completar la fila amb les desviacions de cada primer element de cada parell amb la seva corresponent mitjana i aquests darrers elements es mantenen en successives fileres. Es més fàcil veureu amb l'exemple

64	48	16	32	56	56	48	24
56	24	56	36	8	-8	0	12
40	46	16	10	8	-8	0	12
43	-3	16	10	8	-8	0	12

Com es pot comprovar el primer element de la darrera fila es la mitjana global de les 8 dades.

Anem a relacionar aquest procés amb els wavelets. Donat que tenim 8 punts, considerarem l'espai V^3, l'espai de funcions constants a intervals a [0,1) amb possibles salts a 1/8, 2/8, ...

$$64\varphi_0^3 + 48\varphi_1^3 + 16\varphi_2^3 + 32\varphi_3^3 + 56\varphi_4^3 + 56\varphi_5^3 + 48\varphi_6^3 + 24\varphi_7^3 \in V^3$$

Donat que es verifiquen les relacions

$$\varphi_0^2 = \varphi_0^3 + \varphi_1^3 \ , \ \chi_0^2 = \varphi_0^3 - \varphi_1^3 \Rightarrow$$

$$\varphi_0^3 = \frac{1}{2}(\varphi_0^2 + \chi_0^2) \quad \text{i } \varphi_1^3 = \frac{1}{2}(\varphi_0^2 - \chi_0^2),$$

el procés anterior el podem representar per

$$56\varphi_0^2 + 24\varphi_1^2 + 56\varphi_2^2 + 36\varphi_3^2 + 8\chi_0^2 - 8\chi_1^2 + 0\chi_2^2 + 12\chi_3^2 =$$

$$40\varphi_0^1 + 46\varphi_1^1 + 16\chi_0^1 + 10\chi_1^1 + 8\chi_0^2 - 8\chi_1^2 + 0\chi_2^2 + 12\chi_3^2 =$$

$$43\varphi_0^0 - 3\chi_0^0 + 16\chi_0^1 + 10\chi_1^1 + 8\chi_0^2 - 8\chi_1^2 + 0\chi_2^2 + 12\chi_3^2$$

Fixem-nos que resulta un element de $V^3 = V^0 \oplus W^0 \oplus W^1 \oplus W^2$.

Evidentment el procés és reversible, a partir dels coeficients wavelet podem recuperar les dades originals. L'avantatge de la representació és que permet diferents manipulacions. Podem mantenir el nivell de resolució i filtrar aquells coeficients menys significatius, per exemple aquells que en valor absolut no superin un llindar ϵ. Imaginem que $\epsilon = 5$, això fa que el coeficient -3 sigui transformat en 0 i que en reconstruir les dades obtinguem el següent

67	51	19	35	53	53	45	21
59	27	53	33	8	-8	0	12
43	43	16	10	8	-8	0	12
43	0	16	10	8	-8	0	12

Podem comparar amb les dades originals.

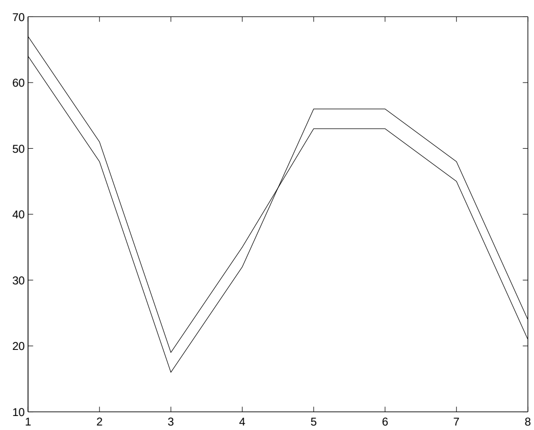


Figura 8: Reconstrucció basada en 6 coeficients no nuls

Inclús podríem considerar $\epsilon = 9$, transformem en 0 els coeficients -3, 8 i -8, i tot i això les dades que recuperem són

59 59 27 27 53 53 45 21

Evidentment des del punt de vista de la compressió de dades és interessant treballar amb un vector o matrius amb una gran part de coeficients iguals a 0.

Alternativament podríem optar per treballar amb un menor nivell de resolució, per exemple limitar-nos a

$V^2 = V^0 \oplus W^0 \oplus W^1$

En el nostre exemple seria equivalent a considerar l'element

$$43\varphi_0^0 - 3\chi_0^0 + 16\chi_0^1 + 10\chi_1^1 \in V^2$$

que reconstruït ens donaria

56 24 56 36

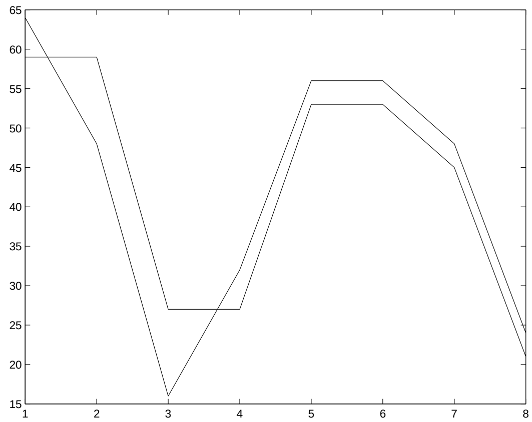


Figura 9: Reconstrucció basada en 4 coeficients no nuls

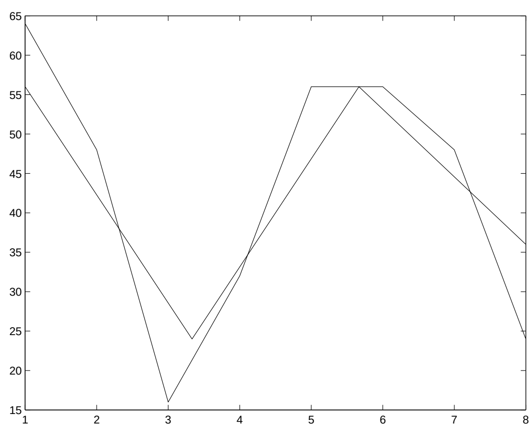


Figura 10: Reconstrucció basada en V2

0.3. La transformada wavelet discreta

A estadística freqüentment estem interessats en funcions generades per conjunt de dades, suposem que disposem del vector de dades

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{2^k-1}\}$$

amb longitud 2^k. Aquest vector pot ser associat a una funció constant a intervals a l'interval [0,1) de la següent manera

$$f(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} x_n I_{\{n/2^k \leq x < (n+1)/2^k\}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{2^k-1} x_n \varphi(2^k x - n) = \sum_{n=0}^{2^k-1} x_n 2^{-k/2} \varphi_n^k(x)$$

Aplicant l'algorisme anterior però dividint per $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ en lloc de per 1/2 obtenim els coeficients de la descomposició

$$f(x) = c_{00}\varphi(x) + \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n=0}^{2^j-1} d_{jn}\chi_j^n(x)$$

Coeficients $[c_{00}, d_{00}, \ldots, d_{k-1\ 2^{k-1}-1}]$ que denominem la transformada wavelet discreta de X respecte la funció wavelet mare χ.

Si per exemple l'apliquem sobre el vector de dades (1 , 0 , -3 , 2 , 1 , 0 , 1 ,2) el resultat que obtenim és:

$$\begin{bmatrix} c_{00} \\ d_{00} \\ d_{10} \\ d_{11} \\ d_{20} \\ d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1/4 \\ -5/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

i per tant

$$f(x) = 1/2\varphi(x) - 1/2\chi_0^0(x) + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\chi_0^1(x) - \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\chi_1^1(x) +$$

$$1/4\chi_0^2(x) - 5/4\chi_1^2(x) + 1/4\chi_2^2(x) - 1/4\chi_3^2(x)$$

Considerem ara la funció $f(x) = e^{-10x} \cdot \sin(100x)$, aquesta funció presenta, dintre de l'interval (0,1) una gran regió amb valor pràcticament nul. Presenta dificultats si volem fer una representació de la mateixa basada en una mostra de pocs punts. Veiem la representació que s'obté amb una mostra de 50 punts uniformement distribuïts a l'interval (0,1) comparada amb una mostra de 256 punts.

Suprimim els coeficients menors de 0,05 i ens queden 27 coeficients wavelet no nuls.

Si el llindar el situem a 0,01 la reconstrucció s'efectua amb 70 coeficients no nuls.

0.4. MRA

Òbviament les funcions wavelet de Haar presenten alguns inconvenients, entre els més importants hem de destacar el fet de la seva discontinuïtat i els problemes que aquesta comporta. Una forma de generalitzar el treball amb wavelets és a través del MRA (Multiresolution analysis), una eina per la construcció de diferents bases de Wavelets.

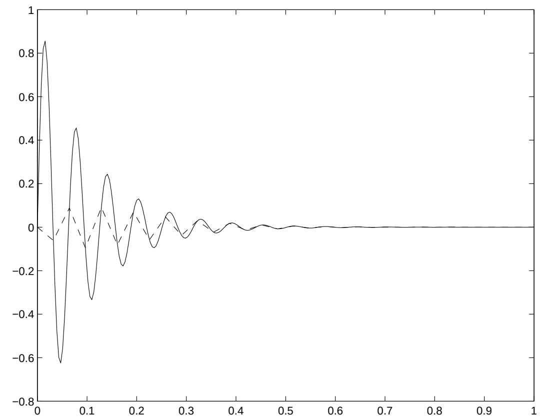


Figura 11: Aproximació de la f(x) amb 256 (línia contínua) i 32 (línia discontínua) punts uniformement espaiats

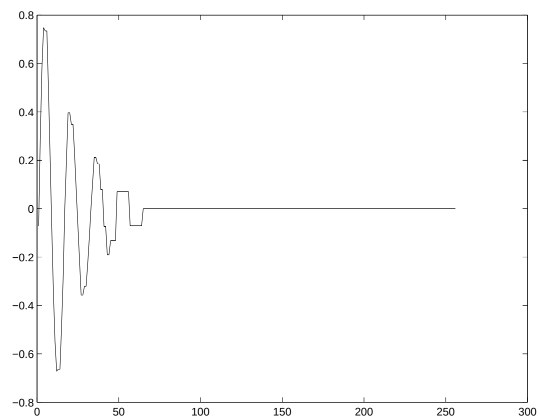


Figura 12: Reconstrucció basada en 27 coeficients wavelet

Tot comença per l'elecció d'una adequada funció pare o funció d'escala $\varphi(x)$. Generalment es busca que satisfaci certes condicions de continuïtat i derivabilitat així com un bon comportament a les cues.Però la condició bàsica és que $\{\varphi(x-n)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ sigui una base d'un espai de referència V^0.

Anomenem un **MRA** a una seqüència creixent de subespais tancats de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}), V^j, j \in \mathbf{Z}$

$$\cdots \subset V^{-1} \subset V^0 \subset V^1 \subset \cdots$$

que satisfan

1. $\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V^j$ és dens en $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$.
2. $\bigcap_j V^j = 0$
3. $f(x) \in V^j \Longleftrightarrow f(2x) \in V^{j+1}$

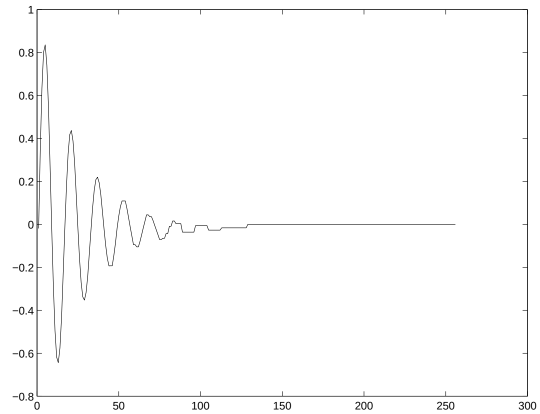


Figura 13: Reconstrucció basada en 70 coeficients wavelet

La primera condició implica que per tota funció $f \in L^2(\mathbf{R})$ i per tot $\epsilon > 0$ és possible trobar un $j \in \mathbf{Z}$ tal que $\exists g \in V^j$ amb $\|f - g\| < \epsilon$. La darrera condició ens diu que els subespais V^j i V^{j+1} són similars en el sentit de que són versions a diferent escala. En efecte, si V^j és generat per $\varphi_n^j(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - n)$ $n \in \mathbf{Z}$, llavors V^{j+1} és generat per $\varphi_n^{j+1}(x) = \sqrt{2}\varphi_n^j(2x)$.

Es immediat que $\varphi_n^j(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - n)$ és una base ortonormal de V^j , en efecte

$$(2^{j/2}\varphi(2^j x - m), 2^{j/2}\varphi(2^j x - n)) =$$
$$= 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2^j x - m)\varphi(2^j x - n)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s - m)\varphi(s - n)ds = \delta_{m,n}$$

A l'anàlisi amb els wavelets de Haar, l'espai de referència V^0 és el format per les funcions de funcions constants a [n,n+1), el nostre objectiu és generalitzar aquest cas.

Donat que $V^0 \subset V^1$, tot element de V^0 pot expressar-se com una combinació lineal de la base $\sqrt{2}\varphi(2x - n)$ $n \in \mathbf{Z}$ de V^1, en particular

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} h(n)\sqrt{2}\varphi(2x - n) \tag{1}$$

Considerem ara el complement ortogonal de V^j en V^{j+1}

$$V^{j+1} = V^j \oplus W^j. \tag{2}$$

Busquem ara una funció $\chi(x)$ que anomenarem funció mare i que serà ortogonal a $\varphi(x - n)$ per tot n. Donat que $V^0 \subset V^1$ i $W^0 \subset V^1$

$$\chi(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} g(n)\sqrt{2}\varphi(2x - n) \tag{3}$$

Pot demostrar-se que

$$g(n) = (-1)^n h(1 - n) \tag{4}$$