

El Ladrón de Bagdad

Un ladrón en Bagdad fue encarcelado en un calabozo con tres puertas; A, B y C. Si sale por la puerta A, accede a un túnel largo, por el que regresa al punto de partida al cabo de 3 días. Si sale por la puerta B, accede a un túnel corto, por el que regresa al punto de partida al cabo de 1 día. Si sale por la puerta C consigue la libertad.

El ladrón quiere escapar y elige la puerta A, B y C para salir, con independencia y con la misma probabilidad. Hallar el número medio de días, hasta que alcanza la libertad.

Solución:

Sea T la variable aleatoria, "número de días antes de que consiga la libertad".

$$T = 3X_A + X_B$$

donde X_A y X_B es el número de salidas por la puerta A y B respectivamente, antes de escapar. Por simetría, ambas son variables aleatorias igualmente distribuidas, por lo tanto $E(X_A) = E(X_B)$.

Sea N el número de intentos de escapar antes de salir por la puerta C, $N = X_A + X_B$. La variable aleatoria N sigue una distribución Geométrica o de Pascal de parámetro $p = \frac{1}{3}$, probabilidad de salir por la puerta C. Su esperanza será:

$$E(N) = \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

Por lo tanto

$$2 = E(N) = E(X_A) + E(X_B) = 2E(X_A) \Rightarrow 1 = E(X_A) = E(X_B)$$

Entonces:

$$E(T) = 3E(X_A) + E(X_B) \Rightarrow E(T) = 4 \text{ días}$$