

Un punt de vista matemàtic de la física de partícules

Alumne: Dionís Remón
Professor: Dra. Pilar Bayer.

Introducció

La matemàtica i la física van tenir en el passat un llenguatge que, amb el temps, s'ha anat diferenciant. L'origen de d'aquest treball se situa en la voluntat de comprendre cert capítols de la física des del punt de vista matemàtics. L'objectiu d'aquest treball és proporcionar un diccionari que tradueixi termes que s'usen en física de partícules a l'idioma de les representacions de grups de Lie i d'àlgebres de Lie. També es presenta una introducció a les àlgebres de Clifford, atès que són objectes matemàtics bàsics a l'hora d'estudiar l'univers. Els grups espinorials, que sorgeixen com elements de norma 1 d'aquestes àlgebres, intervenen en el model estàndard, que actualment és àmpliament acceptat com a model per a representar l'univers. Els grups de Lie **Spin**(2) i **Spin**(3) permeten per a comprendre l'electromagnetisme, i els moments angulars de les partícules fonamentals. L'altre grup calibrador que conforma el model estàndard és el grup **SU**(3). Aquest últim grup està lligat a les càrregues de color que porten els quarks.

Com a referències per a les àlgebres de Clifford s'ha usat el llibre [Lou03], entre altres. La referència bàsica que s'ha seguit per als grups i àlgebres de Lie és el llibre [Sim96]. Per a les representacions dels grups de Lie i de les àlgebres de Lie s'han usat les referències [Ful91] i [Sim96]. Les referències per a relacionar el llenguatge matemàtic i el llenguatge físic han estat bàsicament [Geo99] i [Mul04]. Atesa la gran popularitat de la física de partícules s'han emprat també recursos existents en internet.

El treball està estructurat en tres blocs. El primer, format pels capítols 1 i 4 dona una breu introducció al grups espinorials. En el capítol 4, realitza un estudi dels grups espinorials des del punt de vista de la teoria dels grups de Lie i de les àlgebres de Lie.

El segon bloc està format pels capítols 2 i 3. Els dos capítols comprenen una introducció als conceptes de grups de Lie i àlgebres de Lie, així com també a les seves representacions. Concretament, el capítol 2 tracta de les definicions i resultats bàsics dels grups de Lie i de les àlgebres de Lie, així com també dels tors maximals i de les subàlgebres de Cartan. El capítol 3, s'orienten a la teoria de les representació dels grups de Lie i de les àlgebres de Lie.

El tercer bloc, format pel capítol 5, conté una introducció a la física de partícules, des del punt de vista del llenguatge matemàtic estudiat en els capítols precedents.

Índex

1	Àlgebres de Clifford i grups espinorials	9
1.1	Àlgebres de Clifford: definicions i conceptes bàsics	9
1.2	Teoremes de classificació d'àlgebres Clifford . . .	15
1.2.1	Àlgebres de Clifford reals	16
1.2.2	Àlgebres de Clifford complexes	20
1.3	Àlgebres de Clifford de dimensió petita	21
1.3.1	L'àlgebra $\mathcal{Cl}_{(2,0)}$	22
1.3.2	L'àlgebra $\mathcal{Cl}_{(3,0)}$	23
1.3.3	L'àlgebra $\mathcal{Cl}_{(3,1)}$	26
1.4	Grups espinorials: definicions i conceptes bàsics .	27
1.5	Grups espinorials complexos	33
1.6	Grups espinorials reals de dimensió baixa	35
1.6.1	El grup $\mathbf{Spin}(2, \mathbb{R})$	35
1.6.2	El grup $\mathbf{Spin}(3, \mathbb{R})$	36
1.6.3	El grup $\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^4, (3, 1))$	40

2	Grups de Lie i àlgebres de Lie	43
2.1	Definicions i conceptes bàsics	43
2.1.1	Representacions lineals	46
2.1.2	L'àlgebra de Lie del grup $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$	48
2.1.3	L'àlgebra de Lie del grup $\mathbf{SU}(3)$	49
2.2	Àlgebres de Lie nilpotents i àlgebres de Lie resol- ubles	53
2.3	Tors maximals d'un grup de Lie	55
2.4	Forma de Killing	58
2.5	Teoremes d'estructura per a àlgebres de Lie	60
2.6	Subàlgebres de Cartan	64
2.7	El grup de Weyl d'un grup de Lie	77
2.7.1	Diagrames de Cartan-Stiefel	77
2.7.2	Definicions i resultats bàsics	78
2.7.3	Grup de Weyl de $\mathbf{SU}(3)$	80
2.7.4	Grup de Weyl de $\mathbf{SU}(n)$	81
2.8	Tipus de sistemes d'arrels	82
3	Representacions de grups semisimples compactes	85
3.1	Introducció a la teoria de xarxes	85
3.2	Xarxes d'arrels i xarxes de pesos	87
3.3	Fórmula de Weyl d'integració	95
3.4	Pesos maximals	96
3.5	Fórmula dels caràcters de Weyl	100

3.6	Representacions del grup $\mathbf{SU}(n)$	103
3.6.1	Representacions del grup $\mathbf{SU}(3)$	105
4	Representacions dels grups espinorials	113
4.1	El grup espinorial com a grup de Lie	113
4.2	Representacions dels grups de Lie $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ i $\mathbf{Spin}(n, \mathbb{C})$	117
4.2.1	Cas parell: $\mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$	117
4.2.2	Cas senar $\mathbf{SO}(2n + 1, \mathbb{C})$	119
4.2.3	Cas del grup $\mathbf{Spin}(3, \mathbb{C})$	120
4.3	Caràcters dels grups espinorials	120
5	Aplicacions a la física de partícules	125
5.1	Conceptes i definicions bàsics	125
5.1.1	Funcions d'ona	126
5.1.2	Variables dinàmiques simultàniament me- surables amb precisió	128
5.2	Models de l'univers	130
5.2.1	Introducció	130
5.2.2	Teories proposades	130
5.3	Model estàndard	132
5.3.1	Partícules	133
5.3.2	Partícules portadores de matèria	135
5.3.3	Partícules portadores de força	136
5.3.4	El bosó de Higgs	137
5.4	Barions	138

5.4.1	Introducció	139
5.4.2	Matèria bariònica	140
5.4.3	Càrrega i raresa	141
5.4.4	Ressonàncies hadròniques	142
5.4.5	Nombres quàntics de les partícules consti- tuents	143
5.5	Diccionari	145

Capítol 1

Àlgebres de Clifford i grups espinorials

En aquest capítol donarem una breu introducció a les àlgebres de Clifford i als grups espinorials. Aquests grups sorgeixen de forma natural de les àlgebres de Clifford com a grup dels elements de norma la unitat.

1.1 Àlgebres de Clifford: definicions i conceptes bàsics

En aquesta secció K denotarà un cos (de característica diferent de 2) i V un K -espai vectorial de dimensió finita. Denotarem per (V, q) un espai vectorial amb una forma quadràtica q associada. Si no diem el contrari, q serà no degenerada.

1.1.1 Definició. Un vector $v \in V$ és isòtrop si compleix $q(v) = 0$. Altrament es diu que és anisòtrop.

1.1.2 Definició. Sigui A una K -àlgebra. Es diu que A és compatible amb (V, q) si A conté V com a subespai i si $x^2 = q(x) \cdot 1 \in$

A , per a tot $x \in V$. Si identifiquem $K \cdot 1 = K$, la igualtat d'abans passa a ser $x^2 = q(x)$.

Donada una àlgebra A compatible amb l'estructura quadràtica de (V, q) està estretament lligada a l'estructura d'àlgebra. Observem que

$$q(x + y) - q(x) - q(y) = (x + y)^2 - x^2 - y^2 = xy + yx.$$

D'aquesta manera, si B denota la forma bilineal sobre V associada a q es té la igualtat $2B(x, y) = xy + yx$, per a tot $x, y \in V$. En particular, x i y són ortogonals en V si, i només si, $xy = -yx$ en A . A continuació esmentem resultats sobre compatibilitat.

1.1.3 Lema. *Siguin A una K -àlgebra compatible amb (V, q) . Siguí $0 \neq v \in V$. El vector v és invertible en A si, i només si, v és un vector anisòtrop en V .*

DEMOSTRACIÓ. Si v és anisòtrop, la igualtat $v^2 = q(v)$ implica que l'invers de v és $v/q(v)$. Recíprocament, suposem que $uv = 1, u \in A$. Llavors $q(v)u = v^2 \cdot u = v \cdot vu = v$, i $v \neq 0$ implica que $q(v) \neq 0$. $\square$

1.1.4 Lema. *Siguin A una K -àlgebra compatible amb (V, q) , i $x \in V$ un vector anisòtrop. Llavors la reflexió s_x en l'hiperplà ortogonal a x , definida per*

$$s_x(u) = u - \frac{2B(u, x)}{q(x)} \cdot x$$

amb $u \in V$, és igual a menys la conjugació per x sobre V en l'àlgebra A .

DEMOSTRACIÓ.

$$\begin{aligned} s_x(u) &= u - \frac{2B(u, x)}{q(x)} \cdot x = u - \frac{xu + ux}{q(x)} \cdot x \\ &= u - u - xu \cdot \frac{x}{q(x)} = -xux^{-1}. \end{aligned}$$

$\square$

1.1.5 Definició. Una K -àlgebra C compatible amb (V, q) es diu que és una àlgebra de Clifford per a (V, q) si compleix la següent propietat universal: per a tota K -àlgebra A compatible amb (V, q) , existeix un únic homomorfisme d'àlgebres $\phi : C \rightarrow A$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & A \\ \uparrow & \nearrow & \\ V & & \end{array}$$

és commutatiu. Denotarem aquesta àlgebra per $C(V, q)$.

1.1.6 Teorema. *Donats un K -espai vectorial V i una forma quadràtica q , aleshores l'àlgebra de Clifford $C(V, q)$ existeix i és única, llevat d'isomorfismes.*

DEMOSTRACIÓ. Siguin

$$T(V) = \bigoplus_{i \geq 0} V^{\otimes i}$$

l'àlgebra tensorial de V i $I(q)$ l'ideal generat pels elements $x \otimes x - q(x) \cdot 1 \in T(V)$. Definim $C(V) := C(V, q) = T(V)/I(q)$. D'ara endavant si no hi ha confusió obviarem q . Evidentment podem considerar V dintre de $C(V)$ mitjançant la imatge per l'aplicació injectiva de $V^{\otimes 1} = V$. A partir de la definició, és obvi que $C(V)$ és una àlgebra de Clifford per a (V, q) . Notem que V genera $C(V)$ com a anell i com a K -àlgebra.

Observem que $T(V)$ és una àlgebra graduada i tots els generadors $x \otimes x - q(x)$ de $I(q)$ estan en la suma de components homogènies de $T(V)$ de grau parell. D'aquesta manera, $C(V)$ té l'estructura heretada de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -àlgebra graduada. Sigui $T^i(V) = V^{\otimes i}$. La imatge per l'aplicació quocient de $\oplus T^i(V)$ amb i parell és denota $C(V)^0$ i s'anomena la subàlgebra parella de $C(V)$. De manera similar, la imatge de $\oplus T^i(V)$ amb i senar, s'anomena la part senar de $C(V)$, que no és subàlgebra. Tenim les relacions

$$C(V)^i C(V)^j \subseteq C(V)^{i+j},$$

on i, j i $i + j$ s'interpreten mòdul 2. $\square$

1.1.7 Observació. Si q és la forma quadràtica nul·la sobre V , aleshores $I(q)$ és l'ideal bilateral generat per $x \otimes x$ ($x \in V$) en $T(V)$. D'aquesta manera, l'àlgebra de Clifford $C(V, 0)$ coincideix amb l'àlgebra exterior $\bigwedge(V)$.

Prenem una base ortogonal $\{x_1, \dots, x_n\}$ de V , que es pot demostrar que existeix pel mètode de Gram-Schmidt.

Per les observacions fetes anteriorment, $x_i x_j = -x_j x_i$ ($i \neq j$), i $x_i^2 = q(x_i)$ en $C(V)$. D'aquesta manera, el K -espai vectorial $C(V)$ està generat pels productes de la forma $\{x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n} : e_i = 0, 1\}$. En particular, $\dim_K C(V) \leq 2^n$, on $n = \dim_K V$.

1.1.8 Lema. *Si $(V, q), (V', q')$ són espais quadràtics, existeix una aplicació exhaustiva $f : C(V \perp V') \rightarrow C(V) \hat{\otimes} C(V')$ en la categoria de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -àlgebres graduades.*

DEMOSTRACIÓ. La regla $\varepsilon(x, x') = x \otimes 1 + 1 \otimes x'$, amb $x \in V$ i $x' \in V'$, clarament defineix una aplicació injectiva de $V \perp V'$ en $C(V) \hat{\otimes} C(V')$. Així, doncs,

$$\begin{aligned} (x \otimes 1 + 1 \otimes x')^2 &= x^2 \otimes 1 + 1 \otimes x'^2 + \\ &\quad + (x \otimes 1)(1 \otimes x') + (1 \otimes x')(x \otimes 1) \\ &= q(x) + q(x') + x \otimes x' + (-1) \cdot x \otimes x' \\ &= (q \perp q')(x, x'). \end{aligned}$$

Per la propietat universal de les àlgebres de Clifford, existeix un únic homomorfisme $f : C(V \perp V') \rightarrow C(V) \hat{\otimes} C(V')$, el qual coincideix amb ε sobre $V \perp V'$. Es pot comprovar que f és homogèni de grau zero. Resta provar només l'exhaustivitat de f . Com a K -àlgebra, $C(V) \hat{\otimes} C(V')$ està generada pels elements de la forma $x \otimes 1$ i $1 \otimes x'$, ($x \in V, x' \in V'$). Com que tots estan en la imatge de f , concloem que f és exhaustiva. $\square$

1.1.9 Teorema. Si (V, q) és un espai quadràtic de dimensió n , llavors $\dim C(V) = 2^n$. En particular, si $\{x_1, \dots, x_n\}$ és una base ortogonal per a (V, q) , llavors $\{x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n} : e_i = 0, 1\}$ és una base de $C(V)$.

DEMOSTRACIÓ. Demostrem-ho per inducció.

Sigui $n = 1$. Considerem $V = \langle a \rangle$, un espai quadràtic de dimensió 1 amb matriu (a) , i base (x) . En aquest cas, $T(V) = K[x]$, i $I(q)$ és l'ideal generat per $x^2 - a$. Per tant, $C(V) = K[x]/(x^2 - a)$. Aleshores, $C(V) = K(\sqrt{a})$, si $a \notin K^{*2}$, una base possible és $(1, \sqrt{a})$, entès com a K -espai vectorial.

En general, per a $n > 1$, prenem una descomposició ortogonal $V = U \perp U'$, on U' té dimensió 1. Tenim $C(V) = C(U \perp U')$ i per 1.1.8 s'aplica en $C(U) \hat{\otimes} C(U')$, tenim que $\dim C(V) \geq \dim C(U') \dim C(U)$. Per hipòtesis d'inducció, $\dim C(U) = 2^{n-1}$, i pel que hem vist en el cas $n = 1$, $\dim C(U') \geq 2$. Per tant, ja que hem vist anteriorment que $\dim_K C(V) \leq 2^n$, tenim que $\dim_K C(V) = 2^n$. $\square$

1.1.10 Corol·lari. $\dim C(V)^0 = \dim C(V)^1 = 2^{n-1}$.

DEMOSTRACIÓ. Donada una base ortogonal $\{x_1, \dots, x_n\}$ sobre (V, q) , la subàlgebra $C(V)^0$ està generada per $\{x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n} : \sum e_i \in 2\mathbb{Z}\}$. A més, aquests elements formen una base per a $C(V)^0$ com a K -espai vectorial. El nombre d'elements d'aquestes bases és clarament 2^{n-1} .

Un raonament similar és vàlid per a $C(V)^1$. $\square$

Siguin V, V' espais quadràtics, i σ una isometria injectiva de V en V' . El caràcter universal de $C(V)$ diu que existeix un únic homomorfisme, que denotem $C(\sigma)$, de $C(V)$ a $C(V')$ que estén σ . Podem dir que C és un functor que va de la categoria dels K -espais quadràtics a la categoria de les K -àlgebres graduades.

Es pot comprovar que es comporta bé respecte d'extensions de cossos. És a dir, si $K \subseteq L$ és una extensió de cossos, llavors, per a qualsevol altre L -espai quadràtic (V, q) , existeix un isomorfisme natural $L \otimes_K C(V, q) \simeq C(L \otimes_K V, L \otimes_K q)$, on $L \otimes_K q$ denota la forma quadràtica, que pot prendre valors en L , obtinguda per extensió natural de q .

A continuació estudiem els homomorfismes principals de les àlgebres de Clifford.

1.1.11 Definició. Sigui C una K -àlgebra. Es defineix l'àlgebra oposada de C , denotada C^{op} , com la K -àlgebra formada pels mateixos elements de C amb el producte com $a \cdot^{op} b = b \cdot a$.

1.1.12 Definició. Sigui A una àlgebra. El centre de l'àlgebra A és el conjunt d'elements

$$Z(A) = \{x \in A \mid xa = ax \text{ per a tot } a \in A\}.$$

1.1.13 Definició. Sigui A una K -àlgebra.

- Es diu que A és una àlgebra central si $Z(A) = K$.
- Es diu que A és una àlgebra simple si A no té ideals bilaterals propis.
- Es diu que A és una àlgebra central simple (CSA) sobre K si satisfà les dues condicions anteriors.

1.1.14 Definició. L'automorfisme $\alpha : C(V) \rightarrow C(V)$ definit de manera que si $v \in V$, aleshores $\alpha(v) = -v$, s'anomena la involució principal de l'àlgebra de Clifford.

1.1.15 Definició. L'automorfisme $\beta : C(V) \rightarrow C(V)$ definit de manera que si $u = u_1 \cdots u_n \in C(V)$, aleshores $\beta(u) = u_n \cdots u_1$, s'anomena l'antiautomorfisme principal de l'àlgebra de Clifford.

1.1.16 Definició. La conjugació de Clifford, o simplement la conjugació, és l'antiautomorfisme $\gamma := \beta \circ \alpha = \alpha \circ \beta$.

1.1.17 Proposició. *Existeix un únic automorfisme d'àlgebres α sobre $C(V)$ que és menys la identitat sobre V . L'homomorfisme α és d'ordre 2.*

DEMOSTRACIÓ. Usant la unicitat de la construcció de l'àlgebra de Clifford, però considerant l'aplicació $\alpha : V \rightarrow C(V)$ definida per $\alpha(v) = -v$. $\square$

1.1.18 Proposició. *Existeix un únic antiautomorfisme β , d'àlgebres sobre $C(V)$ que és la identitat sobre V . L'antiautomorfisme β és d'ordre 2 (llevat quan $\dim V = 1$), i estabilitza $C(V)^0$ i $C(V)^1$.*

DEMOSTRACIÓ. Denotem C^{op} l'àlgebra oposada de $C := C(V)$. Llavors, clarament, C^{op} és també compatible amb q . D'aquesta manera, existeix un únic homomorfisme $\beta : C \rightarrow C^{op}$ que és la identitat sobre V . L'homomorfisme β és un epimorfisme i, per tant, un isomorfisme. Si identifiquem C^{op} amb C , com a conjunt, llavors β equival exactament a un antiuautomorfisme sobre C que és la identitat sobre V . Tenim, a més, $\beta(u_1 \cdots u_m) = u_m \cdots u_1$, la qual cosa implica la resta de la proposició. $\square$

1.1.19 Observació. Les aplicacions β i γ coincideixen sobre l'àlgebra parella, $C(V)^0$.

1.2 Teoremes de classificació d'àlgebres Clifford

En aquesta secció donarem algunes propietats de les àlgebres de Clifford, tant reals com complexes. Bàsicament explicarem els teoremes de classificació d'aquestes àlgebres.

1.2.1 Àlgebres de Clifford reals

Començarem estudiant les àlgebres de Clifford reals donant alguns teoremes de classificació.

Anomenarem àlgebra real de Clifford $\mathcal{Cl}_{(r,s)}$, l'àlgebra de Clifford $C(\mathbb{R}^n, q)$ on

$$q = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - (x_{r+1}^2 + \cdots + x_{r+s}^2)$$

i $r+s = n$. Notarem la norma euclídea definida, amb el polinomi q tenint $s=0$, com $\|\cdot\|$. Veurem que totes les àlgebres de Clifford reals poden construir-se a partir de les àlgebres $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$, on $\mathbb{H}$ denota l'àlgebra de quaternions reals de Hamilton.

1.2.1 Lema. *Es tenen els isomorfismes següents:*

- (i) $\mathcal{Cl}_{(0,1)} \simeq \mathbb{C}$
- (ii) $\mathcal{Cl}_{(1,0)} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$
- (iii) $\mathcal{Cl}_{(0,2)} \simeq \mathbb{H}$
- (iv) $\mathcal{Cl}_{(2,0)} \simeq M(2, \mathbb{R})$
- (v) $\mathcal{Cl}_{(1,1)} \simeq M(2, \mathbb{R})$.

1.2.2 Lema. *Es tenen els isomorfismes següents:*

$$\begin{aligned}\mathcal{Cl}_{(0,n+2)} &\simeq \mathcal{Cl}_{(n,0)} \otimes \mathcal{Cl}_{(0,2)}, \\ \mathcal{Cl}_{(n+2,0)} &\simeq \mathcal{Cl}_{(0,n)} \otimes \mathcal{Cl}_{(2,0)}, \\ \mathcal{Cl}_{(s+1,r+1)} &\simeq \mathcal{Cl}_{(s,r)} \otimes \mathcal{Cl}_{(1,1)},\end{aligned}$$

per a tot $n, s, r \geq 0$.

DEMOSTRACIÓ. Sigui $q_{0,n+2}(x) := -\|x\|^2$, on $\|x\|$ denota la norma euclidiana estàndard sobre $\mathbb{R}^{n+2}$, i sigui $(e_1, \dots, e_{n+2})$ una base ortonormal per a $\mathbb{R}^{n+2}$. Sigui també $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ un conjunt

de generadors de $\mathcal{C}\ell_{(n,0)}$ i sigui $\{e'_1, e''_2\}$ un conjunt de generadors de $\mathcal{C}\ell_{(0,2)}$. Definim una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{(n,0)} \otimes \mathcal{C}\ell_{(0,2)}$ per la seva acció sobre la base $(e_1, \dots, e_{n+2})$ com segueix:

$$f(e_i) = \begin{cases} e'_i \otimes e''_1 e''_2, & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ 1 \otimes e''_{i-n}, & \text{si } n+1 \leq i \leq n+2. \end{cases}$$

Observem que per a $1 \leq i, j \leq n$, se satisfà

$$f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i) = (e'_i e'_j + e'_j e'_i) \otimes (e''_1 e''_2)^2 = -2\delta_{ij} 1 \otimes 1,$$

atès que $e''_1 e''_2 = -e''_2 e''_1$, $(e''_1)^2 = -1$, i $e'_i e'_j = -e'_j e'_i$, per a tot $i \neq j$, i $(e'_i)^2 = 1$, per a tot i amb $q \leq u \leq n$. També, per a $n+1 \leq i, j \leq n+2$, es té que

$$f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i) = 1 \otimes (e''_{i-n} e''_{j-n} + e''_{j-n} e''_{i-n}) = -2\delta_{ij} 1 \otimes 1,$$

i

$$f(e_i)f(e_k) + f(e_k)f(e_i) = 2e'_i \otimes (e''_1 e''_2 e''_{n-k} + e''_{n-k} e''_1 e''_2) = 0,$$

per a $1 \leq i, j \leq n$ i $n+1 \leq k \leq n+2$ (atès que $e_{n-k} = e''_1$ o $e''_{n-k} = e''_2$). D'aquesta manera, tenim que

$$f(x)^2 = -\|x\|^2 \cdot 1 \otimes 1 \text{ per a tot } x \in \mathbb{R}^{n+2},$$

i, per la propietat universal de $\mathcal{C}\ell_{(0,n+2)}$, existeix una única aplicació d'àlgebres

$$\tilde{f} : \mathcal{C}\ell_{(0,n+2)} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{(n,0)} \otimes \mathcal{C}\ell_{(0,2)}.$$

L'aplicació $\tilde{f}$ és exhaustiva ja que $\text{Im}(\tilde{f})$ conté el conjunt de generadors. Per tant,

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{C}\ell_{(0,n+2)}) &= 2^{n+2} = 2^n \cdot 2 = \dim(\mathcal{C}\ell_{(n,0)}) \dim(\mathcal{C}\ell_{(0,2)}) = \\ &= \dim(\mathcal{C}\ell_{(n,0)} \otimes \mathcal{C}\ell_{(0,2)}), \end{aligned}$$

i $\tilde{f}$ és un isomorfisme. La demostració de la segona identitat és anàloga. Per a la tercera, tenim que

$$q = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - (x_{r+1}^2 + \cdots + x_{r+s}^2),$$

i sigui $(e_1, \dots, e_{r+1}, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{s+1})$ una base ortogonal de $\mathbb{R}^{r+s+2}$, per tant $q_{r+1,s+1}(e_i) = +1$ i $q_{r+1,s+1}(\epsilon_j) = -1$ per $i = 1, \dots, r+1$ i $j = 1, \dots, s+1$. Per tant, sigui $\{e'_1, \dots, e'_r, \epsilon'_1, \dots, \epsilon'_s\}$ un conjunt de generadors de $\mathcal{C}\ell_{(r,s)}$ i sigui $\{e''_1, \epsilon''_1\}$ el conjunt de generadors de $\mathcal{C}\ell_{(1,1)}$. Definim una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^{r+s+2} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{(r,s)} \otimes \mathcal{C}\ell_{(1,1)}$ per l'acció sobre les bases com segueix:

$$f(e_i) = \begin{cases} e'_i \otimes e''_1 \epsilon''_1, & \text{per a } 1 \leq i \leq r, \\ 1 \otimes e''_1, & \text{per a } i = r+1, \end{cases}$$

i

$$f(\epsilon_k) = \begin{cases} \epsilon'_j \otimes e''_1 \epsilon''_1, & \text{per a } 1 \leq j \leq s, \\ 1 \otimes \epsilon''_1, & \text{per a } j = s+1. \end{cases}$$

Podem comprovar que

$$f(x)^2 = q_{r+1,s+1}(x) \cdot 1 \otimes 1, \text{ per a tot } x \in \mathbb{R}^{r+s+2}.$$

La demostració acaba igual que en l'apartat anterior. $\square$

1.2.3 Proposició. *Es tenen els isomorfismes d'àlgebres següents:*

$$\begin{aligned} M(m, \mathbb{R}) \otimes M(n, \mathbb{R}) &\simeq M(mn, \mathbb{R}), \\ M(n, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} K &\simeq M(n, K), \\ \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \\ \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} &\simeq M(2, \mathbb{C}), \\ \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} &\simeq M(4, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

amb $m, n \geq 0$ i $K = \mathbb{C}$ o bé $K = \mathbb{H}$.

1.2.4 Teorema. (Periodicitat de Cartan-Bott) *Per a tot $n \geq 0$, tenim els isomorfismes següents:*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\ell_{(0,n+8)} &\simeq \mathcal{C}\ell_{(0,n)} \otimes \mathcal{C}\ell_{(0,8)}, \\ \mathcal{C}\ell_{(n+8,0)} &\simeq \mathcal{C}\ell_{(n,0)} \otimes \mathcal{C}\ell_{(8,0)}. \end{aligned}$$

A més,

$$\mathcal{Cl}_{(0,8)} \simeq \mathcal{Cl}_{(8,0)} \simeq M(16, \mathbb{R}).$$

DEMOSTRACIÓ. Pel lema 1.2.2, es tenen els isomorfismes

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}_{(0,n+2)} &\simeq \mathcal{Cl}_{(n,0)} \otimes \mathcal{Cl}_{(0,2)}, \\ \mathcal{Cl}_{(n+1,0)} &\simeq \mathcal{Cl}_{(0,n)} \otimes \mathcal{Cl}_{(2,0)}, \end{aligned}$$

i, d'aquesta manera,

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}_{(0,n+8)} &\simeq \mathcal{Cl}_{(n+6,0)} \otimes \mathcal{Cl}_{(0,2)} \simeq \mathcal{Cl}_{(0,n+4)} \otimes \mathcal{Cl}_{(2,0)} \otimes \mathcal{Cl}_{(0,2)} \simeq \cdots \simeq \\ &\mathcal{Cl}_{(0,n)} \otimes \mathcal{Cl}_{(2,0)} \otimes \mathcal{Cl}_{(0,2)} \otimes \mathcal{Cl}_{(2,0)} \otimes \mathcal{Cl}_{(0,2)}. \end{aligned}$$

Atès que $\mathcal{Cl}_{(0,2)} \simeq \mathbb{H}$ i $\mathcal{Cl}_{(2,0)} \simeq M(2, \mathbb{R})$ tenim per la proposició 1.2.3 que

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}_{(2,0)} \otimes \mathcal{Cl}_{(0,2)} \otimes \mathcal{Cl}_{(2,0)} \otimes \mathcal{Cl}_{(0,2)} &\simeq \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes M(2, \mathbb{R}) \otimes M(2, \mathbb{R}) \simeq \\ &M(4, \mathbb{R}) \otimes M(4, \mathbb{R}) \simeq M(16, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

El segon isomorfisme es prova de la mateixa manera. $\square$

1.2.5 Observació. Així, doncs, pels teoremes anteriors, les àlgebres de Clifford reals associades a $(n, 0)$ i $(0, n)$ són donades per la taula següent:

n	$\mathcal{Cl}_{(n,0)}$	$\mathcal{Cl}_{(0,n)}$
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
1	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$
2	$\mathbb{H}$	$M(2, \mathbb{R})$
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M(2, \mathbb{C})$
4	$M(2, \mathbb{H})$	$M(2, \mathbb{H})$
5	$M(4, \mathbb{C})$	$M(2, \mathbb{H}) \otimes M(2, \mathbb{H})$
6	$M(8, \mathbb{R})$	$M(4, \mathbb{H})$
7	$M(8, \mathbb{R}) \oplus M(8, \mathbb{R})$	$M(8, \mathbb{C})$

A més totes les altres són determinades per la periodicitat de Boot; és a dir,

$$\mathcal{Cl}_{(r+8,0)} \simeq \mathcal{Cl}_{(r,0)} \oplus M(16, \mathbb{R}).$$

Es pot veure també que

$$\mathcal{Cl}_{(r+1,s)} \simeq \mathcal{Cl}_{(s+1,r)}$$

i que

$$\mathcal{Cl}_{(r,s)} \simeq \mathcal{Cl}_{(r,s+1)}^0,$$

on $\mathcal{Cl}_{(r,s+1)}^0$ denota l'àlgebra parella de $\mathcal{Cl}_{(r,s+1)}$.

1.2.2 Àlgebres de Clifford complexes

En aquest apartat estudiarem les àlgebres de Clifford que venen del pla complex $\mathbb{C}$. Notarem l'àlgebra de Clifford complexa per $\mathcal{Cl}(n, \mathbb{C})$ atès que no pot haver-hi confusió, ja que en aquest cas es ben conegut el fet que tota forma no degenerada es pot expressar de la forma

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

en alguna base ortonormal. Així, doncs, tenim el teorema següent:

1.2.6 Teorema. *Existeix un isomorfisme*

$$\mathcal{Cl}(n+2, \mathbb{C}) \simeq \mathcal{Cl}(n, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{Cl}(2, \mathbb{C}),$$

amb $\mathcal{Cl}(2, \mathbb{C}) \simeq M(2, \mathbb{C})$.

DEMOSTRACIÓ. Atès que pel lema 1.2.2 $\mathcal{Cl}(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}_{(0,n)} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}_{(n,0)}$, tenim

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}(\mathbb{C}, n+2) &= \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}_{(0,n+2)} \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\mathcal{Cl}_{(n,0)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}_{(0,2)}) \simeq \\ &\simeq (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}_{(n,0)}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}_{(0,2)}). \end{aligned}$$

Atès que $\mathcal{Cl}_{(0,2)} = \mathbb{H}$, $\mathcal{Cl}(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{Cl}_{(n,0)}$ i $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq M(2, \mathbb{C})$, i aconseguim $\mathcal{Cl}(2, \mathbb{C}) \simeq M(2, \mathbb{C})$ i

$$\mathcal{Cl}(n, \mathbb{C}) \simeq \mathcal{Cl}(n, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} M(2, \mathbb{C}),$$

i el teorema queda provat. $\square$

1.2.7 Corol·lari. *Se satisfà que*

$$\begin{aligned}\mathcal{Cl}(2k, \mathbb{C}) &\simeq M(2k, \mathbb{C}) \\ \mathcal{Cl}(2k+1, \mathbb{C}) &\simeq M(2^k, \mathbb{C}) \oplus M(2^k, \mathbb{C}).\end{aligned}$$

1.2.8 Observació. Tenim la següent taula per a les primeres àlgebres de Clifford complexes.

n	$\mathcal{Cl}(n, \mathbb{C})$
0	$\mathbb{C}$
1	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$
2	$(2, \mathbb{C})$
3	$M(2, \mathbb{C}) \oplus M(2, \mathbb{C})$
4	$M(4, \mathbb{C})$
5	$M(4, \mathbb{C}) \oplus M(4, \mathbb{C})$
6	$M(8, \mathbb{C})$
7	$M(8, \mathbb{C}) \oplus M(8, \mathbb{C})$

1.3 Àlgebres de Clifford de dimensió petita

En aquest apartat treballarem els exemples de les àlgebres de Clifford

$$\mathcal{Cl}(2, \mathbb{R}) := \mathcal{Cl}(V, q)$$

amb $V = \mathbb{R}^2$ i $q = x_1^2 + x_2^2$,

$$\mathcal{Cl}(3, \mathbb{R}) := \mathcal{Cl}(V, q)$$

amb $V = \mathbb{R}^3$ i $q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ i

$$\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4, (3, 1)) := \mathcal{Cl}(V, q)$$

amb $V = \mathbb{R}^4$ i $q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$. Per tal de no carregar la notació usarem la notació abreujada de les àlgebres de Clifford, és a dir, $\mathcal{Cl}_{(2,0)}$, $\mathcal{Cl}_{(3,0)}$ i $\mathcal{Cl}_{(3,1)}$.

1.3.1 L'àlgebra $\mathcal{Cl}_{(2,0)}$

Com se sap, els espais vectorials estan dotats de dues operacions bàsiques, la suma (i la resta) i el producte per escalars. En aquesta apartat, dotarem d'un producte a l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$.

Donada una base ortonormal (ortogonal i unitaria) de $\mathbb{R}^2$, anomenada $\{e_1, e_2\}$, es defineix el producte de vectors de la manera següent:

$$\begin{aligned} e_1^2 &= e_2^2 = 1 \\ e_{12} &= e_1 e_2 = -e_2 e_1. \end{aligned}$$

Anomenem l'element e_{12} bivector, i es pot interpretar com una unitat d'àrea del pla, amb una orientació.

1.3.1 Definició. Es defineix el producte de Clifford de dos vectors $a = a_1 e_1 + a_2 e_2$ i $b = b_1 e_1 + b_2 e_2$ segons

$$ab := (a_1 b_1 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_{12}.$$

Els elements $(1, e_1, e_2, e_{12})$ formen una base que anomenarem, de l'àlgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{(2,0)}$ dels vectors del pla $\mathbb{R}^2$. Els elements d'aquest $\mathbb{R}$ -àlgebra es poden escriure de la forma

$$a = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_{12} e_{12}.$$

Observem que l'àlgebra de Clifford és un espai lineal real de dimensió 4.

Atès que $\mathcal{Cl}_{(2,0)}$ és un àlgebra de dimensió 4 sobre $\mathbb{R}$, és isomorfa, com a àlgebra associativa, a l'àlgebra de matrius $M(2, \mathbb{R})$, segons la correspondència

$$\begin{aligned} 1 &\simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ e_1 &\simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ e_{12} &\simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podem observar que

$$(e_{12})^2 = e_1 e_2 e_1 e_2 = -e_1 e_1 e_2 e_2 = -1.$$

Podem considerar, en un sentit geomètric, que $e_{12} = i$ i i és la unitat imaginària $\sqrt{-1}$. Per tant $\mathcal{C}\ell_{(2,0)}$ conté a un subcòs isomorf a $\mathbb{C}$ (generat per $\{1, i\}$) i també conté l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$ (generat per $\{e_1, e_2\}$). Es pot observar que $\mathbb{C}$ és una subàlgebra de $\mathcal{C}\ell_{(2,0)}$ i denotada per $\mathcal{C}\ell_{(2,0)}^0$, i que correspon a la subàlgebra parella. A l'altra part, en aquest cas $\mathbb{R}^2$, l'anomenem la part senar de $\mathcal{C}\ell_{(2,0)}$ i la denotem per $\mathcal{C}\ell_{(2,0)}^1$. Amb aquesta notació, observem que

$$\mathcal{C}\ell_{(2,0)}^0 \mathcal{C}\ell_{(2,0)}^0 \subseteq \mathcal{C}\ell_{(2,0)}^0,$$

$$\mathcal{C}\ell_{(2,0)}^0 \mathcal{C}\ell_{(2,0)}^1 \subseteq \mathcal{C}\ell_{(2,0)}^1,$$

$$\mathcal{C}\ell_{(2,0)}^1 \mathcal{C}\ell_{(2,0)}^0 \subseteq \mathcal{C}\ell_{(2,0)}^1,$$

$$\mathcal{C}\ell_{(2,0)}^1 \mathcal{C}\ell_{(2,0)}^1 \subseteq \mathcal{C}\ell_{(2,0)}^0.$$

Aquestes observacions es poden expressar dient que l'àlgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{(2,0)}$ és una $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -àlgebra graduada.

1.3.2 L'àlgebra $\mathcal{C}\ell_{(3,0)}$

Suposem que en $\mathbb{R}^3$ tenim una base de vectors ortogonals $\{e_1, e_2, e_3\}$. L'àlgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{(3,0)}$ de $\mathbb{R}^3$ és una àlgebra associativa generada pel conjunt $\{e_1, e_2, e_3\}$ satisfent les relacions

$$\begin{aligned} e_1^2 &= 1, & e_2^2 &= 1, & e_3^2 &= 1 \\ e_1 e_2 &= -e_2 e_1, & e_1 e_3 &= -e_3 e_1, & e_2 e_3 &= -e_3 e_2. \end{aligned}$$

Aquesta àlgebra $\mathcal{C}\ell_{(3,0)}$ té dimensió 8 i admet els elements següents com a base

1	l'escalar
e_1, e_2, e_3	vectors
e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3	bivectors
$e_1e_2e_3$	l'element de volum.

Aquesta àlgebra de Clifford pot ser representada per l'àlgebra de matrius $M(2, \mathbb{C})$. En aquests cas la correspondència s'expressa

$$e_1 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \simeq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A aquestes matrius se les anomena les matrius de Pauli. La diferència essencial, com abans, és que $\mathcal{Cl}_{(3,0)}$ conté una subàlgebra distingida, $\mathbb{R}^3$, en la qual el quadrat d'un vector és igual a la seva longitud al quadrat, és a dir, $x^2 = \|x\|^2$

Es pot observar que l'element e_{123} commuta amb tots els e_1, e_2, e_3 i, a més, amb cada element de $\mathcal{Cl}_{(3,0)}$. És a dir, els elements de la forma

$$x + ye_{123} \simeq \begin{pmatrix} x + iy & 0 \\ 0 & x + iy \end{pmatrix}$$

commuten amb tots els elements de $\mathcal{Cl}_{(3,0)}$. La subàlgebra dels escalars i dels 3-vectors

$$\mathbb{R} \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3 = \{x + ye_{123} | x, y \in \mathbb{R}\}$$

és el centre de $\mathcal{Cl}_{(3,0)}$. Observem que $e_{123}^2 = -1$, per tant

$$Z(\mathcal{Cl}_{(3,0)}) \simeq \mathbb{C}.$$

Igual que en el cas de $\mathcal{Cl}_{(2,0)}$, podem estudiar la subàlgebra parella. En aquest cas està formada pels elements 1 i e_{12}, e_{13}, e_{23} . Representada matricialment tindrem que

$$w + xe_{23} + ye_{31} + ze_{12} \simeq \begin{pmatrix} w + iz & ix + y \\ ix - y & w - iz \end{pmatrix}.$$

Aquesta subàlgebra parella és isomorfa a l'anell de divisió dels quaternions de Hamilton amb la següent correspondència

$\mathbb{H}$	$\mathcal{C}\ell_{(3,0)}^0$
i	$-e_{23}$
j	$-e_{31}$
k	$-e_{12}$

1.3.2 Observació. L'àlgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{(3,0)}$ conté dues subàlgebres, una isomorfa a $\mathbb{C}$, el centre, i l'altra isomorfa a $\mathbb{H}$, la subàlgebra parella. Observem els següents fets:

- $ab = ba$ per $a \in \mathbb{C}$ i $b \in \mathbb{H}$.
- $\mathcal{C}\ell_{(3,0)}$ és generada com a àlgebra real per $\mathbb{C}$ i per $\mathbb{H}$.
- $(\dim \mathbb{C})(\dim \mathbb{H}) = \dim \mathcal{C}\ell_{(3,0)}$.

Aquestes tres observacions poder ser expressades com

$$\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \simeq \mathcal{C}\ell_{(3,0)}.$$

L'àlgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{(3,0)}$ té tres involucions similars a les conjugacions complexes. Prenem un element arbitrari

$$u = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 + \langle u \rangle_3 \in \mathcal{C}\ell_{(3,0)},$$

escrit com a suma d'un escalar $\langle u \rangle_0$, un vector $\langle u \rangle_1$, un bivector $\langle u \rangle_2$ i un element de volum $\langle u \rangle_3$. Observem que els automorfismes i els antiautomorfismes de la secció anterior coincideixen amb:

$$\alpha(u) = \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3 \quad \text{involució principal,}$$

$$\beta(u) = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3 \quad \text{antiautomorfisme principal}$$

$$\gamma(u) = \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2 + \langle u \rangle_3 \quad \text{conjugació de Clifford.}$$

1.3.3 Observació. Tal i com hem vist en la secció anterior, per a tot $x \in \mathcal{C}\ell_3^0$ tenim que

$$\beta(x) = \gamma(x).$$

Aquesta propietat és un si, i només si, és a dir de $\beta(x) = \gamma(x)$ se segueix que $x \in \mathcal{C}\ell_{(3,0)}^0$.

1.3.4 Observació. Segons aquesta notació, la norma de l'àlgebra de quaternions de Hamilton és donada per

$$N(x) = x\gamma(x) = x\beta(x).$$

1.3.3 L'àlgebra $\mathcal{C}\ell_{(3,1)}$.

Suposem que tenim una base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ de vectors ortogonals per la forma quadràtica

$$q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2.$$

L'àlgebra de clifford de $\mathcal{C}\ell_{(3,1)} := \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^4, (3, 1))$ està generada multiplicativament pel conjunt $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ satisfent les relacions

$$e_1^2 = 1, \quad e_2^2 = 1, \quad e_3^2 = 1, \quad e_4^2 = -1. \quad (1.1)$$

Denotarem els elements $e_i e_j e_k = e_{ijk}$. L'àlgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{(3,1)}$ té dimensió 16 i admet els elements següents com a base

1	l'escalar
e_1, e_2, e_3, e_4	vectors
$e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}$	bivectors
$e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}$	elements de volum
e_{1234}	pseudoescalar.

Amb les relacions de 1.1, aquesta àlgebra de Clifford pot ser representada per l'àlgebra de matrius $M(16, \mathbb{R})$. En aquest cas,

la correspondència s'expressa segons

$$e_1 \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{i} \quad e_4 \simeq \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'àlgebra de Clifford parella, tindrà dimensió 8 i, pels teoremes de Cartan-Bott, tenim que

$$\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4, (3, 1))^0 \simeq \mathcal{Cl}(3, \mathbb{R}).$$

En general, per a qualsevol àlgebra de Clifford tenim involucions i automorfismes com els anteriors definits per la taula següent:

$k \equiv x(4)$	0	1	2	3
α	+	-	+	-
β	+	+	-	-
γ	+	-	-	+

on les coordenades es consideren respecte de la base habitual, $\{x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n} : e_i = 0, 1\}$ i

$$u = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 + \cdots + \langle u \rangle_n \in \mathcal{Cl}(V, q).$$

1.4 Grups espinorials: definicions i conceptes bàsics

En aquest apartat donarem una definició general dels grups espinorials. En ell, V denotarà un K -espai vectorial de dimensió finita i q una forma quadràtica no degenerada.

1.4.1 Definició. Es defineix el grup ortogonal $\mathbf{O}(V, q)$ com

$$\mathbf{O}(V, q) := \{A \in \mathbf{GL}(V) : q(A(v)) = q(v), \text{ per a tot } v \in V\},$$

Donat un vector anisòtrop u en l'espai quadràtic (V, q) , denotarem per s_u la reflexió respecte de l'hiperplà $u^\perp$

1.4.2 Teorema. (Cartan-Dieudonné) *Sigui (V, q) un espai quadràtic regular de dimensió n . Llavors, cada transformació ortogonal $t \in \mathbf{O}(V, q)$ és producte de com a màxim n reflexions segons un hiperplà.*

DEMOSTRACIÓ. Si $n = 1$, la afirmació és evident. Sigui $t : V \rightarrow V$ una transformació ortogonal. Si t fixa un vector anisòtrop v , $t(v) = v$, llavors t indueix una transformació ortogonal en el subespai ortogonal $v^\perp$, i podem aplicar la hipòtesi d'inducció.

Sigui B , la forma bilinial associada a q . Suposem que hi ha un vector anisòtrop v tal que $u := v - t(v)$ és anisòtrop, i que notem u . Llavors

$$B(v, u) = B(v, v) - B(v, t(v)),$$

$$\begin{aligned} B(u, u) &= B(v, v) - B(v, t(v)) - B(t(v), v) + B(t(v), t(v)) \\ &= 2(B(v, v) - B(v, t(v))) \end{aligned}$$

atès que $\frac{2B(u, v)}{B(u, u)} = 1$ i $s_u(v) = t(v)$. Ara $s_u(t)$ fixa v i podem aplicar de nou inducció. Això ja prova el teorema en el cas d'una forma definida.

Considerem el cas en què cada punt fix és un vector isòtrop i per a cada vector no isòtrop v tenim que $v - t(v)$ és isòtrop. Afirmem que si $\dim V \geq 3$, llavors:

1. El vector $v - t(v)$ és sempre isòtrop.
2. L'espai V té dimensió parella $2m$.

3. L'aplicació t és una transformació ortogonal pròpia.

Sigui $s := \text{Id} - t$, i sigui $V_1 = \ker s$ el subespai de vectors fixats per l'aplicació t .

Sigui v isòtrop i considerem $v^\perp$. Observem que $v^\perp$ té dimensió $n - 1 > n/2$. Per tant $v^\perp$ conté un vector anisòtrop w , i també $\lambda v - w$ és no isòtrop per a tots els λ . D'aquesta manera, per hipòtesi,

$$0 = q(s(w)) = q(s(v - w)) = q(s(-v - w)).$$

D'aquestes igualtats se segueix que

$$0 = q(s(v)) + q(s(w)) - 2B(s(v), s(w)) = q(s(v)) - 2B(s(v), s(w)),$$

$$0 = q(s(v)) + q(s(w)) + 2(s(v), s(w)) = q(s(v)) + 2(s(v), s(w)).$$

Per tant $q(s(v)) = 0$. De $(v - t(v), v - t(v)) = 0$, per a tot v , se segueix que $(v - t(v), w - t(w)) = 0$, per a tot v, w . De la ortogonalitat de t tenim que

$$(v, 2w) + (v, -t(w)) + (v, -t^{-1}w) = 0,$$

per tot v, w , és a dir, $2 - t - t^{-1} = 0$. Per tant, $2t - t^2 - \text{Id} = 0$ i, per tant, $s^2 = (1 - t)^2 = 0$.

Tenim, per hipòtesi, que $V_1 = \ker s$ és un espai totalment isòtrop, per tant $2 \dim V_1 \leq \dim V$. Ja que $s^2 = 0$, tenim que $s(V) \subseteq V_1$, i d'aquesta manera tots els vectors de $s(V)$ són isòtrops. Atès que $\dim V = \dim s(V) + \dim(\ker s)$, se segueix que $V_1 = s(V)$ és un subespai totalment isòtrop i V és de dimensió $2m$. Tenim que $t = \text{Id} + s$ té 1 com a valor propi i, per tant, té determinant 1, i d'aquesta manera una transformació ortogonal pròpia. Si s_w és igual a una reflexió, tenim que $s_w(t)$ no pot satisfer les mateixes condicions que t , per un altra banda ha de tenir determinant 1. Per tant podem aplicar la hipòtesi d'inducció i escriure-ho com a producte de $\leq 2m$ reflexions, però

el nombre ha de ser senar, com que $s_w(t)$ té determinant -1 . Per tant, $s_w(t)$ és un producte de $< 2m$ reflexions i això implica que $s_w(s_w(t))$ és un producte de $\leq 2m$ reflexions.

En el cas en què $\dim V = 2$, podem suposar que l'espai té vectors isòtrops. Per tant els elements $\begin{vmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{vmatrix}$ són reflexions, i clarament les transformacions pròpies són producte de dos reflexions. $\square$

1.4.3 Proposició. *Suposem que $u_1, \dots, u_r$ són vectors anisòtrops en un espai quadràtic (V, q) , on denotem s_{u_i} la reflexió respecte el hiperpla $u_i^\perp$. Si el producte $s_{u_1}s_{u_2}\cdots s_{u_r}$ és la identitat en $\mathbf{O}(V, q)$, llavors $q(u_1)\cdots q(u_r)$ és un element de K^{*2} .*

DEMOSTRACIÓ. Per a qualsevol vector anisòtrop $u \in V$, sigui $c(u)$ la conjugació sobre $C(V)$ induïda per $c(u)$, $c(u)(z) := uzu^{-1}$. Hem demostrat en 1.1.4 que s_u és igual a la restricció $-c(u)|V$. Atès que $c(u_i) \cdot c(u_j) = c(u_i u_j)$, les hipòtesis impliquen que $(\pm 1)c(u_1 \cdots u_r)|V$ és la identitat sobre V . Però

$$(-1)^r = \det(s_{u_1} \cdots s_{u_r}) = 1.$$

Per tant, r és parell i el producte $x = u_1 \cdots u_r \in C(V)^0$ commuta element a element amb V . Com que V genera $C(V)$ com a àlgebra, tenim que $x \in Z(C(V))$. D'altra banda, $C(V)$ és una K -àlgebra central graduada. Això implica que $Z(C(V)) \cap C(V)^0 = K$; x és un escalar diferent del zero en K . Usant l'antiautomorfisme principal β , concloem que

$$\begin{aligned} K^{*2} \ni x \cdot x &= x \cdot \beta(x) = u_1 \cdots u_r u_r \cdots u_1 \\ &= q(u_1) \cdots q(u_r). \end{aligned}$$

$\square$

1.4.4 Definició. Considerem una isometria $s \in \mathbf{O}(V, q)$. Pel teorema de Cartan-Diedonné i de la seva demostració existeix

una factorització $s = s_{v_1} \cdots s_{v_m}$, on v_i són vectors anisòtrops. Associem a s la classe quadràtica

$$N(s) := q(v_1) \cdots q(v_m) K^{*2} \in K^*/K^{*2}.$$

Per la proposició anterior, és clar que $N(s)$ depèn només de s , i no de la factorització en producte de s_{v_i} . $N(s)$ s'anomena la norma espinorial de la isometria s .

1.4.5 Teorema. *L'aplicació $N : \mathbf{O}(V, q) \rightarrow K/K^{*2}$ és un homomorfisme de grups. De fet, es l'únic homomorfisme de grups que satisfà la propietat $N(s_u) = q(u)K^{*2}$, per a tots els vectors anisòtrops $u \in V$.*

1.4.6 Definició. Més en general, podem definir la norma espinorial d'un element x de l'àlgebra de Clifford $C(V, q)$ com

$$N(x) = x\gamma(x),$$

on γ és la conjugació de Clifford que és menys la identitat sobre V .

1.4.7 Definició. Sigui un espai quadràtic (V, q) , i $C(V)^*$ els elements invertibles de l'àlgebra de Clifford. Es defineix el grup de Clifford com

$$\begin{aligned} \Gamma(V, q) &= \{x \in C(V)^* \mid \alpha(x)vx^{-1} \in V, \text{ per a tot } v \in V\} \\ &= \{x \in C(V)^* \mid \gamma(x)vx^{-1} \in V, \text{ per a tot } v \in V\} \\ &= \{x \in C(V)^* \mid xvx^{-1} \in V, \text{ per a tot } v \in V\}. \end{aligned}$$

1.4.8 Definició. Es defineix el grup de Clifford especial com

$$\Gamma^+(V, q) := \Gamma(V, q) \cap C(V)^0.$$

1.4.9 Proposició. *Les aplicacions α i β induïxen un automorfisme i un antiautomorfisme, respectivament, en el grup de Clifford $\Gamma(V, q)$.*

1.4.10 Definició. Sigui (V, q) un espai quadràtic real o complex. Es defineix el grup espinorial com

$$\mathbf{Spin}(V, q) := \{x \in \Gamma^+(V, q) : N(x) = \pm 1\}.$$

1.4.11 Observació. Observem que si la forma quadràtica és definida positiva la definició queda de la forma

$$\mathbf{Spin}(V, q) := \{x \in \Gamma^+(V, q) : N(x) = +1\}.$$

1.4.12 Observació. Qualsevol $x \in \mathbf{Spin}(V, q)$, per definició, determina un endomorfisme φ_x de V de la forma

$$\varphi_x(v) = \alpha(x)vx^{-1}, \quad v \in V.$$

Pel lema 1.1.4, φ_x aplicat a un vector v és la reflexió del vector v respecte de l'hiperplà ortogonal al vector x . Més concretament, vegem que φ_x preserva la forma quadràtica q . Usem que per a $w \in V$, $q(w, w) = ww = -w\gamma(w)$. Calculem

$$\begin{aligned} q(\varphi_x(v), \varphi_x(v)) &= -\alpha(x)v\gamma(x)\gamma(\alpha(x)v\gamma(x)) \\ &= -\alpha(x)v\gamma(x)x\gamma(v)\gamma(\alpha(x)) \\ &= -\alpha(x)v\gamma(v)\alpha(\gamma(x)) \\ &= q(v, v)\alpha(x)\alpha(\gamma(x)) \\ &= q(v, v)\alpha(x\gamma(x)) = q(v, v). \end{aligned}$$

1.4.13 Teorema. *En general, tenim la següent successió exacta*

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \mathbf{Spin}(V, q) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{SO}(V, q) \xrightarrow{N} K^*/K^{*2},$$

on $\varphi(x) := \varphi_x$, per a tot $x \in \mathbf{Spin}(V, q)$.

DEMOSTRACIÓ. És clar que φ és un homomorfisme de grups. Hem de veure quin és el nucli de l'aplicació φ .

$$\text{Ker}(\varphi) := \{x \in \mathbf{Spin}(V, q) : \varphi_x(v) = v\}.$$

Descomponem $x = x_0 + x_1$ on $x_i \in C(V)^0$. Si tenim que $\varphi_x(v) = v$, aleshores $xvx^{-1} = v$ per a tot $v \in V$.

Aleshores $x_0v = vx_0$, per tant $x_0 \in Z(C(V)) \simeq K$. També hem de tenir que $x_1v = -vx_1$ i això només pot ser si $x_1 = 0$. Per tant, $x = x_0 \in K$. Atès que l'homomorfisme és d'ordre 2, tenim que $x_0^2 = 1$, per tant queda vist que $\ker \varphi = \{\pm 1\}$.

Per a veure $\text{Im} \varphi = \ker N$, confrontar [Shi04]. $\square$

Veurem en seccions posteriors que en els casos real i complex el resultat 1.4.13 es pot millorar, de manera que podrem aconseguir una successió exacta curta.

1.5 Grups espinorials complexos

En aquest apartat estudiarem els grups espinorials complexos. Per simplificar notació escriurem $\mathbf{Spin}(n, \mathbb{C})$, és a dir, $V = \mathbb{C}^n$ i sent $q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

Considerem el grup espinorial $\mathbf{Spin}(n, \mathbb{C})$ com

$$\mathbf{Spin}(n, \mathbb{C}) := \{x \in \Gamma^+(\mathbb{C}, n) : N(x) = 1\}.$$

1.5.1 Teorema. L'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbf{Spin}(n, \mathbb{C}) & \rightarrow & \mathbf{SO}(n, \mathbb{C}) \\ x & \mapsto & \varphi_x \end{array}$$

és un epimorfisme de grups. Atès que el nucli de φ és $\{\pm 1\}$, el grup $\mathbf{Spin}(n, \mathbb{C})$, és un doble recobriment de $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$.

DEMOSTRACIÓ. De fet, provarem quelcom més general. Es defineix un subgrup més gran i que al mateix temps sigui el grup multiplicatiu de $\mathcal{Cl}(n, \mathbb{C})$. Sigui

$$\mathbf{Pin}(n, \mathbb{C}) = \{x \in \Gamma(n, \mathbb{C}) : N(x) = 1\}$$

anomenat grup pinorial. Es defineix el homomorfisme

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{Pin}(n, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathbf{O}(n, \mathbb{C}) \\ x &\rightarrow \varphi_x \end{aligned}$$

on $\varphi_x(v) = \alpha(x)v\gamma(x)$, on $\alpha : \mathcal{Cl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{Cl}(n, \mathbb{C})$ és la involució principal, definida com la identitat en $\mathcal{Cl}(n, \mathbb{C})^0$ i menys la identitat en $\mathcal{Cl}(n, \mathbb{C})^1$.

Provem ara que φ és exhaustiva. Pel teorema de Cartan-Dieudonné, el grup ortogonal $\mathbf{O}(n, \mathbb{C})$ està generat per reflexions. Per tant, si s_w és la reflexió respecte de l'hiperplà perpendicular al vector $w \in V$, normalitzat, tal que $q(w, w) = -1$, és fàcil veure que w està en $\mathbf{Pin}(n, \mathbb{C})$ i $\varphi_w = s_w$; de fet

$$w\gamma(w) = w(-w) = -q(w, w) = 1,$$

i, per tant,

$$\varphi_w(w) = \alpha(w)w\gamma(w) = -w.$$

Provem ara que el nucli de φ en el grup $\mathbf{Pin}(n, \mathbb{C})$ és $\{\pm 1\}$. Suposem que x és del nucli, i escrivim $x = x_0 + x_1$ on $x_i \in \mathcal{Cl}(n, \mathbb{C})^i$, on $i \in \{0, 1\}$. Llavors, d'una banda tenim que $x_0v = vx_0$ per a tot $v \in V$, per tant x_0 està en el centre de $\mathcal{Cl}(n, \mathbb{C})$. Per un altre costat tenim que $x_1v = -vx_1$ per a tot $v \in V$, per tant $x_0 \in Z(C(n, \mathbb{C})) = \mathbb{C}$ i $x_1 = 0$. Com que $x_0^2 = 1$, per ser l'homomorfisme d'ordre dos, ha de complir-se $x = \pm 1$.

Si $\tau \in \mathbf{O}(n, \mathbb{C})$ s'escriu com a producte de reflexions $\tau_{w_1} \circ \dots \circ \tau_{w_r}$, llavors els dos elements en $\varphi^{-1}(\tau)$ són $\pm w_1 \dots w_r$. En particular, considerem un altra descripció dels grups espinorials

$$\begin{aligned} \mathbf{Spin}(n, \mathbb{C}) &= \mathbf{Pin}(n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{Cl}(n, \mathbb{C})^0 = \varphi^{-1}(\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})) \\ &= \{\pm w_1 \dots w_{2k} : w_i \in V, q(w_i, w_i) = -1\}. \end{aligned}$$

Com que $-1 = vv$ per a qualsevol v amb $q(v, v) = -1$, veiem que el grup espinorial consisteix en el producte parell de tals elements. La prova conclou tenint en compte que $\mathbf{Spin}(n, \mathbb{C})$ és connex. $\square$

Alguns grups espinorials complexos es poden reduir a la següent taula

n	$\mathbf{Spin}(n, \mathbb{C})$
0	$\{\pm 1\}$
1	$\mathbf{O}(1, \mathbb{C})$
2	$\mathbf{GL}(1, \mathbb{C})$
3	$\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})$
4	$\mathbf{Sp}(2, \mathbb{C})^2$
5	$\mathbf{Sp}(4, \mathbb{C})$
6	$\mathbf{SL}(4, \mathbb{C})$.

1.6 Grups espinorials reals de dimensió baixa

En aquesta secció estudiem amb més detall els grups espinorials reals $\mathbf{Spin}(2, \mathbb{R})$, $\mathbf{Spin}(3, \mathbb{R})$ i $\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^4, (r, s))$.

Mentre no hi hagi confusió denotarem $\mathcal{Cl}_{(n,0)}$ l'àlgebres de Clifford corresponents. Denotarem els grups espinorials $\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^n, q)$ amb

$$q = x_1^2 + \cdots x_n^2$$

com $\mathbf{Spin}(n, \mathbb{R})$.

1.6.1 El grup $\mathbf{Spin}(2, \mathbb{R})$

Sigui $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ la circumferència unitat. Aquest conjunt és un grup multiplicatiu, isomorf al grup unitari en dimensió 1,

$$\mathbf{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z}z = 1\}.$$

Una rotació d'angle α en $\mathbb{C}$ en sentit contrari a les agulles del rellotge pot ser representada per la multiplicació complexa:

$$x + iy \rightarrow (\cos \alpha + i \sin \alpha)(x + iy),$$

amb $(\cos \alpha + i \sin \alpha) \in \mathbf{U}(1)$.

Una rotació en sentit de les agulles del rellotge d'angle φ pot ser representada per un producte de matrius

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

amb $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \in \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$. Es té un isomorfisme

$$\mathbf{U}(1) \xrightarrow{\sim} \mathbf{SO}(2, \mathbb{R}).$$

Si considerem $\{e_1, e_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$, les rotacions poden ser representades pel producte de Clifford

$$xe_1 + ye_2 \rightarrow (\cos \frac{\alpha}{2} + e_{12} \sin \frac{\alpha}{2})^{-1} (xe_1 + ye_2) (\cos \frac{\alpha}{2} + e_{12} \sin \frac{\alpha}{2}),$$

on $\cos \frac{\alpha}{2} + e_{12} \sin \frac{\alpha}{2} \in \mathbf{Spin}(2, \mathbb{R}) := \{s \in \mathcal{Cl}_2 \mid s\bar{s} = 1\}$ on, si $s = s_0 + s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_{12} e_{12}$, $\bar{s} = s_0 - s_1 e_1 - s_2 e_2 - s_{12} e_{12}$.

El fet que dos elements oposats del grup espinorial $\mathbf{Spin}(2, \mathbb{R})$ representen la mateixa rotació en $\mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$ i que tota rotació s'expressa coma un producte de Clifford ens diu que $\mathbf{Spin}(2, \mathbb{R})$ és un doble recobriment de $\mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$. Tenim, doncs, la successió exacta següent,

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \mathbf{Spin}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{SO}(2, \mathbb{R}) \rightarrow 1.$$

1.6.2 El grup $\mathbf{Spin}(3, \mathbb{R})$

En aquest apartat construirem el grup recobridor universal de $\mathbf{SO}(3)$ a partir d'elements de l'àlgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{(3,0)}$. Més concretament, a partir d'elements de l'àlgebra parella $\mathcal{Cl}_{(3,0)}^0$. Com hem observat en la secció 1.3.2, l'àlgebra $\mathcal{Cl}_{(3,0)}^0$ és isomorfa a l'àlgebra dels quaternions de Hamilton $\mathbb{H}$. Com sabem, $\mathbb{H}$ és

un cos, i podem definir-hi una norma de la manera següent, si $v = a + xi + yj + zk$, es defineix la norma sobre $\mathbb{H}$, i en general sobre $\mathcal{C}\ell_{(3,0)}$, com:

$$N(v) = \gamma(v)v, \quad v \in \mathcal{C}\ell_{(3,0)},$$

on $\gamma(v)$ és la conjugació de Clifford de v en $\mathcal{C}\ell_{(3,0)}$. En particular, per a la subàlgebra parella, que identifiquem directament amb l'anell dels quaternions de Hamilton, tenim que

$$N(v) = (a - xi - yj - zk)(a + xi + yj + zk) = a^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

El grup espinorial és donat per

$$\mathbf{Spin}(3, \mathbb{R}) = \{v \in \mathcal{C}\ell_{(3,0)} \mid \beta(v)v = 1, \gamma(v)v = 1\}.$$

1.6.1 Observació. Tal i com hem definit anteriorment les normes, podem escriure la igualtat

$$\mathbf{Spin}(3, \mathbb{R}) = \{v \in \mathcal{C}\ell_{(3,0)}^0 \mid N(v) = 1\},$$

atès que l'antiautomorfisme principal i la conjugació de Clifford han de ser iguals i això passa si, i només si, $\langle s \rangle_1 = \langle s \rangle_3 = 0$.

1.6.2 Observació. Si $V := \{u \in \mathcal{C}\ell_{(3,0)}^0 \mid \langle u \rangle_0 = 0\}$, aleshores es pot observar que

$$V \simeq \mathbb{R}^3.$$

Enunciem ara uns lemes que ens portaran a demostrar que el grup $\mathbf{Spin}(3, \mathbb{R})$ és un doble recobriment de $\mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$. Ja que el grup fonamental $\pi_1(\mathbf{SO}(3, \mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbf{Spin}(3, \mathbb{R})$ serà el grup recobridor universal de $\mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$.

1.6.3 Lema. *Sigui $u \in \mathcal{C}\ell_{(3,0)}^0$ tal que $N(u) = 1$. Existeixen un element $d \in V$ tal que $N(d) = 1$, i una rotació α de manera que*

$$u = \cos \frac{\alpha}{2} + d \sin \frac{\alpha}{2}$$

DEMOSTRACIÓ. Sigui $u \in \mathcal{C}\ell_{(3,0)}^0$ tal que $u = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_2$, $\langle u \rangle_2 \in V$. Anomenem

$$d := \frac{\langle u \rangle_2}{N(\langle u \rangle_2)}$$

i, que notem per no carregar la notació,

$$\lambda := N(\langle u \rangle_2) \quad a = \langle u \rangle_0.$$

D'aquí obtenim que

$$u = a + \lambda d.$$

Per definició $N(d) = 1$ i $d = -\beta(d)$.

$$\begin{aligned} 1 = N(u) &= (a + \lambda d)(a - \lambda \beta(d)) \\ &= a^2 + \lambda a \beta(d) + \lambda a d + \lambda^2 d \beta(d) \\ &= a^2 + \lambda^2 N(d) = a^2 + \lambda^2. \end{aligned}$$

Per tant, existeix un $\alpha \in [0, 2\pi]$ tal que

$$a = \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \lambda = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

□

1.6.4 Proposició. *Sigui $u \in \mathcal{C}\ell_{(3,0)}^0$, $N(u) = 1$.*

(i) *L'aplicació*

$$\begin{array}{ccc} \varphi_u : \mathcal{C}\ell_{(3,0)}^0 & \rightarrow & \mathcal{C}\ell_{(3,0)}^0 \\ v & \rightarrow & uvu^{-1} \end{array}$$

és tal que $\varphi_{u|V}$ és una rotació de V .

(ii) *Recíprocament, si φ és una rotació de l'espai V (un element de $\mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$), existeix un quaternió $u \in \mathcal{C}\ell_{(3,0)}^0$ (de fet exactament dos) tal que compleix $N(u) = 1$ i*

$$\varphi = \varphi_{u|V}.$$

1.6.5 Corol·lari. *Siguin $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$ amb $\varphi_1 = \varphi_u$, $\varphi_2 = \varphi_v$ i $u, v \in \mathcal{C}\ell_{(3,0)}^0$, aleshores*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_{vu}.$$

DEMOSTRACIÓ. Sigui $w \in V$. Tenim que

$$\begin{aligned} (\varphi_2 \circ \varphi_1)(w) &= (\varphi_v \circ \varphi_u)(w) = v(uwu^{-1})v^{-1} \\ &= (vu)w(vu)^{-1} \\ &= \varphi_{vu}(w). \end{aligned}$$

□

Demostrem ara la proposició 1.6.4.

DEMOSTRACIÓ. Comencem pel punt (i). Tot element de $u \in \mathcal{C}\ell_{(3,0)}^0$ de $N(u) = 1$ es pot escriure de la forma $u = \cos \frac{\alpha}{2} + \delta \sin \frac{\alpha}{2}$ amb $\delta \in V$ que compleixi $N(\delta) = 1$. Observem que $\delta^2 = 1$. Fixem u i sigui $\delta_1 := \delta$. Sigui δ_2 un vector ortogonal a δ_1 i $\delta_3 := \delta_1 \wedge \delta_2$, on $\wedge$ denota el producte vectorial. Aleshores tenim que

$$\begin{aligned} \delta_2 \wedge \delta_3 &= \delta_1, \\ \delta_3 \wedge \delta_1 &= \delta_2. \end{aligned}$$

Sigui $\varphi_u \in \text{End}(V)$. Tenim les igualtats següents:

$$\begin{aligned} \varphi_u(\delta_1) &= (\cos \frac{\alpha}{2} + \delta_1 \sin \frac{\alpha}{2})\delta_1(\cos \frac{\alpha}{2} - \delta_1 \sin \frac{\alpha}{2}) \\ &= (\delta_1 \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2})(\cos \frac{\alpha}{2} - \delta_1 \sin \frac{\alpha}{2}) \\ &= \delta_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \delta_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= \delta_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_u(\delta_2) &= (\cos \frac{\alpha}{2} + \delta_1 \sin \frac{\alpha}{2})\delta_2(\cos \frac{\alpha}{2} - \delta_1 \sin \frac{\alpha}{2}) \\ &= (\delta_2 \cos \frac{\alpha}{2} + \delta_3 \sin \frac{\alpha}{2})(\cos \frac{\alpha}{2} - \delta_1 \sin \frac{\alpha}{2}) \\ &= \delta_2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \delta_3 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \delta_3 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \delta_2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= \delta_2 \cos \alpha + \delta_3 \sin \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_u(\delta_3) &= (\cos \frac{\alpha}{2} + \delta_1 \sin \frac{\alpha}{2})\delta_3(\cos \frac{\alpha}{2} - \delta_1 \sin \frac{\alpha}{2}) \\ &= (\delta_2 \cos \frac{\alpha}{2} - \delta_2 \sin \frac{\alpha}{2})(\cos \frac{\alpha}{2} - \delta_1 \sin \frac{\alpha}{2}) \\ &= \delta_3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \delta_2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \delta_2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \delta_3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= \delta_3 \cos \alpha - \delta_2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Obtenim d'aquí la matriu de rotacions en $\mathbb{R}^3$ que correspon a φ_u :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Per a demostrar el recíproc, sigui $\varphi \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$, agafem δ un vector unitari en la direcció de l'eix de φ (n'hi ha dos de possibles), i definim

$$\begin{aligned} u : &= \cos \frac{\alpha}{2} + \delta \sin \frac{\alpha}{2} \\ &= \cos \frac{\alpha}{2} + (pi + qj + rk) \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

on $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ provenen de φ . Aleshores, $\varphi = \varphi_u$. $\square$

1.6.6 Corol·lari. *Existeix una successió exacta:*

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \mathbf{Spin}(3, \mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{SO}(3, \mathbb{R}) \rightarrow 1,$$

on $\varphi(u) := \varphi_u$.

1.6.7 Observació. Es demostra fàcilment que

$$\mathbf{Spin}(3, \mathbb{R}) \simeq \mathbf{SU}(2)$$

és un isomorfisme de grups.

1.6.3 El grup $\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^4, (3, 1))$

En aquest apartat estudiem el grup $\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^4, (3, 1))$. Aquest grup està definit en l'àlgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4, (3, 1))$.

En el cas en que la forma quadràtica és indefinida, tenim que els grups no són connexos. Tenen dues components, corresponents a cada un dels signes de la norma. Recordem que la forma quadràtica associada a aquesta àlgebra de Clifford és

$$q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2,$$

i, per tant, en el nostre cas

$$\mathbf{Spin}((3, 1), \mathbb{R}) = \{x \in \Gamma^+(\mathbb{R}^4, (3, 1)) \mid N(x) = \pm 1\}.$$

1.6.8 Definició. Donat un grup de Lie G , denotem la component connexa que conté l'element neutra com G_0

Prenem, doncs,

$$\mathbf{Spin}_0((3, 1), \mathbb{R}) := \{x \in \Gamma^+(\mathbb{R}^4, (3, 1)) \mid N(x) = +1\},$$

com la component connexa positiva del grup espinorial. En aquesta component és on es troba la identitat. Tenim els següent resultat general

1.6.9 Teorema. *Quan (V, q) és un espai quadràtic amb forma indefinida, la restricció de l'aplicació φ a $\mathbf{Spin}_0(V, q)$ defineix un doble recobriment*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{Spin}_0(V, q) &\rightarrow \mathbf{SO}_0(V, q) \\ x &\mapsto \varphi(x) : v \rightarrow xvx^{-1}. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓ. Cf. [Gil91]. $\square$

Fent una petita llista de grups de Lie no compactes tindrem el següent teorema:

1.6.10 Teorema. *Es tenen els isomorfismes següents:*

- (i) $\mathbf{Spin}_0(\mathbb{R}^4, (3, 1)) = \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$,
- (ii) $\mathbf{Spin}_0(\mathbb{R}^4, (4, 1)) = \mathbf{Sp}(2, 2)$,
- (iii) $\mathbf{Spin}_0(\mathbb{R}^4, (4, 2)) = \mathbf{SU}(2, 2)$.

En general els resultats que regeixen aquest grups espinorials són els mateixos que en el cas dels complexos. Però la demostració és lleugerament diferent degut a que no són connexos. Tindrem

$$\mathbf{Pin}(\mathbb{R}^{r+s}, (r, s)) = \{x \in \Gamma(\mathbb{R}^{r+s}, (r, s)) : N(x) = \pm 1\},$$

i, de manera anàloga,

$$\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{r+s}, (r, s)) = \mathbf{Pin}(\mathbb{R}^{r+s}, (r, s)) \cap \Gamma^+(\mathbb{R}^4, (r, s)).$$

És fàcil comprovar que

$$\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^{r+s}, (r, s)) = \{x \in \Gamma^+(\mathbb{R}^{r+s}, (r, s)) : N(x) = \pm 1\}.$$

Capítol 2

Grups de Lie i àlgebres de Lie

2.1 Definicions i conceptes bàsics

En aquest apartat donarem una breu introducció als conceptes relatius als grups de Lie i a les àlgebres de Lie. Denotarem $\text{End}(V)$ al conjunt d'endomorfismes de V .

2.1.1 Definició. Sigui M un espai topològic Hausdorff. Una estructura diferenciable sobre M de dimensió m és una col·lecció de cartes obertes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ sobre M , on $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ és un subconjunt obert de $\mathbb{R}^m$ tal que se satisfan les condicions següents:

1. $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.
2. Per a cada parell $\alpha, \beta \in A$, l'aplicació $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ és una aplicació diferenciable entre $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ i $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.
3. La col·lecció $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ és una família maximal de cartes obertes on prevalen les dues propietats anteriors.

2.1.2 Definició. Una varietat diferenciable de dimensió m és un espai Hausdorff amb una estructura diferenciable de dimensió m .

2.1.3 Definició. Un grup de Lie és un conjunt que està dotat simultàniament amb una estructura compatible de grup i de varietat diferenciable. Vol dir que la multiplicació i la operació inversa en la estructura de grup són aplicacions diferenciables.

2.1.4 Definició. Una aplicació, o homomorfisme, entre grups de Lie G i H és una aplicació $\rho : G \rightarrow H$ que és diferenciable i homomorfisme de grups, és a dir, una aplicació diferenciable que a més compleix

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$$

per a tot g i h en G .

2.1.5 Definició. Un subgrup de Lie (o un subgrup tancat de Lie) d'un grup de Lie G és un subconjunt que és simultàniament un subgrup i una subvarietat tancada de G . Es defineix un subgrup immers d'un grup de Lie H com la imatge sota un homomorfisme injectiu a G .

2.1.6 Definició. Sigui K un cos. Una àlgebra de Lie és un K -espai vectorial juntament amb una aplicació bilineal

$$[\ , \] : L \times L \rightarrow L$$

que satisfà les igualtats

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

anomenades, respectivament, identitat de Jacobi, i antisimètrica.

El que ens proposem a continuació és definir l'àlgebra de Lie d'un grup de Lie. Aquesta àlgebra de Lie és, de fet, l'espai vectorial tangent a la varietat diferencial de G en la identitat.

Podem pensar els elements de l'àlgebra de Lie com elements infinitesimals de G en un entorn de la identitat, i al parèntesis el podem entendre com un commutador entre tals elements.

Qualsevol camp vectorial d'una varietat diferenciable llisa pot ser pensat com l'anell de funcions (diferenciables) sobre la varietat, i a més formen una àlgebra de Lie ja que si X i Y són derivacions, es pot definir el parèntesis com

$$[X, Y] := XY - YX$$

i es pot comprovar que compleix les identitats de Jacobi i anti-simètrica.

Si G és un grup que actua en la varietat diferenciable, aleshores aquest grup actua sobre l'espai vectorial associat a l'espai tangent en l'element neutre.

En el cas dels grups de Lie, la varietat diferenciable i el grup que actua en l'espai tangent són el mateix. El grup G actua en ell mateix mitjançant l'aplicació $Ad(x) : G \rightarrow G$ definida com

$$Ad(x) : G \rightarrow G, \quad y \mapsto xyx^{-1},$$

on $x \in G$. Es pot pensar la seva àlgebra de Lie com l'espai tangent en la identitat per la derivada de l'aplicació Ad . És a dir, sigui

$$ad(x) := \frac{d}{dt} Ad(X).$$

Es pot definir

$$ad(x) : T_e(G) \rightarrow T_e(G) \quad y \mapsto [x, y] := ad(x)(y) = xy - yx. \quad (2.1)$$

Com a subconjunt obert de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ hereda una estructura analítica amb les quals el grup d'operacions és analític. D'aquesta manera $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ és un grup de Lie, i la seva àlgebra de Lie és $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ amb el corresponent claudàtor de Lie

$$[X, Y] = XY - YX, \quad X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

Localment l'estructura analítica de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ pot ser descrita explícitament usant l'aplicació exponencial

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) \\ X &\mapsto \exp X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n, \end{aligned}$$

de l'àlgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ en $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. Per a un entorn petit de $\mathbf{O}(\mathbb{R}^n, q)$, l'aplicació $X \rightarrow \exp X$ aplica bijectivament aquest entorn en un entorn de la identitat en $GL(n, \mathbb{R})$.

En general, si G és un subgrup de matrius de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ que és tancat per la topologia de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$, llavors hi ha una única estructura analítica sobre G respecte la qual és un subgrup de Lie de $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ amb àlgebra de Lie

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \exp tX \in G, t \in \mathbb{R}\}.$$

A més l'aplicació exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ aplica algun entorn del 0 en $\mathfrak{g}$ bijectivament en un entorn de Id en G .

2.1.1 Representacions lineals

2.1.7 Definició. Una representació de l'àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en un espai vectorial V és una aplicació d'àlgebres de Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) = \text{End}(V).$$

És a dir, és una aplicació lineal que conserva el claudàtor. Equivalentment, és una acció de $(\mathfrak{g}, +)$ sobre V tal que

$$[X, Y](v) = X(Y(v)) - Y(X(v)).$$

2.1.8 Observació. L'espai tangent en l'element neutre d'un grup de Lie G , que denotarem per $\mathfrak{g}$ està dotat amb l'estructura d'àlgebra de Lie, amb el claudàtor donat per la fórmula (2.1).

2.1.9 Exemple. Sigui $\mathcal{C}\ell^*(V, q)$ el grup de les unitats d'un àlgebra de Clifford real o complexa. Es defineix el claudàtor com

$$[u, v] := u \cdot v - v \cdot u.$$

En aquest cas, $\mathcal{C}\ell^*(V, q)$ és un grup de Lie que té $\mathcal{C}\ell(V, q)$ com la seva àlgebra de Lie.

2.1.10 Definició. Una representació d'un grup G en un espai vectorial V és un homomorfisme $\rho : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$.

2.1.11 Observació. Si G i H són grups de Lie amb G connex i H simplement connex, les aplicacions de H a G es corresponen injectivament amb les aplicacions de les respectives àlgebres de Lie, enviant $\rho : H \rightarrow G$ a la seva derivada $(d\rho)_e : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$.

L'observació 2.1.11 implica que les representacions de grups de Lie connexos i simplement connexos estan en correspondència injectiva amb les representacions de les seves àlgebres de Lie.

En aquesta secció descriurem una breu introducció als caràcters i les funcions de classes. Per a començar, escriurem la definició de funció de classes

2.1.12 Definició. Sigui G un grup. Direm que f és una funció de classe sobre G si $f(xy x^{-1}) = f(y)$ per a tot x i y de G .

2.1.13 Observació. Si G és un grup abelià, tota funció f sobre G és funció de classe.

2.1.14 Definició. Sigui ρ una representació lineal,

$$\rho : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$$

d'un grup G , on V denota un espai vectorial de dimensió finita sobre un cos K .

Aleshores es defineix el seu caràcter com l'aplicació

$$\begin{aligned} \chi_\rho : G &\rightarrow K \\ g &\mapsto \text{tr}(\rho(g)) \end{aligned}$$

Aquí tr denota la funció traça usual.

2.1.15 Proposició. *Els caràcters són una funció de classe.*

Un altre resultat de gran importància serà el següent

2.1.16 Teorema. *Sigui χ_1, χ_2 els dos caràcters de dos representacions irreductibles ρ_1, ρ_2 d'un grup compacte G . Llavors*

$$\int_G \chi_1(g) \overline{\chi_2}(g) dg = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_1 \neq \rho_2 \\ 1 & \text{si } \rho_1 = \rho_2. \end{cases}$$

Considerem ara l'espai de Hilbert de L^2 de les funcions sobre G de quadrat integrable. Considerem el subespai $L_c^2(G)$ de funcions de classes, el qual és clarament un espai tancat. Aleshores:

2.1.17 Teorema. *Els caràcters irreductibles són una base ortogonal de $L_c^2(G)$.*

2.1.2 L'àlgebra de Lie del grup $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$

El que farem a continuació serà calcular l'àlgebra de Lie del grup $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$. Recordem que

$$\begin{aligned} & \mathbf{O}(n, \mathbb{R}) \\ &= \{A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) : \|A(v)\| = \|v\|, \text{ per a tot } v \in \mathbb{R}^n\}. \end{aligned}$$

Sigui B la forma bilineal simètrica i definida positiva amb matriu associada M . Calculem l'espai tangent en un entorn de la matriu identitat. Sigui $\{A(t)\}_t$ una corba en l'espai de les matrius tal que $A(0) = \text{Id}$. Anomenem X a la derivada de la corba en $t = 0$. Tenim

$$B(A(t)(v), A(t)(w)) \equiv B(v, w)$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$. Aleshores, derivant respecte de la variable t i tenint en compte que el segon terme no depèn d'aquesta variable, s'obté que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A(t)^\top M A(t)) &= \frac{d}{dt}(A(t)^\top) M A(t) + A(t)^\top \frac{d}{dt}(M A(t)) \\ &= \left(\frac{d}{dt}M\right)^\top M A(t) + A(t)^\top M \frac{d}{dt}A(t) = 0 \end{aligned}$$

Aleshores, sabent que $\frac{d}{dt}A(t)|_{t=0} = X$ i $A(0) = \text{Id}$, tenim que

$$X^\top M + M X = 0$$

Per tant, l'àlgebra de Lie $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$ del grup $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ és

$$\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) : X^\top = -X\}.$$

En general, per a una forma quadràtica de signatura (r, s) ,

$$\mathfrak{o}(\mathbb{R}^n, (r, s)) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) : X^\top \text{Id}(r, s) = -\text{Id}(r, s)X\},$$

on $r + s = n$.

2.1.3 L'àlgebra de Lie del grup $\mathbf{SU}(3)$

El grup especial unitari $\mathbf{SU}(3)$ està format per les matrius $A \in M(3, \mathbb{C})$ unitàries i de determinant 1. És a dir, tals que

$$\begin{aligned} A \bar{A}^\top &= \bar{A}^\top A = \text{Id}, \\ \det(A) &= +1, \end{aligned}$$

on $\bar{A}^\top$ és la matriu conjugada transposada. Sigui $\mathfrak{su}(3)$ l'àlgebra de Lie del grup $\mathbf{SU}(3)$. Si escrivim $A \in \mathbf{SU}(3)$ en la forma

$$A = \exp(iG),$$

amb $G \in \mathfrak{su}(3)$, aleshores les condicions anteriors es tradueixen en les següents

$$\begin{aligned}\overline{G}^\top &= G \\ \text{Tr}(G) &= 0.\end{aligned}$$

Les matrius que compleixen aquestes dues condicions formen un espai vectorial de dimensió 8. Podem considerar les matrius de Gell-Mann com a base de $\mathfrak{su}(3)$. Són les següents:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Per qüestions de càlculs, convé prendre una segona base de la manera següent:

$$T_i := \frac{1}{2}\lambda_i.$$

Per a tot i, j , tindrem que existeixen elements $\mu_k \in \mathbb{C}$ tals que

$$[T_i, T_j] = \sum_k \mu_k T_k.$$

Sigui M la matriu definida per $(M)_{ij} := [T_i, T_j]$. Observem que per la propietat antisimètrica dels parèntesis, la matriu és antisimètrica.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & iT_3 & -iT_2 & \frac{i}{2}T_7 & -\frac{i}{2}T_6 & \frac{i}{2}T_5 & -\frac{i}{2}T_4 & 0 \\ & 0 & iT_1 & \frac{i}{2}T_6 & \frac{i}{2}T_7 & -\frac{i}{2}T_4 & -\frac{i}{2}T_5 & 0 \\ & & 0 & \frac{i}{2}T_5 & -\frac{i}{2}T_4 & -\frac{i}{2}T_7 & \frac{i}{2}T_6 & 0 \\ & & & 0 & \frac{i}{2}(T_3 + \frac{\sqrt{3}}{3}T_8) & \frac{i}{2}T_2 & \frac{i}{2}T_1 & -\frac{i}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}T_5 \\ & & & & 0 & -\frac{i}{2}T_1 & \frac{i}{2}T_2 & \frac{i}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}T_4 \\ & & & & & 0 & -\frac{i}{2}(T_3 - \frac{\sqrt{3}}{3}T_8) & -\frac{i}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}T_7 \\ & & & & & & 0 & \frac{i}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}T_6 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.18 Exercici. Calculem tot seguit les matrius dels operadors lineals $\text{ad}(T_i)$ en la base $\{T_1, \dots, T_8\}$

$$\text{ad}(T_i) : \mathfrak{su}(3) \rightarrow \mathfrak{su}(3).$$

Ens quedarà de la forma

$$\text{ad}(T_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ad}(T_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ad}(T_3) = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ad}(T_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ad}(T_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ad}(T_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ad}(T_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i

$$\text{ad}(T_8) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrius $\text{ad}(T_i)$ proporcionen una representació d'àlgebres de Lie

$$\text{ad} : \mathfrak{su}(3) \rightarrow M(8, \mathbb{C}),$$

de dimensió 8.

2.2 Àlgebres de Lie nilpotents i àlgebres de Lie resolubles

2.2.1 Definició. Sigui L una àlgebra de Lie. La serie derivada es defineix inductivament per

$$L^{(1)} := L, \dots, L^{(i+1)} := [L^{(i)}, L^{(i)}], \dots$$

i la sèrie central descendent es defineix inductivament com

$$L^1 := L, \dots, L^{i+1} := [L, L^i], \dots$$

Un àlgebra de Lie és resoluble si $L^{(i)} = 0$ per a algun i . Anàlogament, un àlgebra de Lie és nilpotent si $L^i = 0$ per a algun i .

2.2.2 Observació. Tenim que $L^{(i)} \subseteq L^i$, per tant tota àlgebra de Lie nilpotent és resoluble.

2.2.3 Observació. Dir que $L^i = 0$ significa que per a tot $a_1, \dots, a_i \in L$ tenim que $[a_1, [a_2, [\dots, a_i]]] = 0$. Amb notació equivalent tenim que

$$\text{ad}(a_1)\text{ad}(a_2)\dots\text{ad}(a_{i-1})(a_i) = 0, \quad \text{per a tot } a_1, a_2, \dots, a_i \in L.$$

2.2.4 Proposició. Una subàlgebra d'una àlgebra de Lie nilpotent és nilpotent. Una subàlgebra d'una àlgebra de Lie resoluble és resoluble.

2.2.5 Definició. Sigui I un subespai d'un àlgebra de Lie, L , tancat sota el parèntesis de Lie. Direm que és un ideal si compleix que

$$[I, L] \subseteq I.$$

2.2.6 Observació. Degut a la propietat antisimètrica del commutador, les nocions de ideal per la dreta i ideal per l'esquerra coincideixen.

2.2.7 Proposició. Si L és una àlgebra de Lie i I és un ideal de, L és resoluble si, i només si, les àlgebres de Lie L/I i I són totes dues resolubles. La suma de dos ideals resolubles d'una àlgebra de Lie és un ideal resoluble.

2.2.8 Observació. La identitat següent pot ser provada per inducció i s'usarà en la proposició següent:

$$[\text{ad}(b), \text{ad}(a_1)\text{ad}(a_2)\dots\text{ad}(a_i)] = \sum_{h=1}^i \text{ad}(a_1)\text{ad}(a_2)\dots\text{ad}([b, a_h])\dots\text{ad}(a_i).$$

2.2.9 Proposició. La suma de dos ideals nilpotents A i B d'una àlgebra de Lie és un ideal nilpotent.

DEMOSTRACIÓ. Notem primer que usant la identitat de Jacobi, per a cada i , A^i i B^i són ideals. Suposem $A^k = B^h = 0$. Afirmem que $(A + B)^{h+k-1} = 0$. Necessitem mostrar que el producte de $h - 1 + k - 1$ factors $\text{ad}(a_i)$ amb $a_i \in A$ o $a_i \in B$ és 0. Al menys $k - 1$ d'aquests factors estan en A , o $h - 1$ d'aquests factors estan en B . Suposem que estem en el primer cas. Cada vegada que tenim un factor $\text{ad}(b)$, $b \in B$, a l'esquerra d'algun factor en A , podem aplicar la relació 2.2.8 de commutació i obtenim una suma de termes en la qual el nombre de factors en A no canvia, per un factor en B que se suprimeix o es mou a la dreta del monomi. Iterant aquest procediment aconseguim una suma de monomis cada un començant amb un producte de $k - 1$ factors en A , el qual d'aquesta manera és igual a zero. $\square$

2.2.10 Definició. En una àlgebra de Lie L de dimensió finita, la proposició previa ens permet definir el radical resoluble. Denotem per $\text{Rad}(L)$ com l'ideal resoluble maximal de L . Definim el radical nilpotent com l'ideal maximal nilpotent de L , $\text{Nil}(L)$.

2.3 Tors maximals d'un grup de Lie

En aquesta secció estudiarem els tors maximals d'un grup de Lie, els quals tindran la seva importància en seccions posteriors. Seran una peça fonamental en el nostre estudi.

2.3.1 Definició. Considerem

$$\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \{e^{2\pi i\theta} : 0 \leq \theta < 1\}$$

amb l'estructura natural de grup de Lie (real). Un tor de dimensió $k \geq 0$, és un grup de Lie isomorf a $\mathbb{T}^k$.

2.3.2 Definició. Un tor de G és un subgrup de G isomorf a $\mathbb{T}^k$ per a algun k . Un tor maximal de G és un tor tal que si tenim $T \subseteq H \subseteq G$, i H és un tor llavors $H = T$, o bé $H = G$.

2.3.3 Observació. Els tors són grups de Lie abelians, connexos i compactes de dimensió k .

2.3.4 Observació. Un grup de Lie semisimple i compacte és, automàticament, connex i el seu centre és finit (cf. [Sim96], secció VII.2.5).

2.3.5 Teorema. *Sigui G un grup de Lie semisimple i compacte. Llavors:*

- (i) *Existeix algun tor maximal $T \subseteq G$.*
- (ii) *Per a tot element $g \in G$, existeix un tor maximal $T \subseteq G$ tal que $g \in T$.*
- (iii) *Tots els tors maximals de G són conjugats.*
- (iv) *El centre de G és la intersecció de tots els tors maximals de G .*

DEMOSTRACIÓ. Cf. [Tra97]. $\square$

2.3.6 Teorema. *Sigui G un grup de Lie real, abelià i connex de dimensió n . Llavors existeix un enter k , $0 \leq k \leq n$, tal que $G \simeq \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.*

DEMOSTRACIÓ. Cf. amb [Sim96] secció VII.2.3. $\square$

2.3.7 Definició. Tots els tors maximals d'un grup de Lie tenen la mateixa dimensió. S'anomena el rang del grup de Lie G la dimensió d'un tor maximal qualsevol.

2.3.8 Proposició. *Tot tor admet un generador; és a dir, si T és un tor, existeix un element $x \in T$ tal que T és l'adherència de $\{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$.*

2.3.9 Corol·lari. *Tot grup de Lie real, abelià, connex i compacte és un tor.*

2.3.10 Exemple. Anem a determinar com son els tors maximals dels grups especials unitaris $\mathbf{SU}(n)$. En primer lloc, és immediat observar que el subconjunt

$$T_{n-1}$$

$$:= \{\text{diag}(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_n}) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, e^{i(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} = 1\}$$

$$\subseteq \mathbf{SU}(n)$$

és un tor de dimensió $n - 1$, ja que l'aplicació

$$\mathbb{T}^{n-1} \rightarrow T_{n-1}$$

$$(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \text{diag}(e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_{n-1}}, e^{2\pi i x_n}),$$

per a $0 \leq x_i < 1$, $1 \leq i \leq n - 1$, és un isomorfisme de grups de Lie. Per tant, $\mathbf{SU}(n)$ conté tors de dimensió $n - 1$. Tot seguit, es prova que si $A \in \mathbf{SU}(n)$ és una matriu que commuta amb tota matriu $X \in T_{n-1}$, llavors $A \in T_{n-1}$; per tant, no hi ha cap subgrup abelià que contingui estrictament T_{n-1} ; en conseqüència, T_{n-1} és un tor maximal. Observem que el

$$\text{rang}(\mathfrak{su}(n)) = n - 1.$$

En particular per a $n = 3$, $\text{rang}(\mathfrak{su}(3)) = 2$.

2.3.11 Corol·lari. *Tot tor maximal d'un grup de Lie semisimple i compacte G conté un conjunt complet de representants de les classes de conjugació de G .*

2.3.12 Teorema. (Representacions dels tors) *Els caràcters complexos irreductibles del tor $\mathbb{T}$ són exactament els donats per les aplicacions*

$$\begin{aligned} \chi_m : \quad \mathbb{T} &\rightarrow \mathbf{SU}(1) \\ z = e^{2\pi i \theta} &\mapsto z^m = e^{2\pi i \theta m}. \end{aligned}$$

En particular, si $\Lambda_{\mathbb{T}}$ designa el conjunt de les classes de representacions irreductibles del tor, és $\Lambda_{\mathbb{T}} \simeq \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓ. Cf. [Tra97]. $\square$

Ara definim el concepte d'element regular en un grup de Lie. Seran emprats més endavant en la fórmula d'integració de Weyl.

2.3.13 Definició. Sigui G un grup de Lie. Un element $x \in G$, s'anomena regular si, i només si, pertany a un únic tor maximal. En el cas contrari, s'anomena singular.

2.4 Forma de Killing

En aquesta secció suposarem que totes les àlgebres de Lie són de dimensió finita. La forma de Killing proporciona un producte escalar en tota àlgebra de Lie L .

2.4.1 Definició. Sigui L una àlgebra de Lie. Considerem la forma bilineal simètrica sobre L :

$$(x, y) := \text{tr}(\text{ad}(x)\text{ad}(y)).$$

Aquesta forma s'anomena la forma de Killing de L .

2.4.2 Lema. La forma de Killing se satisfà la propietat associativa següent

$$([x, y], z) = (x, [y, z]),$$

per a tot $x, y, z \in L$.

DEMOSTRACIÓ.

$$\begin{aligned} ([x, y], z) &= \text{tr}(\text{ad}([x, y])\text{ad}(z)) \\ &= \text{tr}(\text{ad}(x)\text{ad}(y)\text{ad}(z) - \text{ad}(y)\text{ad}(x)\text{ad}(z)) \\ &= \text{tr}(\text{ad}(x)\text{ad}(y)\text{ad}(z) - \text{ad}(z)\text{ad}(y)\text{ad}(x)) \\ &= \text{tr}(\text{ad}(x)\text{ad}([y, z])) = (x, [y, z]). \end{aligned}$$

$\square$

2.4.3 Observació. La fórmula d'associativitat significa també que $\text{ad}(x)$ és anti-autoadjunta respecte de la fórmula Killing; és a dir,

$$(\text{ad}(x)(y), z) = -(y, \text{ad}(x)(z)),$$

per a tot $x, y, z \in L$.

2.4.4 Definició. Una àlgebra de Lie L és simple si no és abeliana i no té ideals no trivials.

2.4.5 Definició. Una àlgebra de Lie de dimensió finita és semi-simple si té radical resoluble 0.

Sobre els complexos $\mathbb{C}$ hi ha bastantes definicions equivalents d'àlgebra de Lie semisimple. Per a àlgebres de Lie, les següents definicions són equivalents:

2.4.6 Proposició. *La definició d'àlgebra de Lie semisimple és equivalent a:*

- (i) L és suma directa d'àlgebres de Lie simples.
- (ii) La forma de Killing és no degenerada.
- (iii) L no té ideals abelians no nuls.

2.4.7 Lema. *La forma de Killing és invariant sota qualsevol automorfisme de l'àlgebra de Lie.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui ρ l'automorfisme. Tenim

$$\text{ad}(\rho(a)) = \rho \cdot \text{ad}(a) \cdot \rho^{-1}$$

implica que

$$\begin{aligned} (\rho(a), \rho(b)) &= \text{tr}(\text{ad}(\rho(a)) \cdot \text{ad}(\rho(b))) = \\ &= \text{tr}(\rho \cdot \text{ad}(a) \text{ad}(b) \cdot \rho^{-1}) = \\ &= \text{tr}(\text{ad}(a) \text{ad}(b)) =: (a, b). \end{aligned}$$

on l'última igualtat és certa atès que la traça és invariant per canvi de base $\square$

2.4.8 Exercici. Anem a calcular la matriu de la forma de Killing per a l'àlgebra de Lie de $\mathbf{SU}(3, \mathbb{R})$.

El primer que hem de fer és calcular les matrius adjuntes, però això ja ho hem fet en un exercici anterior, a l'apartat 2.1.2.

Si les multipliquem dos a dos, i calculem la traça de cada una de les matrius del producte obtindrem la matriu:

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

on $K[i, j] = \text{tr}(\text{ad}(T_i)\text{ad}(T_j))$. Observem que els vectors T_3, T_8 formen una subàlgebra dintre de l'àlgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$, amb producte, la forma de Killing i que

$$\mathfrak{su}(3) = \langle T_3, T_8 \rangle \perp \langle T_1, T_2, T_4, T_5, T_6, T_7 \rangle.$$

2.5 Teoremes d'estructura per a àlgebres de Lie

Hi ha tres teoremes bàsics en aquest context: d'Engel, de Lie i de Cartan. El teorema d'Engel val per a tota característica. Els altres dos, el de Lie i el de Cartan, només valen per a característica zero.

2.5.1 Lema. *Sigui K un cos algebraicament tancat. Sigui a una matriu semisimple amb valors propis α_i i una base de vectors propis e_i . Aleshores $\text{ad}(a)$ és també semisimple amb valors propis*

$\alpha_i - \alpha_j$ i vectors propis les matrius unitats en la base $\{e_i\}$. Si a és nilpotent, $a^k = 0$, tenim que $\text{ad}(a)^{2k-1} = 0$.

DEMOSTRACIÓ. La primera afirmació és clara. Ja que $\text{ad}(a)(b) = a \cdot b - b \cdot a$, podem descompondre $\text{ad}(a)$ en la forma $\text{ad}(a) = a_L - a_R$ on $a_L(b) := ab$ i $a_R(b) := ba$. Atès que els multiplicadors per la dreta i per l'esquerra són operadors que commuten i que la matriu a és nilpotent, escrivim el desenvolupament següent

$$\text{ad}(a)^{2k-1} = (a_L - a_R)^{2k-1} = \sum_{i=1}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} a_L^i a_R^{2k-1-i} = 0.$$

Això acaba la demostració. $\square$

2.5.2 Corol·lari. *Sigui K un cos algebraicament tancat i L una K àlgebra de Lie. Si $a \in \text{End}(V)$ i $a = a_s + a_n$ és la descomposició de Jordan, llavors tenim que $\text{ad}(a) = \text{ad}(a_s) + \text{ad}(a_n)$ és la descomposició de Jordan de $\text{ad}(a)$.*

2.5.3 Teorema. (Engel) *Sigui V un K -espai vectorial de dimensió finita, i sigui $L \subseteq \text{End}(V)$ una àlgebra de Lie formada per elements nilpotents. Hi ha una base de V en la qual L està formada per matrius estrictament triangulars superiors. En particular L és nilpotent.*

DEMOSTRACIÓ. El teorema es pot demostrar per inducció sobre les dimensions de V i de L . El punt essencial de la demostració és provar que hi ha un vector no nul $v \in V$ amb $Lv = 0$, com que si provem això, podem repetir l'argument amb L actuant sobre V/Kv . Si L és de dimensió 1, és trivial atès que tota matriu de dimensió 1 per 1 és triangular superior i si és nilpotent és zero.

Sigui $A \subseteq L$ una subàlgebra maximal de Lie pròpia. Apliquem inducció de la següent forma. Pel lema previ, $\text{ad}(A)$ consisteix d'operadors nilpotents sobre $\text{End}(V)$. Per tant, els elements de

$\text{ad}(A)$ són també nilpotents actuant sobre L i L/A . Per inducció hi ha un element $u \in L$, $u \notin A$ amb $\text{ad}(A)u = 0$ mòdul A o equivalentment $[A, u] \subseteq A$. Això implica que $A + Ku$ és una subàlgebra més gran, però per la maximalitat de A tindrem que $L = A + Ku$ i també que A és un ideal de L . Ara sigui $W := \{u \in V \mid Au = 0\}$. Per inducció tenim que $W \neq 0$. Tenim que si $w \in W$, $a \in A$, que $a(uw) = [a, u]w + uaw = 0$ ja que $[a, u] \in A$. Per tant, W és estable per u , i com que u és nilpotent, hi ha un vector no nul $w \in W$ amb $Aw = uw = 0$. Per tant, $Lw = 0$. $\square$

2.5.4 Teorema. (Lie) *Sigui K un cos algebraicament tancat. Sigui V un K -espai vectorial, i sigui $L \subseteq \text{End}(V)$ una àlgebra de Lie resoluble. Hi ha una base de V en la qual L està formada per matrius triangulars superiors.*

DEMOSTRACIÓ. La demostració es pot aconseguir per inducció sobre la dimensió de L . El punt essencial és un altre cop, provar que hi ha un vector no nul $v \in V$ tal que és un vector propi de L . Si provem això, llavors repetim l'argument amb L actuant sobre V/Kv . Si L és de dimensió 1, llavors és un fet que un operador lineal no nul té un vector propi no nul.

Comencem igual que el teorema d'Engel. Com que L és resoluble un espai maximal propi $[L, L] \subseteq A$ serà un ideal de codimensió 1. Tenim de nou que $L = A + Ku$ amb $[u, A] \subseteq A$. Sigui, per inducció, $v \in V$ un vector propi de A . Escrivim per $av = \lambda(a)v$ el valor propi.

Considerem l'espai $W := \{v \in V : av = \lambda(a)v, \text{ per a tot } a \in A\}$. Si provem que s'estabilitza per u , llavors podem acabar per Hamilton-Cayley triant un vector propi no zero per $u \in W$.

Llavors, sigui $v \in W$; per algun m tenim que els vectors linealment independents $v, uv, u^2v, \dots, u^m v$ i $u^{m+1}v$ depenen d'algun dels vector precedents. Hem de provar que $uv \in W$. En qualsevol cas tenim la següent identitat per a $a \in A$: $auv = [a, u]v + uav =$

$\lambda([u, v])v + \lambda(a)uv$. D'aquesta manera cal provar que $\lambda([u, v]) = 0$. Repetim $au^i v = \lambda(a)u^i v + \cdots u[a, u]u^{i-2}v + [a, u]u^{i-1}v$, inductivament $[a, u]u^{i-2}v = \lambda([a, u])u^{i-2}v + \sum_{k < i-2} c_k u^k v$. D'aquesta manera a actua com una matriu triangular superior sobre els generadors $M := \langle v, uv, u^2v, \dots, u^m v \rangle$ dels vectors $u^i v$ amb $\lambda(a)$ a la diagonal. Per una altre costat, ja que M és estable sota u i a tenim que $[u, a]$ és un commutador de dos operadors de M . Així doncs, l'operador traça restringit a M és zero. Per una altra banda, per la fórmula explícita de $[u, a]$ obtenim que per a aquesta traça $(m+1)\lambda([u, v])$. Com que la característica és zero, es dóna $m+1 \neq 0$, per tant $\lambda([u, v]) = 0$. $\square$

2.5.5 Corol·lari. *Si $L \subseteq \text{End}(V)$ és una àlgebra de Lie resoluble, llavors $[L, L]$ està formada per elements nilpotents i, per tant, és nilpotent.*

2.5.6 Teorema. (Criteri de Cartan) *Sigui K un cos algebraicament tancat i V un K -espai vectorial de dimensió finita. Sigui $L \subseteq \text{End}(V)$ una àlgebra de Lie lineal. Si $\text{tr}(ab) = 0$ per a tot $a \in L, b \in [L, L]$, llavors L és resoluble.*

DEMOSTRACIÓ. Hem de provar que $[L, L]$ és nilpotent, o pel teorema d'Engel, que tots els elements de $[L, L]$ són nilpotents. Primer mostrem que podem fer una afirmació més abstracta. Sigui $M := \{x \in \mathfrak{gl}(V) : [x, L] \subseteq [L, L]\}$. Per suposat que $L \subseteq M$ i volem provar que encara tenim $\text{tr}(ab) = 0$ quan $a \in M, b \in [L, L]$. De fet si $b = [x, y]$, $x, y \in L$, llavors tenim per associativitat de la traça $\text{tr}([x, y]a) = \text{tr}(x[y, a]) = 0$, com que $x \in L$ i $[y, a] \in [L, L]$. D'aquesta manera, el teorema se segueix del següent lema general, aplicat a $A = [L, L]$ i $B = L$. $\square$

2.5.7 Lema. *Sigui V un espai vectorial de dimensió finita n sobre els nombres complexos i siguin $A \subseteq B \subseteq \text{End}(V)$ espais lineals. Sigui $M := \{x \in \mathfrak{gl}(V) : [x, B] \subseteq A\}$. Si un element de $a \in M$ satisfà $\text{tr}(ab) = 0$ per a tot $b \in M$ llavors a és nilpotent.*

DEMOSTRACIÓ. La primera observació a fer és que si $a \in M$, també a_s i a_n estan en M . Això se segueix del lema 2.5.1 i de les propietats de la descomposició de Jordan. Necessitem demostrar que $a_s = 0$. Siguin $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ els valor propis de a_s i $e_1, \dots, e_n$ una base corresponent de vectors propis. Per a qualsevol element semisimple b , el qual en la mateixa base és diagonal amb valors propis $\beta_1, \dots, \beta_n$, si $b \in M$ llavors $\sum_i \alpha_i \beta_i = 0$. Una condició suficient per a que $b \in M$ és que $\text{ad}(b)$ és un polinomi en $\text{ad}(a_s)$ sense termes constants. Això és cert si es pot trobar un polinomi $f(x)$ sense termes constants amb $f(\alpha_i - \alpha_j) = \beta_i - \beta_j$. Per la interpolació de Lagrange, l'única condició que es necessita és que si $\alpha_i - \alpha_j = \alpha_h - \alpha_k$, llavors sigui $\beta_i - \beta_j = \beta_h - \beta_k$. Per a això és suficient triar β_i com el valor de qualsevol funció $\mathbb{Q}$ -lineal sobre el $\mathbb{Q}$ espai vectorial per α_i en $\mathbb{C}$. Prenem una tal forma lineal g . Tenim que $\sum_i \alpha_i g(\alpha_i) = 0$ implica $\sum_i g(\alpha_i)^2 = 0$. Si els nombres $g(\alpha_i)$ són racionals, llavors això implica que $g(\alpha_i) = 0$ per a tot i . Ja que g pot ser qualsevol forma $\mathbb{Q}$ -lineal sobre un $\mathbb{Q}$ -espai vectorial, això només és possible si tots els $\alpha_i = 0$. $\square$

2.6 Subàlgebres de Cartan

En aquesta secció, si no s'esmenta el contrari, els resultats són vàlids per a àlgebres de Lie complexes. L'estratègia per a desvetllar l'estructura de les àlgebres semisimples és similar a l'estratègia seguida per Frobenius per entendre els caràcters dels grups finits. En cada cas, es tracta d'entendre com el polinomi característic d'un element genèric (en un cas de l'àlgebra de Lie, i en l'altre de l'àlgebra de grup) descompon en factors. En altres paraules, si es té una matriu genèrica semisimple, estudiem els seus valors propis.

2.6.1 Definició. Una subàlgebra tòrica $\mathfrak{h}$ d'una àlgebra de Lie L és una subàlgebra formada només per elements semisimples, és a dir, elements la matriu dels quals en una base és diagonal

2.6.2 Lema. *Tota subàlgebra tòrica $\mathfrak{h}$ d'un grup de Lie L és abeliana.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que $\mathfrak{h}$ és no abeliana. Llavors hi ha un element $x \in \mathfrak{h}$ amb un valor propi no nul per a un vector propi $y \in \mathfrak{h}$, és a dir, $[x, y] = ay$ amb $a \neq 0$. En l'espai generat per x, y , l'element y actua com $[y, x] = -ay$, $[y, y] = 0$. Per tant, sobre aquest espai l'acció de y és donada per una matriu no nul·la nilpotent. Per tant, y no és semisimple, com havíem suposat. $\square$

Se segueix del lema que els operadors semisimples $\text{ad}(x)$ amb $x \in \mathfrak{h}$ són simultàniament diagonalitzables. Quan parlem d'un vector propi v per a $\mathfrak{h}$ ens referim a un vector no nul de $v \in L$ tal que $[h, v] = \alpha(h)v$, per a tot $h \in \mathfrak{h}$. Llavors $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ és una forma lineal, anomenada valor propi. Denotarem per $\mathfrak{h}^*$ l'espai vectorial dual de $\mathfrak{h}$. Així, $\alpha \in \mathfrak{h}^*$.

2.6.3 Definició. En una àlgebra de Lie semisimple L , una subàlgebra tòrica maximal $\mathfrak{h}$ s'anomena subàlgebra de Cartan.

2.6.4 Proposició. *Una subàlgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ d'una àlgebra de Lie semisimple $L \neq (0)$ és no nul·la.*

DEMOSTRACIÓ. Cada element de L té una descomposició en matrius de Jordan. Si tots els elements fossin nilpotents, L seria nilpotent pel teorema d'Engel 2.5.3. Per tant, L admet elements semisimples no trivials. $\square$

2.6.5 Observació. Podem descompondre L en suma directa espais propis per l'acció adjunta de $\mathfrak{h}$, dits també espais de pesos, respecte de $\mathfrak{h}$.

2.6.6 Definició. Els valors propis no nuls per l'acció adjunta en $\mathfrak{h}$ defineixen un subconjunt $\Phi \subset \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ de formes lineals sobre

$\mathfrak{h}$ que s'anomenen arrels. Per tant, una arrel és un vector no nul del dual de l'àlgebra de Cartan. Una arrel té tantes components, fixada una base $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, com el rang de L .

2.6.7 Exercici. Les subàlgebres de Cartan de l'àlgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$ estan formades per matrius diagonals de traça nul·la (en una certa base). Un conjunt de matrius diagonals de traça nul·la que són linealment independents té dos elements, com a molt.

Totes les subàlgebres de Cartan de l'àlgebra $\mathfrak{su}(3)$ són, a part de

$$\langle T_3, T_8 \rangle \quad \langle T_1, T_8 \rangle \quad \text{i} \quad \langle T_2, T_8 \rangle,$$

cada una d'ells correspon a les subàlgebres $\mathfrak{su}(2)$ que conté $\mathfrak{su}(3)$. Aquesta informació es treu de la matriu M que hem calculat en la subsecció 2.1.2.

Comprovem, tal i com diu el lema, que les matrius $\text{ad}(T_3)$ i $\text{ad}(T_8)$ són simultàniament diagonalitzables.

Recordem que les matrius són

$$\text{ad}(T_3) = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i

$$\text{ad}(T_8) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comprovem que el vector $E_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 - iT_2)$ és vector propi de $\text{ad}(T_3)$ i $\text{ad}(T_8)$. Escrivim-ho en notació vectorial i sigui $v := (1, -i, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Aleshores,

$$\text{ad}(T_3)v^\top = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i

$$\text{ad}(T_8)v^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'aquesta manera, l'arrel associada a aquests vectors propis és la forma lineal

$$\begin{aligned}\alpha_1 : \mathfrak{h} &\rightarrow \mathbb{C} \\ T_3 &\mapsto 1 \\ T_8 &\mapsto 0.\end{aligned}$$

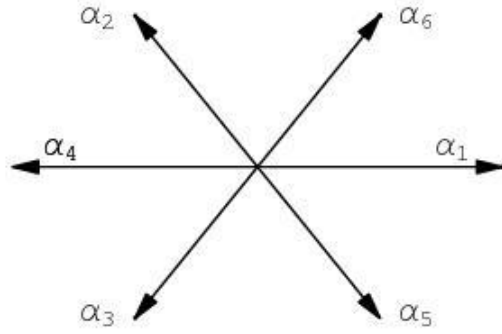
De manera anàloga, l'arrel α_4 és donada pel vector propi $E_4 := \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 + iT_2)$ i la forma lineal associada és

$$\begin{aligned}\alpha_4 : \mathfrak{h} &\rightarrow \mathbb{C} \\ T_3 &\mapsto -1 \\ T_8 &\mapsto 0.\end{aligned}$$

La resta de vectors propis per a T_3 i T_8 són

$$\begin{aligned}E_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T_6 + iT_7) \\ E_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T_4 - iT_5) \\ E_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T_6 - iT_7) \\ E_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T_4 + iT_5).\end{aligned}$$

Les altres arrels són: $\alpha_1 = (1, 0)$, $\alpha_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ i $\alpha_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. A més, $\alpha_4 = -\alpha_1$, $\alpha_5 = -\alpha_2$ i $\alpha_6 = -\alpha_3$.

Figura 2.1: Esquema de les arrels de l'àlgebra de Lie de $\mathbf{SU}(3)$

2.6.8 Observació. Les xarxes d'arrels no depenen de la subàlgebra de Cartan escollida.

Per tant, la matriu del canvi de base que diagonalitza simultàniament $\text{ad}(T_3)$ i $\text{ad}(T_8)$ operant en el subespai $\langle E_1, \dots, E_6 \rangle$, suplementari de $\langle H_1, H_2 \rangle$ és

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6.9 Definició. Si $\alpha \in \Phi$,

$$L_\alpha := \{x \in L \mid [h, x] = \alpha(h)x, \text{ per a tot } h \in \mathfrak{h}\}$$

és el corresponent espai propi associat a l'arrel α . Es diu que L_α és l'espai de pes α per $\mathfrak{h}$. Els elements no nuls de L_α s'anomenen vectors arrels relatius a α .

2.6.10 Exercici. Sigui $L = \mathfrak{su}(3)$. La matriu

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pertany a l'espai de pesos L_{α_1} ja que es pot comprovar que compleix

$$[T_3, R] = R = 1 \cdot R = \alpha_1(T_3) \cdot R$$

i

$$[T_8, R] = 0 = 0 \cdot R = \alpha_1(T_8) \cdot R,$$

per tant complirà la relació desitjada per a qualsevol element generat per T_3 i T_8 .

Així mateix la matriu

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es pot comprovar que és una matriu que pertany a l'espai de pesos L_{α_4} .

A continuació citarem unes altres propietats importants per a l'estudi de les arrels.

2.6.11 Proposició. *La forma de Killing restringida a L_0 és no degenerada. Els espais de pesos L_α, L_β són ortogonals per la forma de Killing, llevat que $\alpha + \beta = 0$. A més, tenim que $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $a \in L_\alpha$, $b \in L_\beta$ i $h \in \mathfrak{h}$. Tenim que $\alpha(t)(a, b) = ([t, a], b) = -([a, t], b) = -(a, [t, b]) = -\beta(t)(a, b)$. Per tant si sumem tenim que $\alpha(t)(a, b) + \beta(t)(a, b) = 0$. Aleshores $(a, b) = 0$, llevat que $\alpha + \beta = 0$. Donat que la forma de Killing és no degenerada, es dedueix que no ho és tampoc en L_0 i l'espai

L_α és ortogonal a tot L_β per $\alpha \neq -\beta$, mentre que L_α i $L_{-\alpha}$ estan en perfecta dualitat.

La tercera afirmació és conseqüència de les propietats de les derivacions. Si $a \in L_\alpha$, $b \in L_\beta$, $t \in \mathfrak{h}$, tenim

$$[t, [a, b]] = [[t, a], b] + [a, [t, b]] = \alpha(t)[a, b] + \beta(t)[a, b].$$

□

2.6.12 Teorema. *La subàlgebra $\mathfrak{h}$ és igual al seu espai de pes 0. És a dir,*

$$\mathfrak{h} = L_0 := \{x \in L \text{ tal que } [h, x] = 0, \text{ per a tot } h \in \mathfrak{h}\}.$$

DEMOSTRACIÓ. De la proposició anterior L_0 és una subàlgebra de Lie. Sigui $a \in L_0$ i descomponem $a = a_s + a_n$. Com que $\text{ad}(a)$ és zero sobre $\mathfrak{h}$, haurem de tenir també que $a_s, a_n \in L_0$ ja que commuten amb $\mathfrak{h}$. Aleshores $\mathfrak{h} + \mathbb{C}a_s$ és encara subàlgebra tòrica i per maximalitat es dona $\mathfrak{h} + \mathbb{C}a_s = \mathfrak{h}$ i per tant $a_s \in \mathfrak{h}$. Aleshores $\mathfrak{h}$ conté totes les parts semisimples dels elements de L_0 .

Provem ara que la forma de Killing és no degenerada sobre $\mathfrak{h}$. Suposem que $a \in \mathfrak{h}$ està en el nucli de la forma de Killing restringida a $\mathfrak{h}$. Prenem $c = c_s + c_n \in L_0$. L'element $\text{ad}(a)\text{ad}(c_n)$ és nilpotent (atès que dos elements commuten), per tant té traça 0. El valor $(a, c_s) = \text{tr}(\text{ad}(a)\text{ad}(c_s)) = 0$ com que $c_s \in \mathfrak{h}$, i per hipòtesis $a \in \mathfrak{h}$ està en el nucli de la forma de Killing restringida a L_0 . Aquesta restricció per 2.6.11 és no degenerada, per tant $a = 0$.

Ara descomponem $L_0 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$, on $\mathfrak{h}^\perp$ és el complementari ortogonal a $\mathfrak{h}$ respecte la forma de Killing. De la mateixa discussió segueix que $\mathfrak{h}^\perp$ es compon d'elements nilpotents. Per tant $\mathfrak{h}^\perp$ és un ideal de Lie de L_0 , ja que $a \in \mathfrak{h}$, $c \in \mathfrak{h}^\perp$, $b \in L_0$ implica que $(a, [b, c]) = ([a, b], c) = 0$. Ara afirmem que $\mathfrak{h}^\perp$ està continguda en el nucli de la forma de Killing restringit a L_0 . De

fet, com que $ad(\mathfrak{h}^\perp)$ és una àlgebra de Lie composta d'elements nilpotents, això segueix del teorema d'Engels, ??, que la forma de Killing sobre $\mathfrak{h}^\perp$ és 0. Atès que la forma de Killing sobre L_0 és no degenerada, això implica que $\mathfrak{h}^\perp = 0$ i per tant $\mathfrak{h} = L_0$. $\square$

2.6.13 Corol·lari. *Tenim que $L = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$.*

DEMOSTRACIÓ. Se segueix de les proposicions 2.6.11 i 2.6.12 i de les definicions. $\square$

2.6.14 Corol·lari. *Existeix un únic element $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ amb $(h, t_\alpha) = \alpha(h)$, per a tot $h \in \mathfrak{h}$.*

DEMOSTRACIÓ. Se segueix de 2.6.11. $\square$

2.6.15 Observació. Ja que la forma de Killing sobre $\mathfrak{h}$ és no degenerada, podem identificar $\mathfrak{h}$ amb $\mathfrak{h}^*$ per mitja de la forma de Killing. En particular, per a cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ tenim que existeix un element $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ amb

$$(h, t_\alpha) = \alpha(h),$$

per a tot $h \in \mathfrak{h}$.

Usualment s'identifica $\mathfrak{h}$ amb el seu dual $\mathfrak{h}^*$ usant la forma de Killing. En aquesta identificació, t_α correspon a α . Es pot transportar la forma de Killing a $\mathfrak{h}^*$. En particular, tenim per a dos arrels $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ que

$$(\alpha, \beta) := (t_\alpha, t_\beta) = \alpha(t_\beta) = \beta(t_\alpha) = \frac{(\alpha, \alpha)}{2} \beta(t_\alpha).$$

2.6.16 Proposició. *Per a cada arrel $\alpha \in \Phi$, siguin $a \in L_\alpha$, $b \in L_{-\alpha}$. Tenim que es compleix $[a, b] = (a, b)t_\alpha$. El subespai $[L_\alpha, L_{-\alpha}] = \mathbb{C}t_\alpha$, per tant, és de dimensió 1.*

DEMOSTRACIÓ. Per la proposició 2.6.11, $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ està continguda en $\mathfrak{h}$ i, si $h \in \mathfrak{h}$, $a \in L_\alpha$, $b \in L_{-\alpha}$ tenim $(h, [a, b]) = ([h, a], b) = \alpha(h)(a, b) = (h, (a, b)t_\alpha)$. Això significa que $[a, b] = (a, b)t_\alpha$ està en un espai de dimensió 1 generat per t_α . $\square$

2.6.17 Definició. Anomenem transició fonamental associada a l'arrel $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ l'element $t_\alpha \in \mathfrak{h}$.

2.6.18 Proposició. *Es compleix que $(t_\alpha, t_\alpha) = \alpha(t_\alpha) \neq 0$, per a tot $\alpha \in \Phi$.*

DEMOSTRACIÓ. Com que $L_\alpha, L_{-\alpha}$ estan aparellats per la forma de Killing, podem trobar $a \in L_\alpha$, $b \in L_{-\alpha}$ amb $(a, b) = 1$, i d'aquí $[a, b] = t_\alpha$. Tenim $[t_\alpha, a] = \alpha(t_\alpha)a$, $[t_\alpha, b] = -\alpha(t_\alpha)b$. Si $\alpha(t_\alpha) = 0$, estem en el cas de l'observació anterior: a, b, t_α generen una àlgebra de Lie resoluble i per tant la representació t_α és nilpotent. Atès que $t_\alpha \in \mathfrak{h}$, tenim que és semisimple en cada representació, en particular en la representació adjunta. Deduïm que $\text{ad}(t_\alpha) = 0$, la qual cosa és una contradicció. $\square$

Sigui $\tilde{X}_\alpha$ un element de L_α tal que $(\tilde{X}_\alpha, \tilde{X}_\alpha) = 1$. Anomenem element arrel associat a α a l'element

$$X_\alpha := \frac{\sqrt{2}\tilde{X}_\alpha}{\sqrt{(t_\alpha, t_\alpha)}}.$$

2.6.19 Exercici. En l'exemple anterior relatiu a $\mathfrak{su}(3)$, hem calculat matrius de l'espai de pesos L_{α_1} i $L_{\alpha_4} = L_{-\alpha_1}$, que eren respectivament

$$a := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i

$$b := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segons la proposició

$$[a, b] = (a, b)t_{\alpha_1}.$$

Si fem els càlculs tenim que

$$\begin{aligned} m &= a \cdot b - b \cdot a \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Clarament es compleix que $[a, b] \in \mathfrak{h}$ ja que $m = H_1$.

Observem a més que $[L_{\alpha_1}, L_{\alpha_4}] = t_{\alpha_1}\mathbb{C}$ i observem que la forma de Killing val

$$(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_1}) = H[3, 3] = 3 \neq 0,$$

segons la matriu que hem calculat en l'exemple 2.4.8.

A continuació donarem algunes propietats trivials de les arrels, referents a la seva mètrica en l'espai vectorial. Citem una sèrie de resultats que no es demostraran, però que reflecteixen la geometria del conjunt de les arrels.

2.6.20 Lema. *Tenim les propietats següents:*

- (i) *Si α és una arrel, també ho és $-\alpha$.*
- (ii) *Si $\alpha \in \Phi$ i $x\alpha \in \Phi$ amb $x \in \mathbb{Z}$, llavors $x = \pm 1$.*
- (iii) *Les arrels generen $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$. Els vectors arrel generen $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.*

DEMOSTRACIÓ. Cf. [Pro07]. $\square$

Sigui $\mathfrak{g}$ l'àlgebra de Lie d'un grup de Lie semisimple G , $\mathfrak{h}$ la seva subàlgebra de Cartan i $\Phi \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ el seu conjunt d'arrels. Prenem un vector $v_0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ tal que $\{\gamma \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid \gamma(v_0) = 0\}$ és disjunt amb Φ . Això permet definir

$$\Phi^+ := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(v_0) > 0\}$$

i

$$\Phi^- := \{-\alpha \mid \alpha \in \Phi^+\}.$$

2.6.21 Definició. Una arrel α , s'anomena fonamental o simple si està en Φ^+ però no pot ser escrita com $\beta + \gamma$ amb $\beta, \gamma \in \Phi^+$.

2.6.22 Teorema. *Tenim les propietats següents:*

- (i) *Si α, β són dos arrels diferents fonamentals, llavors $(\alpha, \beta) \leq 0$.*
- (ii) *El conjunt d'arrels fonamentals generen $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$; de fet qualsevol $\alpha \in \Phi^+$ és una combinació lineal de arrels fonamentals amb coordenades enteres i positives.*
- (iii) *El conjunts d'arrels fonamentals és linealment independent.*
- (iv) *Hi ha exactament $\text{rang}(G)$ arrels fonamentals.*

2.6.23 Definició. Sigui $(\cdot, \cdot)$ un producte escalar de $\mathbb{R}^n$. Un sistema fonamental és un conjunt de vectors, $\{v_1, \dots, v_n\}$ on els vectors estan en espai euclídea real de dimensió n $\mathbb{R}^n$ i que compleixen

1. Els $\{v_i\}$'s són una base.
2. Cada $n_{ij} = 2(v_i, v_j)/(v_j, v_j)$ és un element del conjunt $\{0, -1, -2, -3\}$ amb $n_{ji} = -1$ si $n_{ij} = -2$ o -3 .

2.6.24 Observació. Un sistema d'arrels pot contenir més d'un sistema fonamental.

2.6.25 Exemple. Els subconjunts de les arrels $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ i $\{\alpha_1, \alpha_3\}$ són dos sistemes fonamentals diferents de l'àlgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$.

2.6.26 Definició. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ és un sistema fonamental, el sistema format pels elements $w_i = 2v_i/(v_i, v_i)$ el qual satisfi que per a tot parell $\{i, j\}$, $n_{ij}(w) = n_{ij}(v)$ s'anomena el sistema fonamental dual.

2.6.27 Exemple. Com en l'exemple 2.6.7, considerem l'àlgebra de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{su}(n)$ formada pel conjunt de les matrius diagonals

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}, \quad \sum d_i = 0$$

de traça nula i sigui $\delta_i(D) = d_i$. Aleshores les arrels són $\alpha_{ij} = \delta_i - \delta_j$ per a $i \neq j$. Sigui

$$D = \begin{pmatrix} n & & & 0 \\ & n-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 \\ 0 & & & & c \end{pmatrix}$$

amb $c = -\sum_{i=2}^n j$. Llavors D_0 compleix $\alpha_{ij}(D_0) \neq 0$, per tant pot ser usat per definir la positivitat. Les arrels positives seran doncs $\{\alpha_{ij} \in \mathfrak{h}^* | i < j\}$ i un sistema fonamental és $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{n-1,n}$. Notem que si $i < j$, llavors $\alpha_{ij} = \alpha_{i,i+1} + \alpha_{i+1,i+2} + \dots + \alpha_{j-1,j}$, tal com il·lustra el l'apartat (ii) del teorema anterior. Òbviament, les arrels $\alpha^{(i)} := \alpha_{i,i+1}$ són una base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$. Veurem llavors

$$\begin{aligned} n_{ij} &= 0 & |i-j| &\geq 2, \\ &= -1 & |i-j| &= 1, \end{aligned}$$

on n_{ij} satisfà les condicions de 2.6.23

El teorema següent redueix la classificació de les àlgebres de Lie compactes a la classificació dels sistemes fonamentals d'arrels.

2.6.28 Teorema. *Se satisfan les propietats següents:*

- (i) *Dos sistemes fonamentals per a una àlgebra de Lie simple són equivalents sota un moviment del pla euclidià.*
- (ii) *Per a cada sistema fonamental normalitzat d'arrels F , existeix una única àlgebra de Lie semisimple la qual el sistema fonamental d'arrels associat pot ser obtingut a partir de F per a un moviment del pla euclidià i amb la composició d'una homotècia.*

2.7 El grup de Weyl d'un grup de Lie

2.7.1 Diagrames de Cartan-Stiefel

Recordem que $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ té un producte natural propi; hi ha un conjunt d'arrels $\Phi \subseteq \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ i aplicacions naturals definides per a cada $\alpha \in \Phi$,

$$s_{\alpha}(\beta) = \beta - 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$

reflexions respecte de l'hiperplà $\pi_{\alpha} = \{\gamma \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* | (\alpha, \gamma) = 0\}$. Escriurem $\tilde{\pi}_{\alpha} \subseteq \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, on $\tilde{\pi}_{\alpha}$ és la imatge de π sota l'isomorfisme natural l'associació natural de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ en $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$. Es pot comprovar que s_{α} aplica Φ en ell mateix.

2.7.1 Definició. El diagrama de Cartan-Stiefel infinitesimal π és el conjunt $\cup_{\alpha \in \Phi} \pi_{\alpha}$ en $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$. Com que $s_{\alpha}(\pi_{\beta}) = \pi_{s_{\alpha}(\beta)}$, la funció s_{α} aplica π en ell mateix. Cada π_{α} divideix $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ en dos meitats no connexes, per tant $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \setminus \pi$ és l'unió de regions les vores de les quals són peces dels hiperplans π_{α} .

2.7.2 Definició. A les clausures de les components connexes se les anomena cambres de Weyl.

El conjunt de les cambres de Weyl serà denotat per $\mathcal{C}$. Per tant un punt de $\mathcal{C}$ correspon a una cambra de Weyl. Atès que s_α aplica π en ell mateix, cada s_α permuta els punts de $\mathcal{C}$.

2.7.3 Exemple. En la figura següent observem els hiperplans p_1 , p_2 i p_3 que corresponen respectivament als hiperplans π_{α_1} , π_{α_2} i π_{α_3} .

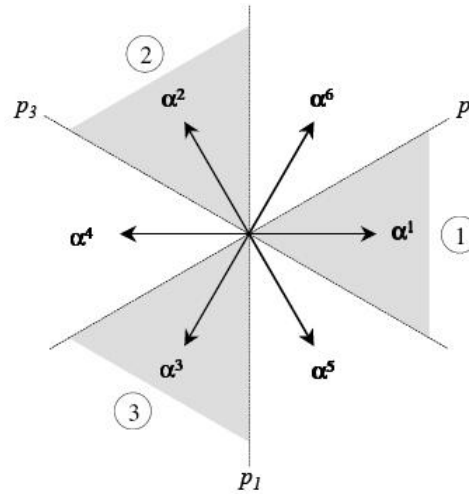


Figura 2.2: Diagrama de Cartan-Stiefel de l'àlgebra $\mathfrak{su}(3)$.

Tres de les cambres de Weyl estan pintades en fosc.

2.7.2 Definicions i resultats bàsics

2.7.4 Definició. Sigui G un grup i H un subgrup de G . El normalitzador de H respecte de G és el grup

$$N(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

El centre d'un grup H és el grup de

$$Z(H) = \{x \mid xhx^{-1} = h \text{ per a tot } h \in H\}.$$

2.7.5 Observació. És té que

$$H \subseteq N(H) \subseteq G.$$

2.7.6 Definició. Sigui G un grup de Lie i $T \subseteq G$, un tor maximal. Un grup de Weyl de G és

$$W = N(T)/Z(T).$$

2.7.7 Observació. Atès que tots els tors maximals són isomorfs, els grups de Weyl també ho són.

2.7.8 Proposició. *Sigui G un grup de Lie, $W = W(T)$ un grup de Weyl de G , $\mathfrak{g}$ l'àlgebra de Lie de G i $\mathfrak{h}$ l'àlgebra de Lie de T . Aleshores, W opera*

- (i) *en $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ com a un conjunt d'isometries,*
- (ii) *en Φ com a grup de permutacions de les arrels,*
- (iii) *en π com a reflexions,*
- (iv) *en $\mathcal{C}$, com a grup permutacions.*

DEMOSTRACIÓ. Si $t \in W$, hi ha un $x \in G$ tal $t(y) = xyx^{-1}$ per a qualsevol $y \in T$. D'aquesta manera, $\text{ad}(x)$ defineix una aplicació lineal de $\mathfrak{h}$ a $\mathfrak{h}$ i per tant, de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ a $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, i llavors per dualitat tenim una aplicació de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ en ell mateix. Cap $\text{ad}(x)$ pot ser trivial sobre $\mathfrak{h}$ perquè si ho fos, $\text{ad}(x)$ seria trivial per tant $x \in Z(H)$; això és W es respecta fidelment en un conjunt d'isometries lineals sobre $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$. Si α és una arrel amb element arrel X_{α} , llavors per a qualsevol $Y \in \mathfrak{h}$,

$$\begin{aligned} [\text{Ad}(Y), \text{ad}(x)(X_{\alpha})] &= \text{ad}(x)[\text{Ad}(\text{ad}(x^{-1})(Y)), X_{\alpha}] \\ &= [\alpha(\text{ad}(x^{-1})(Y))] \text{ad}(x)(X_{\alpha}) \end{aligned}$$

per tant, $\text{ad}(x)(\alpha)$ és també una arrel, i per tant, el grup de Weyl actuant sobre $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ actua com un grup de permutacions de les arrels. $\square$

Del grup de Weyl ens interessen els següents resultats,

2.7.9 Teorema. *Donada $\alpha \in \Phi$, cada simetria s_α és un element del grup de Weyl.*

2.7.10 Teorema. *El grup W actua simplement i transitivament sobre $\mathcal{C}$; això és, donades dos cambres de Weyl C_1, C_2 , existeix un únic $T \in W$ tal que $T[C_1] = C_2$.*

2.7.3 Grup de Weyl de $\text{SU}(3)$

Cada arrel té un hiperplà perpendicular a ella. Clarament, com hem vist, les arrels del diagrama són invariants per reflexió respecte d'aquest hiperplans.

A fi d'estudiar en detall aquestes reflexions, denotem els estats tal i com indica la figura 2.3.

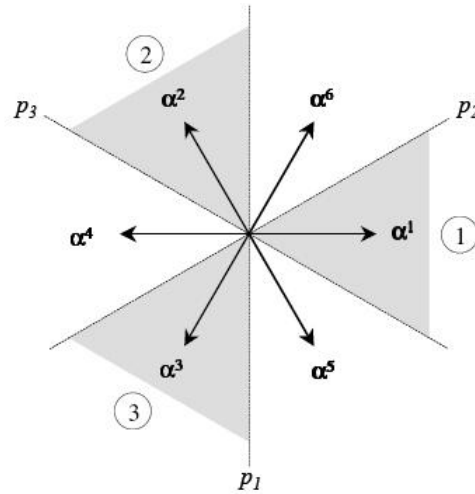


Figura 2.3: Diagrama de Cartan-Stiefel del l'àlgebra $\mathfrak{su}(3)$.

Si denotem l'estat de la figura 3 con (1:2:3). Veiem que un reflexió en el pla p_1 porta aquest estat a (-1:-3:-2). En general un reflexió en el pla p_j canvia de signe tots el factors però canvia l'ordre dels dos altres valors. En altres paraules

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Els productes entre les matrius defineixen els altres tres elements del grup de Weyl R^+ , R^- i 1:

$$R^+ := P_1 P_2 = P_2 P_3 = P_3 P_1$$

$$R^- := P_2 P_1 = P_3 P_2 = P_1 P_3$$

$$1 := P_1^2 = P_2^2 = P_3^2 = R^+ R^- = R^- R^+$$

Es clar que en ser un grup no commutatiu amb 6 elements és correspon a S_3 .

2.7.4 Grup de Weyl de $SU(n)$

2.7.11 Teorema. *El grup de Weyl corresponent al grup de Lie $SU(n)$ és el grup simètric S_n sobre n elements.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui $SU(n)$. Considerem com a T , el conjunt de matrius diagonals. Aleshores tenim que una subàlgebra de Cartan de $\mathfrak{su}(n)$ és

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \mid d_i \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^n d_i = 0 \right\}.$$

En aquesta situació, sigui $\delta_i(\cdot) := d_i$. Aleshores les arrels són $\alpha_{ij} = \delta_i - \delta_j$. Sigui $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una base natural de $\mathbb{C}^n$. Llavors, la conjugació per un element $x \in \mathbf{SU}(n)$ aplica $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{h}$ si, i només si, $xe_j = a_j e_{p(j)}$ on $p \in S_n$ i $|a_j| = 1$. Les permutacions $p \in S_n$ tals que $p = (i, j)$ i $xe_j = e_i$, $xe_i = -e_j$, i $xe_k = e_k$ amb per a $i, j \neq k$ que es corresponen amb els elements $x \in \mathbf{SU}(3)$. Aquests elements x actuen sobre T segons $\delta_i x = \delta_{p^{-1}(i)}$. Per tant, $W \simeq S_n$. $\square$

2.8 Tipus de sistemes d'arrels

Els sistemes d'arrels foren introduïts per primera vegada per Wilhelm Killing l'any 1887. Ell definí sis tipus, dels quals els quatre següents seran d'interès.

Tipus A_n . El sistema d'arrels està en el subespai E de $\mathbb{R}^{n+1}$ on la suma de les coordenades és zero i les arrels són els vectors $e_i - e_j$, $i \neq j$. El grup de Weyl és el grup simètric S_{n+1} , el qual permuta els elements de la base. Notem que el grup de Weyl permuta transitivament les arrels. Les arrels són els vectors enters de V amb norma Euclídea 2.

Tipus B_n . Espai Euclídea $\mathbb{R}^n$, amb arrels:

$$\pm e_i, \quad e_i - e_j, \quad e_i + e_j, \quad -e_i - e_j, \quad i \neq j \leq n.$$

El grup de Weyl en aquest cas és el producte semidirecte $S_n \ltimes \mathbb{Z}/(2)^n$ del grup simètric el qual permuta les coordenades, amb el grup de signatura el qual canvia els signes de les coordenades.

Notem que en aquest cas tenim dos tipus d'arrels, amb norma Euclídea 2 i 1. El grup de Weyl té dos òrbites i permuten transitivament dos tipus d'arrels.

Tipus C_n . Espai Euclídea $\mathbb{R}^n$, amb arrels:

$$e_i - e_j, \quad e_i + e_j, \quad -e_i - e_j, \quad i \neq j, \quad \pm 2e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

El grup de Weyl és igual que per B_n . De nou tenim dos tipus d'arrels, amb norma euclídea 2 o 4, i el grup de Weyl permuta transitivament els dos tipus d'arrels.

Tipus D_n . Espai Euclídea $\mathbb{R}^n$, amb arrels: Espai Euclídea $\mathbb{R}^n$, amb arrels:

$$e_i - e_j, \quad e_i + e_j, \quad -e_i - e_j, \quad i \neq j \leq n.$$

El grup de Weyl és un producte semidirecte $S_n \ltimes \mathbb{Z}/(2)^n$, on S_n és el grup simètric de permutacions de les coordenades, i $\mathbb{Z}/(2)$ el grup que canvia els signes.

En aquest cas el grup de Weyl permuta transitivament les arrels les quals totes elles tenen norma Euclídea 2.

Donada una àlgebra de Lie complexa, direm que és de tipus X si X és el seu sistemes d'arrels. D'acord amb la definició es te

Tipus	àlgebra de Lie
A_n	$\mathfrak{sl}(n+1, C)$
B_n	$\mathfrak{so}(2n+1, C)$
C_n	$\mathfrak{sp}(2n, C)$
D_n	$\mathfrak{so}(2n, C)$

Capítol 3

Representacions de grups semisimples compactes

L'objectiu d'aquest capítol és el càlcul de les representacions d'alguns grups de Lie i d'algunes àlgebres de Lie clàssiques. Ens centrarem en el grup $\mathbf{SU}(n)$.

3.1 Introducció a la teoria de xarxes

En aquesta secció donarem alguns conceptes bàsics de la teoria de xarxes que necessitarem més endavant per a tractar les xarxes de les arrels i les xarxes dels pesos. Definirem aquestes en les seccions posteriors.

3.1.1 Definició. Sigui V un espai vectorial real de dimensió finita. Una xarxa és un subgrup additiu $\mathcal{L}$ de $(V, +)$ tal que

1. $\mathcal{L}$ és tancant.
2. $\mathcal{L}$ és discret.
3. $\mathcal{L}$ genera V com a espai vectorial.

En el que resta de secció exposarem alguns fets de teoria de xarxes.

3.1.2 Proposició. *Se satisfan les propietats següents:*

- (i) *Cada xarxa conté una base com a $\mathbb{Z}$ -mòdul, és a dir, existeix un subconjunt de vectors $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n} \subseteq \mathcal{L}$ on $n = \dim(V)$, tal que*

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum m_i v_i \mid m_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De fet, v_1 pot triar-se sent qualsevol vector en $\mathcal{L}$ tal que $\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cap \mathcal{L} = \mathbb{Z}v$.

- (ii) *Si $\{w_i\}_{1 \leq i \leq n}$ és un segon subconjunt de $\mathcal{L}$ amb*

$$w_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} v_j,$$

llavors w és una base si, i només si, $\det(m_{ij}) = \pm 1$. Per tant, el conjunt de bases de $\mathcal{L}$ és un G -espai transitiu i simple per al grup $G = \mathbf{GL}(n, \mathbb{Z})$ de matrius $n \times n$ i de coeficients en $\mathbb{Z}$ i determinant ± 1 .

3.1.3 Definició. Si $\mathcal{L}$ i $\mathcal{K}$ són xarxes de V , es diu que $\mathcal{L}$ és una subxarxa de $\mathcal{K}$ si, i només si, $\mathcal{L}$ és un subgrup additiu de $\mathcal{K}$.

3.1.4 Teorema. *Si $\mathcal{K}$ és una subxarxa de $\mathcal{L} \subset V$, llavors $\mathcal{L}/\mathcal{K}$ és un grup abelià finit G . A més, hi ha una correspondència bijectiva entre xarxes $\mathcal{M}$ amb $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ i subgrups $\mathcal{R}$ de G donada per $\pi[\mathcal{M}] = \mathcal{R}$, $\mathcal{M} = \pi^{-1}[\mathcal{R}]$ on $\pi : \mathcal{K} \rightarrow G$ és la projecció natural. Si $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ i $\{y_j\}_{1 \leq j \leq n}$ són bases de $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ i $x_i = \sum m_{ij} y_j$, llavors $o(\mathcal{K}/\mathcal{L}) = |\det(m_{ij})|$.*

DEMOSTRACIÓ. Cf. [Sim96]. $\square$

A continuació estudiarem les xarxes duals i la seva relació amb les xarxes d'on provenen.

3.1.5 Definició. Sigui $\mathcal{L} \subset V$ una xarxa. Sigui $\mathcal{L}^* \subseteq V^*$ el conjunt definit per

$$\mathcal{L}^* = \{\ell \in V^* \mid \ell(x) \in \mathbb{Z}, \text{ per a tot } x \in \mathcal{L}\}.$$

$\mathcal{L}^*$ és una xarxa de l'espai dual V^* , anomenada la xarxa dual de $\mathcal{L}$.

La proposició següent recull algunes propietats elementals.

3.1.6 Proposició. *Se satisfan les propietats següents:*

- (i) *Sigui $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una base d'una xarxa $\mathcal{L}$. Es defineix $\{f_j\}_{1 \leq j \leq n}$ per*

$$f_j(e_i) := \delta_{ij}.$$

Llavors $\{f_j\}_{1 \leq j \leq n}$ és una base de $\mathcal{L}^$.*

- (ii)

$$\mathcal{L}^{**} = \mathcal{L}.$$

- (iii) *Sigui $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ xarxes en V . Llavors $\mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{K}^*$ i*

$$\mathcal{K}^*/\mathcal{L}^* \simeq (\mathcal{L}/\mathcal{K})^*,$$

és el grup dual de $\mathcal{L}/\mathcal{K}$.

3.2 Xarxes d'arrels i xarxes de pesos

Siguin G un grup de Lie i $\mathfrak{g}$ la seva àlgebra de Lie. Sigui $\mathfrak{h}$ una subàlgebra de Cartan. Sigui $\alpha \in \Phi \subseteq \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ una arrel.

Considerem els hiperplans $\tilde{\pi}_{\alpha}$ de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ definits per

$$\tilde{\pi}_{\alpha} = \{X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \alpha(X) = 0\}.$$

Estem interessats és el conjunt

$$\eta_\alpha = \{X \in \mathfrak{h}_\mathbb{R} \mid \alpha(X) \in \mathbb{Z}\}.$$

Es defineix el conjunt següent

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &:= \bigcap_{\alpha \in \Phi} \eta_\alpha \\ &= \{X \in \mathfrak{h}_\mathbb{R} \mid \alpha(X) \in \mathbb{Z} \text{ per a tot } \alpha \in \Phi\} \\ &= \bigcap_{\alpha_i \in F} \eta_{\alpha_i} \end{aligned}$$

on F és un sistema fonamental d'arrels. És clar que $\mathcal{Z}$ és una xarxa de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$.

Hi ha dues xarxes importants, a més de $\mathcal{Z}$. La primera depèn només de l'àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$. La segona depèn del grup de Lie G . Sigui

$$\mathcal{T} = \left\{ \sum_{j=1}^n n_j t_j \mid n_j \in \mathbb{Z} \right\},$$

on $\{t_j\}$ són les transicions associades a les arrels del sistema fonamental i sigui la segona xarxa

$$\mathcal{K} = \{X \in \mathfrak{h}_\mathbb{R} \mid e(X) = \text{Id}_G\} = \ker e|_{\mathfrak{h}_\mathbb{R}},$$

on $e : \mathfrak{h}_\mathbb{R} \rightarrow T$ és definida per $e(X) = e^{2\pi i X}$.

3.2.1 Proposició. *La xarxa $\mathcal{T}$ conté totes les transicions t_α , $\alpha \in \Phi$, i és independent de l'elecció del sistema fonamental.*

3.2.2 Teorema. *Es tenen les inclusions següents:*

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{Z}.$$

3.2.3 Teorema. *$\mathcal{Z}/\mathcal{K} \simeq Z(G)$, on $Z(G)$ és el centre de G . L'isomorfisme prove de l'aplicació exponencial $e : \mathfrak{h}_\mathbb{R} \rightarrow T \subseteq G$, $X \mapsto e^{2\pi i X}$ de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ en $T \subseteq G$.*

DEMOSTRACIÓ. Apliquem e de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ a T . Pel teorema 3.1.2, $Z(G) = e[\mathcal{Z}]$. El nucli és precisament $\mathcal{K}$, per tant $Z(G) \simeq \mathcal{Z}/\mathcal{K}$.
□

Juntament amb el teorema 3.1.4 que hem vist en la secció anterior, es mostra que $o(\mathcal{Z}/\mathcal{T}) = |\det(\alpha_i(t_j))|$ on i, j recorren sobre el conjunt fonamental corresponent.

La segona relació que podem extreure és que $\mathcal{K}/\mathcal{T}$ és isomorf al grup fonamental de G , $\pi_1(G)$. Notem que $\mathfrak{h}$ és el recobriment universal de T ; per tant, $\pi_1(T)$ és naturalment isomorf a $\mathcal{K}$. Bàsicament, donat $X \in \mathcal{K}$, prenem $\gamma_X(t) = e^{2\pi itX}$. Aquesta és una corba tancada en T i $X \rightarrow [\gamma_X]$ és un isomorfisme de grups. Com que $T \subset G$, hi ha una aplicació natural $i : T \rightarrow G$ i, per tant, un homomorfisme de grups $i_* = \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(G)$.

3.2.4 Teorema. *L'homomorfisme $i_* : \pi_1(T) \simeq \mathcal{K} \rightarrow \pi_1(G)$ és exhaustiu i el seu nucli és $\mathcal{T}$. En particular,*

$$\pi_1(G) \simeq \mathcal{K}/\mathcal{T}.$$

Aquest teorema ens diu que per al recobriment universal $\tilde{G}$ de G se satisfà que $\mathcal{K} = \mathcal{T}$ i, per tant, $\mathcal{Z}/\mathcal{T}$ es pot interpretar com el centre de $\tilde{G}$ o, equivalentment, com el grup fonamental $\pi_1(\tilde{G}/Z(\tilde{G}))$.

D'ara endavant ens interessarem per les xarxes duals de les xarxes descrites fins ara i de la seva relació amb les cambres de Weyl.

3.2.5 Observació. Sigui $\mathcal{R}$ la xarxa en $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ generada pel conjunt d'arrels Φ . La seva dimensió és el rang de $\mathfrak{g}$.

3.2.6 Definició. Sigui

$$\mathcal{I} = \{\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid \lambda(t_\alpha) \in \mathbb{Z} \text{ per a tot } \alpha \in \Phi\},$$

que s'anomena la xarxa de les formes enteres. Es defineix

$$\mathcal{Y} = \{\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid \lambda(X) \in \mathbb{Z}, \text{ per a tot } X \in \mathcal{K}\},$$

que s'anomena la xarxa de pesos.

3.2.7 Corol·lari. *Se satisfà que*

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{I}.$$

on $\mathcal{R}$ és la xarxa d'arrels, $\mathcal{Y}$ la xarxa de pesos i $\mathcal{I}$ les formes enteres.

Se satisfan les relacions següents:

$$\mathcal{Y}/\mathcal{R} \simeq Z(G),$$

$$\mathcal{I}/\mathcal{Y} \simeq \pi_1(G)$$

i

$$\mathcal{I}/\mathcal{R} = Z(\tilde{G})$$

on $\tilde{G}$ denota el recobriment universal de G .

3.2.8 Definició. Sigui C la cambra fonamental de Weyl, això és,

$$C = \{\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid \lambda(t_i) \geq 0, 1 \leq i \leq r\},$$

i

$$C^{int} = \{\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid \lambda(t_i) > 0, 1 \leq i \leq r\}.$$

Es defineix

$$\mathcal{I}^d = C \cap \mathcal{I} = \{\lambda \in \mathcal{I} \mid \lambda(t_i) \geq 0\},$$

$$\mathcal{I}_0^d = C^{int} \cap \mathcal{I}^d = \{\lambda \in \mathcal{I} \mid \lambda(t_i) > 0\}.$$

Els elements de $\mathcal{I}^d$ s'anomenen formes enteres dominants i els de $\mathcal{I}_0^d$ les formes enteres fortament dominants. De manera similar,

$$\mathcal{Y}^d = C \cap \mathcal{Y}$$

i

$$\mathcal{Y}_0^d = C^{int} \cap \mathcal{Y}.$$

es defineixen com els pesos dominants i els pesos fortament dominants.

L'objectiu que tenim es provar que hi ha una correspondència bijectiva entre els elements de $\mathcal{Y}^d$ i les representacions irreductibles de G .

Com que els t_i defineixen tant la cambra de Weyl com la xarxa $\mathcal{I}$ de les formes enteres, ha d'haver-hi una relació estreta. Sigui $\{\lambda_i\}$ la base dual de la base $\{t_i\}$. És una base de $\mathcal{I}$ definida per $\lambda_i(t_j) = \delta_{ij}$. Els λ_i s'anomenen pesos fonamentals del grup de Lie G . Per a un índex i fixat, $(r-1)$ dels $\lambda_i(t_j)$ són 0, per tant les formes λ_i estan sobre les arestes de la cambra de Weyl.

3.2.9 Proposició.

$$\mathcal{I}^d = \left\{ \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i \mid n_i \geq 0, n_i \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$\mathcal{I}_0^d = \left\{ \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i \mid n_i > 0, n_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Un element important en $\mathcal{I}_0^d$ és

$$\delta = \sum_{i=1}^r \lambda_i,$$

la suma dels pesos fonamentals. El mínim element de $\mathcal{I}_0^d$. S'anomena la forma més petita. L'element δ pot ser o no ser un pes. Però es pot demostrar que 2δ està en $\mathcal{R}$ i que, per tant, és un pes.

3.2.10 Lema. *Sigui s_i la reflexió respecte d l'hiperplà*

$$\pi_i = \{X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \alpha_i(X) = 0\}.$$

Llavors s_i permuta els elements de $\Phi^+ \setminus \{\alpha_i\}$.

3.2.11 Teorema. *L'element mínim correspon a la igualtat següent:*

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi_+} \alpha.$$

DEMOSTRACIÓ. Sigui $\tilde{\delta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$. Llavors pel lema 3.2.10 tenim que $s_i(\alpha_i) = -\alpha_i$, i d'aquesta manera

$$s_i(\tilde{\delta}) = \tilde{\delta} - \alpha_i.$$

Però

$$s_i(\tilde{\delta}) = \tilde{\delta} - \tilde{\delta}(t_i)\alpha_i,$$

per tant $\tilde{\delta}(t_i) = 1$. D'aquesta manera,

$$\tilde{\delta} = \sum_{i=1}^r \tilde{\delta}(t_i)\lambda_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i = \delta.$$

□

El angles entre α_i 's són obtusos, per tant, els angles en el dual, és a dir, entre els λ_i , són aguts. No hi ha cap α_i en $\overline{C}$ ni més α 's que no estiguin en C . En general, la meitat de les arrels són positives. Però, com a molt, $\frac{1}{o(W)}$ estan en C^{int} .

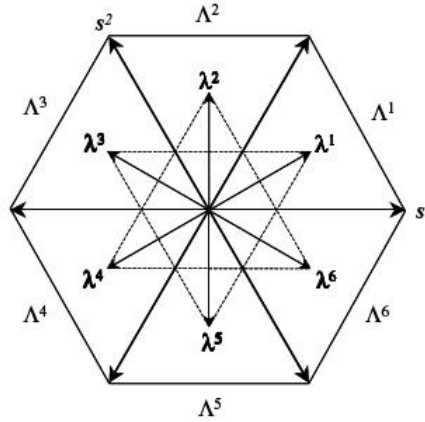


Figura 3.1: Xarxa d'arrels i xarxa de pesos de $\mathbf{SU}(3)$

A la figura 3.1 la xarxa d'arrels està generada pels elements s_i i la xarxa de pesos pels λ_i .

Per a qualsevol s_i , $\det(s_i) = -1$ ja que s_i té exactament un valor propi -1 i els altres 1 . D'aquesta manera atès que les reflexions s_i generen W tindrem que $\det(s) = \pm 1$ per a algun $s \in W$. D'ara endavant notarem $(-1)^s := \det(s)$.

Notem finalment, que l'aplicació $\mathcal{I}^d \rightarrow \mathcal{I}_0^d, \lambda \mapsto \lambda + \delta$ és bijectiva.

Els dos últims elements per al nostre anàlisi són les dues funcions associades a cada forma $a \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$:

$$\begin{aligned} e_a(X) &:= e^{2\pi i a(X)} \\ A_a(X) &:= \sum_{s \in W} (-1)^s e_{sa}(X). \end{aligned}$$

L'aplicació e_a és clarament una representació del grup additiu $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ en $\mathbb{R}^*$. L'aplicació $e : G \rightarrow \mathfrak{g}$ donada per $e^X \rightarrow e^{2\pi i X}$ és una aplicació de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ sobre un tor T que realitza T com

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}/\mathcal{K} \simeq T.$$

3.2.12 Observació. El cas més senzill serà aquell que $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ és $\mathbb{R}$, $\mathcal{K} = \mathbb{Z}$ i e_a l'aplicació exponencial. En aquest cas recuperem la definició donada de $\mathbb{T}$.

L'aplicació e_a aixeca doncs una representació de T si, i només si, $e_a[\mathcal{K}] = \{1\}$, això és, si i només si $a \in \mathcal{Y}$. En el següent teorema veurem la primera indicació de que l'aplicació A_δ és especial:

3.2.13 Teorema. *La funció $A_\delta : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ compleix les propietats següents:*

- (i) $A_\delta = \prod_{\alpha \in \Phi_+} (e_{\alpha/2} - e_{-\alpha/2})$.
- (ii) $A_\delta^2 = \pm \prod_{\alpha \in \Phi} (e_\alpha - 1)$ factoritza en una funció de T en $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓ. (i) Prenem $F := \prod_{\alpha \in \Phi_+} (e_{\alpha/2} - e_{-\alpha/2})$. Llavors $F = \sum n_{a_j} e_{a_j}$ per a a_j apropiats amb $a_j \in \mathcal{R}$. Atès que s_i

permuta totes les arrels llevat α_i tenim,

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+, \alpha \neq \alpha_i} (e_{s_i(\alpha/2)} - e_{-s_i(\alpha/2)}) = \prod_{\alpha \in \Phi^+, \alpha \neq \alpha_i} (e_{\alpha/2} - e_{-\alpha/2})$$

i, per tant,

$$F(s_i(X)) = -F(X).$$

Això implica que per qualsevol $s \in W$, $F(s(X)) = (-1)^s F(X)$ i d'aquesta manera $n_{s(a_j)} = (-1)^s m_{a_j}$. Se segueix que $n_{a_j} = 0$ si a_j està sobre algun pla π_α , prenent $s = s_\alpha$, i per tant

$$F(X) = \sum_{s \in W} (-1)^s \left(\sum_{a_j \in C^{int}} n_{a_j} e_{s(a_j)}(X) \right).$$

Clarament, l'element e_δ es intervé en el sumatori en F exactament una vegada degut al teorema 3.2.11, per tant $n_\delta = 1$. Cap altra a amb $n_a \neq 0$ pot estar en C^{int} ja que qualsevol altre a seria $\delta - \sum_{\beta \in Q} \beta$ (amb $Q \subseteq \Phi^+$) i, per tant, estaria en $\mathcal{I}$. Seria més petit que δ en l'ordre dèbil, i, per tant, no estaria en $\mathcal{I}_0^d = C^{int} \cap \mathcal{I}$. D'aquesta manera

$$\sum_{a_j \in C^{int}} n_{a_j} e_{a_j} = A_\delta$$

i el resultat queda provat.

(ii) Sigui $(e_{\alpha/2} - e_{-\alpha/2})^2 = -(e_\alpha - 1)(e_{-\alpha} - 1)$ i pel primer apartat tindrem,

$$A_\delta^2 = (-1)^{o(\Phi^+)} \prod_{\alpha \in \Phi} (e_\alpha - 1).$$

Atès que $\alpha \in \mathcal{R} \subset \mathcal{Y}$, e_α és una funció sobre T i per tant, a més és A_δ^2 . $\square$

3.2.14 Definició. Es defineix el conjunt $\{x \in \mathfrak{h} \mid A_\delta^2(x) = 0\}$ com el conjunt d'elements singulars. Els elements $x \in \mathfrak{h}$ que compleixen $A_\delta(x) \neq 0$ s'anomenen elements regulars.

3.2.15 Lema. *Les definicions 2.3.13 i 3.2.14 són equivalents.*

3.3 Fórmula de Weyl d'integració

En aquesta secció escriurem un resultat important en la teoria de representacions.

Tal i com hem dit, els caràcters irreductibles d'un grup de Lie són una base ortonormal de l'espai de les funcions de classe. Atès que tots els tors maximals d'un grup de Lie són conjugats i esgoten el grup, cada classe de conjugació interseca T . Per tant, per a conèixer els caràcters de G , és suficient conèixer els caràcters sobre T . De fet, per a classes regulars, el nombre de l'elements d'aquesta classe en T és clarament $o(W)$, l'ordre del grup de Weyl; i les funcions invariants sota W són exactament aquelles constants sobre les classes. D'aquesta manera, els caràcters de G son una base ortogonal per a funcions simètriques sota l'acció de W .

3.3.1 Teorema. (La fórmula d'integració de Weyl) *Siguin G un grup de Lie compacte i semisimple i T un tor maximal. Siguin f una funció de classe acotada i mesurable sobre G . Siguin $d\mu$ la mesura de Haar sobre G normalitzada per $\mu(G) = 1$ i $d\mu_T$ la mesura de Haar normalitzada de T . Llavors*

$$\int_G f(x) d\mu(x) = \frac{1}{o(W)} \int_T f(x) A_\delta^2(x) d\mu_T(x). \quad (3.1)$$

DEMOSTRACIÓ. Considerem l'aplicació $M : G/T \times T \rightarrow G$ definida per $M([x], y) = xyx^{-1}$. Posant la mesura normalitzada de Haar sobre G i T i la mesura normalitzada induïda sobre G/T . L'espai tangent en l'origen per T i G/T es pot associar de forma natural a $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}^\perp$. Usant translacions de grups, podem veure la derivada dM com una aplicació de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{h}$. Es pot comprovar que els punts singulars no contribueixen a les integrals.

D'aquesta manera, raonant de manera similar a la regla de

Fubini, tenim que

$$\begin{aligned} \int_G f(x) d\mu(x) &= \\ &= \frac{1}{o(W)} \int_{G/T \times T} |\det(dM)| f(M([x], y)) d\mu_{G/T}([x]) d\mu_T(y). \end{aligned}$$

Atès que necessitem transferir cada una de les tangents a l'origen per a calcular dM en $([x_0], y_0)$, volem mirar el comportament de

$$M_{[x_0], y_0}(x, y) = (x_0 x y_0 y x^{-1} x_0^{-1})(x_0 y_0 x_0^{-1})^{-1}$$

per a x, y propers a la identitat. Prenen $x = e + \delta x$, $y = e + \delta y$, multiplicant i obviant els termes d'ordre dos tenim

$$dM_{[x_0], y_0}(\delta x, \delta y) = x_0 [[1 - \text{Ad}(y_0)](\delta x) + \delta y] x_0^{-1},$$

on hem usat el fet que T és un grup abelià. Com que $\text{Ad}(x_0)$ és unitària, veiem que

$$\begin{aligned} \det(dM) &= \det(\text{id}_{\mathfrak{h}} + [1 - \text{Ad}(y_0)]_{\mathfrak{h}^\perp}) \\ &= \det(1 - \text{Ad}(y_0)) \\ &= \prod_{\alpha \in \Phi} (1 - e_\alpha(y_0)), \end{aligned} \tag{3.2}$$

on e_α és una funció sobre $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ aixecada d'una funció sobre $H = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}/\mathcal{K}$. Aquí hem usat el fet que $\text{Ad}(y_0)$ té vectors propis $e_\alpha(y_0)$. D'aquesta manera, $|\det(dM)([x_0], y_0)|$ és només una funció de y_0 .

Si la funció f és una funció de classe, $f(M([x], y)) = f(y)$ és també una funció de y . Se segueix que (3.2) és tan sols (3.1) com que la integral és independent de x_0 , $\mu_{G/T}(G/T) = 1$, i ja que $A_\delta^2 = |\prod_{\alpha \in \Phi} (1 - e_\alpha)|$. $\square$

3.4 Pesos maximals

Sigui G un grup de Lie complex compacte i semisimple i, prenem T un tor maximal. Escollim les arrels positives i un sistema fonamental. Denotem per $\mathcal{H}$ un espai de Hilbert de dimensió n .

Sigui ara U una representació de dimensió finita de G :

$$U : G \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$$

Restringim U a T . La funció $U|_T$ és una suma de representacions irreductibles i cada representació irreductible és de dimensió 1 realitzada escrivint $T \simeq \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}/\mathcal{K}$ i prenent

$$W_{\rho}(x) = e_{\rho}(x) := e^{2\pi i \rho(x)} \quad x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$$

Notem que

$$W_{\rho} : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}),$$

amb $\rho \in \mathcal{Y}$, on $\mathcal{Y} \subseteq \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ és la xarxa de pesos.

D'aquesta manera, l'espai $\mathcal{H}$ sobre el qual U actua pot ser escrit com

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\rho \in Y(U)} \mathcal{H}_{\rho}$$

amb $\mathcal{H}_{\rho} \neq \{0\}$ i

$$U(x)v = e_{\rho}(x)v \quad \text{si } v \in \mathcal{H}_{\rho}.$$

3.4.1 Definició. Sigui

$$Y(U) := \{\rho \in \mathcal{Y} \mid \mathcal{H}_{\rho} \neq 0\}.$$

El conjunt s'anomena el conjunt de pesos de la representació U . A $m_{\rho} = \dim(\mathcal{H}_{\rho})$ s'anomena la dimensió del pes ρ .

En aquest cas no tenim tanta estructura com en el conjunt de les arrels, però podem enunciar que

3.4.2 Proposició. *El conjunt de pesos d'una representació U és invariant sota l'acció del grup de Weyl i*

$$m_{s(\rho)} = m_{\rho}$$

per a tot $\rho \in Y(U)$ i $s \in W$. Per tant, $Y(U)$ proporciona una representació del grup finit W .

DEMOSTRACIÓ. Donat s , triem $x \in G$ de manera que $Ad(x)|_T = s$. Prenem $v \in \mathcal{H}_\rho$. Llavors per a $y \in G$,

$$\begin{aligned} U(y)U(x)v &= U(x)[U(x)^{-1}U(y)U(x)]v \\ &= U(x)[U(s^{-1}y)v] \\ &= U(x)e_\rho(s^{-1}y)v \\ &= e_{s(\rho)}(y)U(x)v, \end{aligned}$$

Això és, $U(x)$ aplica $\mathcal{H}_\rho$ a $\mathcal{H}_{s(\rho)}$. L'aplicació $U(x)^{-1}$ fa l'oposat, és a dir, aplicar $\mathcal{H}_{s(\rho)}$ a $\mathcal{H}_\rho$, per tant, els dos espais tenen la mateixa dimensió. $\square$

Podem estendre U actuant linealment sobre $\mathfrak{h}$ i per tant sobre $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$, per tant $U(e^{itX}) = e^{itU(x)}$. Per suposat, $U[X]v = \rho(X)v$ si $v \in \mathcal{H}_\rho$ o $X \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$.

3.4.3 Proposició. *Per a qualsevol arrel $\alpha \in \Phi$ i qualsevol pes $\lambda \in Y(U)$, $U(t_\alpha)$ és una aplicació de $\mathcal{H}_\lambda$ en (0) si $\alpha + \lambda \notin Y(U)$, és una aplicació de $\mathcal{H}_\lambda$ en $\mathcal{H}_{\lambda+\alpha}$ en cas contrari.*

3.4.4 Teorema. *Sigui U una representació irreductible de G . Llavors hi ha un únic pes $\rho \in \mathcal{Y}^d$ tal que per a qualsevol ordre dèbil definit en la cambra fonamental de Weyl de $\mathfrak{h}$, ρ és maximal entre tots els pesos de $Y(U)$. A més,*

- (i) *Per a qualsevol arrel fonamental α_i , $\rho + \alpha_i \notin Y(U)$*
- (ii) *Cada pes en $Y(U)$ té la forma $\rho - \sum_i n_i \alpha_i$ amb $n_i \geq 0$.*
- (iii) *Cada pes en $Y(U)$ és un casquet convex de les imatges de ρ sota el grup de Weyl W .*

DEMOSTRACIÓ. (i). Prenem un pes amb la normal maximal contant tots els pesos en $Y(U)$ i usem el grup de Weyl per a moure'l a la cambra fonamental. El pes ρ resultant és clarament de $\mathcal{Y}^d$ i té norma maximal. Com que el pes $\rho \in \mathcal{Y}^d$, tenim $\rho(t_{\alpha_i}) \geq 0$, i així doncs $(\rho, \alpha_i) \geq 0$ per tant $\|\rho + \alpha_i\| \geq$

$\|\rho\|^2 + \|\alpha_i\|^2$. D'aquesta manera, $\rho + \alpha_i \notin Y(U)$ per ser la norma màxima.

(ii) Considerem $\tilde{\mathcal{H}} = \oplus U(X_{-\alpha_{i_1}})U(X_{-\alpha_{i_2}})\dots U(X_{-\alpha_{i_k}})[\mathcal{H}_\rho]$ on la suma és sobre tot k i totes les k -tuples de pesos fonamentals $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$. Clarament, $\tilde{\mathcal{H}}$ és un invariant per l'esquerra per $U(X_{-\alpha_i})$. També és un invariant per l'esquerra de $U(Y)$, $Y \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ ja que

$$U(X_{-\alpha_{i_1}})\dots U(X_{-\alpha_{i_k}})\mathcal{H}_\rho \subseteq \mathcal{H}_{\rho - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - \dots - \alpha_{i_k}}$$

per la proposició 3.4.3.

A més, afirmem que és invariant sota l'acció de $U(X_{+\alpha_i})$. Per

$$[X_{\alpha_i}, X_{-\alpha_j}] \begin{cases} = 0 & \text{si } i \neq j \\ \in \mathfrak{h} & \text{si } i = j \end{cases} \quad (3.3)$$

ja que $[X_\alpha, X_\beta] \in \mathfrak{h}_{\alpha, \beta}$ i $\alpha_i - \alpha_j \notin \Phi$ si $i \neq j$ (no pot estar ni en Φ^+ ni Φ^-). D'aquesta manera per $v \in \tilde{\mathcal{H}}$, podem escriure

$$\begin{aligned} & U(X_{\alpha_{i_0}})U(X_{-\alpha_{i_1}})\dots U(X_{-\alpha_{i_k}})v \\ &= [U(X_{\alpha_{i_0}}), U(X_{-\alpha_{i_1}})\dots U(X_{-\alpha_{i_k}})]v \\ &= \sum_{j=1}^k U(X_{-\alpha_{i_1}})\dots [U(X_{-\alpha_{i_0}}, U(X_{-\alpha_{i_j}})]U(X_{-\alpha_{i_{j+1}}})\dots U(X_{-\alpha_{i_k}})v \end{aligned} \quad (3.4)$$

està en $\tilde{\mathcal{H}}$ per la proposició 2.6.11 i el fet que si

$$\begin{aligned} & Y \in T, U(Y)U(X_{-\alpha_{i_{j+1}}})\dots U(X_{-\alpha_{i_k}})v \\ &= (-\lambda - \alpha_{i_{j+1}} - \dots - \alpha_{i_k})(Y)U(X_{-\alpha_{i_{j+1}}})\dots U(X_{-\alpha_{i_k}})v. \end{aligned}$$

Per tant (4.2) val per que $U(X_{\alpha_{i_0}})v = 0$ per el primer apartat i per la proposició 3.4.3. Per la irreductibilitat, $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ i queda provat l'apartat.

3.4.5 Observació. Observem que (ii) implica que per a qualsevol funcional ℓ definim un ordre dèbil $\ell(\rho - \sum n_i \alpha_i) = \ell(\rho) - \sum n_i \ell(\alpha_i) < \ell(\rho)$ si $n_i \geq 0$ i $\sum n_i \neq 0$ (ja que $\ell(\alpha_i) > 0$). D'aquesta manera, ρ és maximal en qualsevol ordre.

(iii) Sigui Q el casc convex de $\{s(\rho) \mid S \in W\}$. Suposem que $\lambda \in Y(U)$ i $\lambda \notin Q$. Llavors per fets fonamentals del conjunts convexos, hi ha una aplicació ℓ sobre $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ tal $\ell(\lambda) > \ell(s(\rho))$ per qualsevol s . Podem modificar ℓ lleugerament per tal que $\ell(\alpha) \neq 0$ per a tot $\alpha \in \Phi$, per tant defineix un ordre feble en el qual qualsevol cambra de Weyl C_1 és fonamental. Per l'observació $\ell(s(\rho)) \geq \ell(\lambda)$ ja que s amb $s(\rho) \in C_1$. Aquesta contradicció mostra que $Y(U) \subset Q$. $\square$

3.4.6 Observació. Aquesta demostració prova que $m_\rho = 1$ per a un pes maximal (reemplaçant $\mathcal{H}_\rho$ per a un vector $v \in \mathcal{H}_\rho$ en la part (ii) i apelant a la irreducibilitat).

3.5 Fórmula dels caràcters de Weyl

3.5.1 Teorema. (Fórmula dels caràcters de Weyl) *Sigui G un grup de Lie compacte i simple. Llavors per a qualsevol $\lambda \in \mathcal{Y}^d$, existeix una única representació irreductible U_λ amb pes maximal λ . El conjunt $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{Y}}$ és un sistema complet de representants de classes de representacions irreductibles de G . La dimensió del pes maximal és 1. A més, el caràcter χ_λ de U_λ compleix:*

$$\chi_\lambda(x) = A_{\lambda+\delta}(x)/A_\delta(x) \quad (3.5)$$

en sentit que l'equació val pels elements regulars de T (i, per tant, defineix χ sobre G àtes que cada classe d'elements regulars interseca els elements regulars de T i els elements regulars són densos).

DEMOSTRACIÓ. Suposem que $\delta \in \mathcal{Y}$. Sigui U_λ una representació irreductible de pes maximal λ , suposant que existeix. Llavors $\chi_\lambda = \sum_{\rho \in Y(U_\lambda)} m_\rho e_\rho$ per la definició de pes. Sigui

$$Q_\lambda = \{\rho + s(\delta) \mid \rho \in Y(U_\lambda), s \in W\}.$$

Llavors

$$A_{\delta\chi_\lambda} = \sum_{\eta \in Q_\lambda} n_\eta e_\eta$$

on

$$n_\eta = \sum_{s \in W \mid W} (-1)^s m_{\nu-s(\delta)}.$$

Afirmem que $\lambda + \delta$ només es pot escriure com $\rho + s(\delta)$ per a $\rho \in Y(U_\lambda)$, $s \in W$ d'una única manera, si ℓ defineix l'ordre dèbil $\ell(s(\delta)) < \ell(\delta)$ si $s \neq \text{id}$ (per a $s(\delta) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi_+} s(\alpha)$ i $s(\Phi^+) \not\subseteq \Phi^+$) i $\ell(\lambda) > \ell(\rho)$ si $\rho \in Y(U_\lambda)$, amb $\lambda \neq \rho$. D'aquesta manera, la funció $A_{\delta\chi_\lambda}$ és antisimètrica sota l'acció del grup de Weyl,

$$A_{\delta\chi_\lambda} = n_\lambda A_{\delta+\lambda} + \sum_{\substack{\rho \in Q_\lambda \\ \rho \neq s(\delta+\lambda)}} n_\rho e_\rho.$$

Se segueix per l'ortogonalitat dels e_ρ sobre $L^2(T, d\mu_T)$ que

$$\int_T |A_{\delta\chi_\lambda}|^2 d\mu_T = n_\lambda^2 o(W) + \sum_{\substack{\rho \in Q_\lambda \\ \rho \neq s(\delta+\lambda)}} n_\rho^2, \quad (3.6)$$

on usem el fet que $\delta + \lambda \in \mathcal{I}_0^d$ per tant $\{s(\delta + \lambda)\}_{s \in W}$ són diferents. Però χ_λ com a funció de classe sobre G compleix

$$\begin{aligned} 1 &= \int_G |\chi_\lambda(x)|^2 d\mu_G(x) \\ &= \frac{1}{o(W)} \int_T |(A_{\delta\chi})|^2 d\mu_T(x). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Les equacions (3.6) i (3.7) es compleixen si $n_\lambda = 1$ i $n_\rho = 0$ si $\rho \neq s(\delta + \lambda)$, això és, $A_{\delta\chi_\lambda} = A_{\delta+\lambda}$. Si x és regular, $A_\delta(x) \neq 0$, per tant, (3.5) és vàlid.

Això mostra que χ_λ està únicament determinada per λ , per tant hi ha com a molt un representació irreductible amb pes maximal λ i el seu caràcter està donat per (3.5). Per a cada λ , sigui χ_λ definida per (3.5). Llavors per la fórmula d'integració

de Weyl, la funció de classe associada està ben definida ja que χ_λ és simètrica sota l'acció del grup de Weyl i està en $L^2(G)$. A més, aplicant un altre cop la fórmula d'integració de Weyl, ens queda

$$\int_G \bar{\chi}_\lambda \chi_\kappa d\mu(g) = 0,$$

per a $\kappa \neq \lambda$. D'aquesta manera, si no hi haguessin representacions irreductibles de pes maximal λ , els caràcters no serien complets, la qual cosa contradiu el teorema de Peter-Weyl. Això implica que hi ha d'haver una representació irreductible amb pes maximal λ .

Fem ara el cas $\delta \notin \mathcal{Y}$. Ja que $2\delta \in \mathcal{R} \subset \mathcal{Y}$, sabem que $[\delta]$ té ordre 2 en $\mathcal{I}/\mathcal{Y} \simeq \pi_1(G)$, per tant hi ha com a molt un doble recobriment de G on δ és un pes. Mentre podríem usar que recobreix, en comptes d'això usarem $\tilde{G}$, el recobriment universal de G , per el qual tenim que $\mathcal{Y}(\tilde{G}) = \mathcal{I}$. Com és usual, $G = \tilde{G}/N$ on N és un subgrup normal i discret, per tant, qualsevol representació irreductible U de G defineix una representació irreductible de $\tilde{G}$ per $\tilde{U}(g) = U([g])$. A la inversa, si $\tilde{U}$ és una representació irreductible de $\tilde{G}$ amb $N \subset \ker U$, llavors $\tilde{U}$ aixeca a una representació irreductible de G .

Sigui $\lambda \in \mathcal{Y}$. Si hi ha una representació irreductible de pes maximal λ ha de ser associada a la representació irreductible U_λ de $\tilde{G}$, ja que els pesos sobre $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ són els mateixos. El caràcter ha de ser $A_{\lambda+\delta}/A_\delta$ que a més projecta $\tilde{G}$ a G . Si $\lambda \in \mathcal{Y}$, el caràcter χ_λ és de la forma $\sum m_\rho e_\rho$ amb $\rho = \lambda - \sum n_i \alpha_i \in \mathcal{I} + \mathcal{R} \subset \mathcal{Y}$. Per tant χ_λ és una funció sobre G . Si λ no fos el pes maximal d'alguna representació irreductible de G , aleshores la funció seria ortogonal a tots els altres caràcters irreductibles. Per tant, U_λ hauria de projectar-se en G . $\square$

Remarques:

1. Si alguns n_ρ són zero direm que hi ha moltes cancel·lacions en el producte $\chi_\lambda A_\delta$.

2. A priori, el quocient $A_{\lambda+\delta}(x)/A_\delta(x)$ està només definit sobre els punts regulars x i pot no ser continu sobre tot G . Però per la fórmula d'integració de Weyl, el quocient és L^2 i això es suficient per a usar l'argument de completitud.

3. La demostració de l'existència de representacions no és constructiva.

3.6 Representacions del grup $\mathbf{SU}(n)$

Sigui $\mathfrak{h}$ una àlgebra de Cartan de $\mathfrak{su}(n)$. Tal i com hem vist en seccions anteriors, es pot comprovar que els elements $\delta_i \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ venen definits com

$$\begin{aligned} \delta_i : \mathfrak{h} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x := \text{diag}(x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_i. \end{aligned}$$

Per definició del grup especial unitari, aquestes funcions no són linealment independents, ja que compleixen

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = 0.$$

En aquesta situació definim la cambra de Weyl de $\mathfrak{h}$, com

$$\left\{ \sum_{i=1}^n a_i \delta_i \mid a_1 > \dots > a_n \right\}.$$

Si notem D_i a la matriu diagonal amb tots zeros llevat $(D_i)_{ii} = 1$ es pot comprovar que els elements

$$\sum_{i=1}^n b_i D_i \in \mathfrak{h}$$

si $\sum_{i=1}^n b_i = 0$.

Les arrels de $\mathbf{SU}(n)$ són $\alpha_{ij} = \delta_i - \delta_j$ per a $i \neq j$. Les arrels positives tenen $i < j$ i denotem per $\alpha^{(i)} = \alpha_{i,i+1}$ les arrels fonamentals. A més, $t_i = D_i - D_{i+1}$ amb t_i les corresponents translacions. Les arrels fonamentals estant definides per $\lambda_i(\tau_j) = \delta_{ij}^K$, on δ^K és la delta de Kronecker i poden ser definides com

$$\lambda_1 = \delta_1, \lambda_2 = \delta_1 + \delta_2, \dots, \lambda_{n-2} = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i.$$

Usant $\sum_{i=1}^n \delta_i = 0$, ho podem escriure de la forma

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{j}{n}\right) \delta_i - \sum_{i=j+1}^n \frac{j}{n} \delta_i$$

el qual té $\sum_{i=1}^n a_i = 0$. Escrit d'aquesta manera podem veure que

$$\mathcal{I} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \delta_i \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0; a_i - a_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Per un altre costat, $\mathcal{R}$, la xarxa generada per α_{ij} , tenim

$$\mathcal{R} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \delta_i \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0; a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Clarament, $\mathcal{I}/\mathcal{R}$ està generat per $[(1 - \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n})]$ les n -éssimes potències dels quals estan a $\mathcal{R}$ per tant

$$\mathcal{I}/\mathcal{R} = \mathbb{Z}/(n).$$

Es fàcil calcular el pes mínim δ i queda

$$\delta = \sum_{j=1}^n (n-j) \delta_j.$$

Identifiquem ara les representacions de U_{λ_1} . Clarament tenen com a pesos les imatges sota W de δ_1 les quals són $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$.

Un cop d'ull mostra que hi ha una representació donada per matrius $n \times n$ amb precisament aquests pesos i no altres. De forma semblant, $\{\delta_i + \delta_j \mid i < j\}$ i $\bigwedge^2 \mathfrak{su}(n)$, té tals pesos. Escrit d'una altra manera, $\bigwedge^k \mathfrak{su}(n)$ té dimensió $\binom{n}{k}$ per a $k = 1, \dots, n-1$ i pes maximal clarament $\delta_1 + \dots + \delta_k = \lambda_k$ i és una representació irreductible com que formen una òrbita simple sota W .

En resum, les representacions irreductibles fonamentals són

$$\bigwedge^k \mathfrak{su}(n)$$

tenen dimensió $\binom{n}{k}$ i pes maximal

$$\delta_1 + \dots + \delta_k = \lambda_k.$$

3.6.1 Representacions del grup $\mathbf{SU}(3)$

Tenint en compte el que ens interessarà en l'últim capítol, anem a estudiar el cas particular $n = 3$. En aquest cas es té que

$$\begin{aligned}\alpha_{12} &= \delta_1 - \delta_2 \\ \alpha_{13} &= \delta_1 - \delta_3 \\ \alpha_{23} &= \delta_2 - \delta_3\end{aligned}$$

Observem que $\alpha_{13} - \alpha_{12} = \alpha_{23}$ per tan el sistema fonamental d'arrels és donat per α_{12} i α_{13} i té associades matrius

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Els pesos fonamentals són

$$\lambda_1 = \delta_1 \quad \lambda_2 = \delta_1 + \delta_2,$$

i corresponen a les representacions irreductibles

$$U_{\lambda_1} = \mathfrak{su}(3) \quad U_{\lambda_2} = \bigwedge^2 \mathfrak{su}(3)$$

on les dimensions valen $\dim(U_{\lambda_1}) = \dim(U_{\lambda_2}) = 3$. El diagrama d'arrels quedarà de la forma de la figura 5.2.

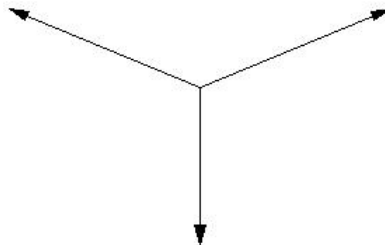


Figura 3.2: Arrels de la representació U_{λ_1} de $\mathfrak{su}(3)$

Observem que les coordenades dels vectors sumen zero

$$(-1/2, 1/3) + (1/2, 1/3) + (0, -2/3) = (0, 0).$$

Per tant estem davant d'un diagrama d'arrels de la classe A_3 .

En seccions anteriors hem vist una altra representació de l'àlgebra $\mathfrak{su}(3)$. Era la representació adjunta, de dimensió 8. És una representació irreductible però no fonamental.

El grup $\mathbf{SU}(3)$ una xarxa de pesos fonamentals, $\mathcal{Y}^d$, representada de la figura 3.3.

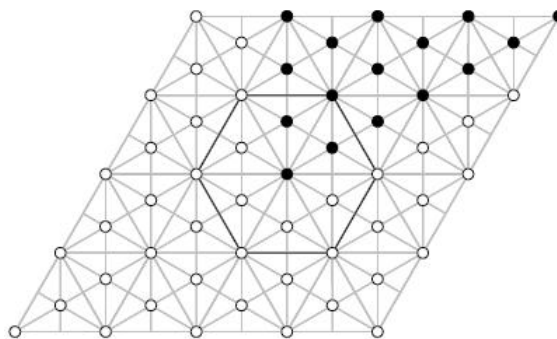
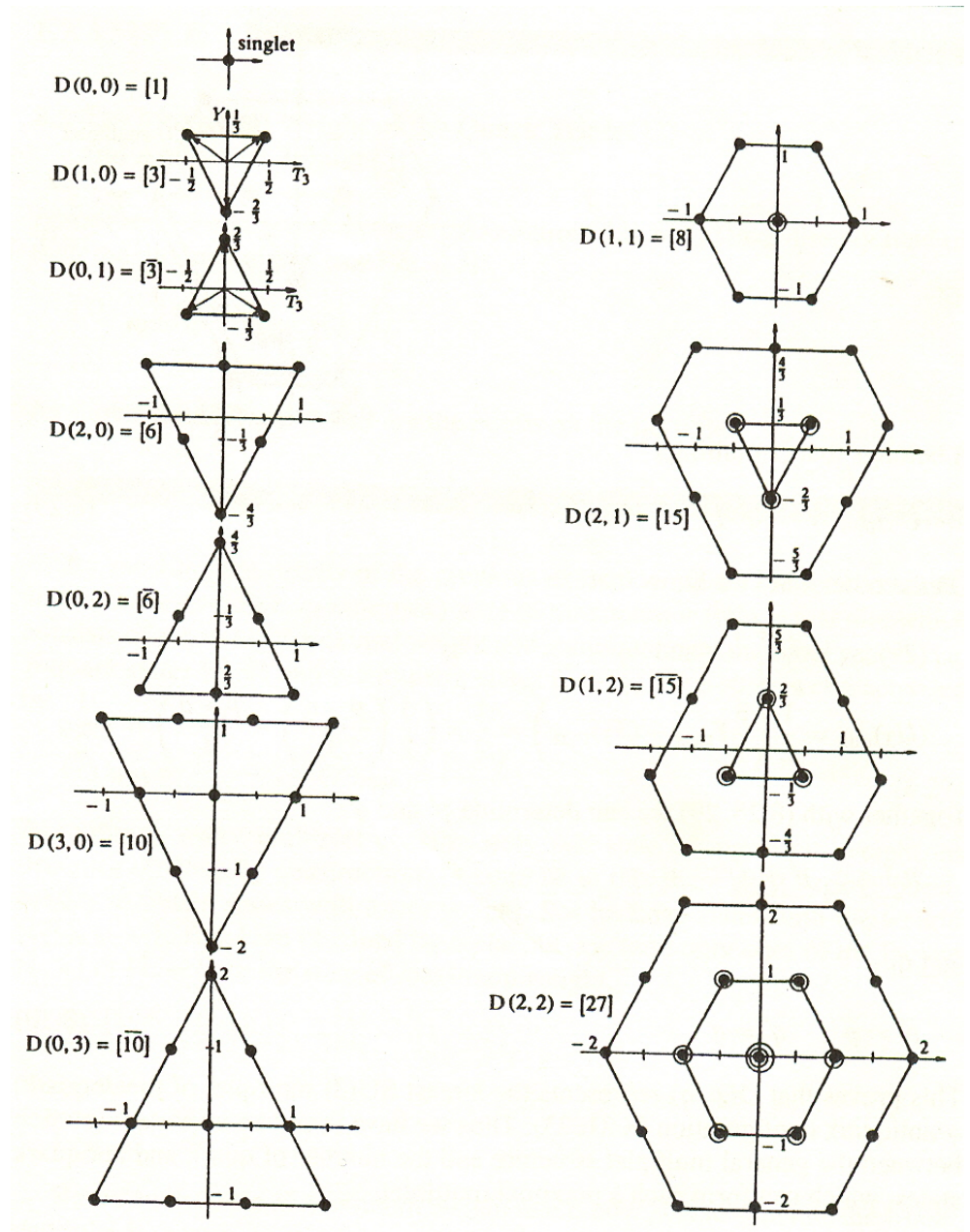


Figura 3.3: Xarxa de pesos fonamentals de $\mathbf{SU}(3)$

Cada un d'aquests punts es correspon bijectivament amb una representació irreductible, pel teorema dels caràcters de Weyl, en el sentit que representa el pes més gran de cada representació. En el cas de $\mathbf{SU}(3)$, tenim que les representacions de dimensions més baixes són donades pels diagrames dels seus pesos $Y(U)$ de la figura 3.4.

Figura 3.4: Representacions irreductibles més baixes de $SU(3)$

Una representació irreductible del grup $\mathbf{SU}(3)$ es denota típicament com $D[i, j]$. En el nostre cas, en la representació de vista en aquesta secció correspon

$$\begin{array}{ll} D[1, 0] & \text{representació } U_{\lambda_1} \\ D[0, 1] & \text{representació } U_{\lambda_2} \\ D[1, 1] & \text{representació adjunta} \end{array}$$

Recordem que hi ha tants pesos fonamentals com el rang del grup de Lie, o, equivalentment, com nombre de generadors de l'àlgebra de Cartan corresponent, en el cas de $\mathbf{SU}(3)$ el rang és 2.

3.6.1 Observació. En llenguatge de la física, les representacions es noten de forma lleugerament diferent. A la representació de dimensió més petita diferent de la representació trivial, és denota:

$$U_{\lambda_1} = \mathfrak{su}(3) = [3].$$

A la representació

$$U_{\lambda_2} = \bigwedge^2 \mathfrak{su}(3) = [\bar{3}],$$

i l'anomenen representació conjugada de de $[3]$.

Donat que la representació adjunta té dimensió 8, es denota per $[8]$.

Tenim doncs la següent taula que dóna explícitament la imatge en entre $\mathcal{Y}^d$ de les representacions irreductibles de $\mathfrak{su}(3)$.

representació	notació física	pes maximal
$D[0, 0]$	$[1]$	$(0, 0)$
$D[1, 0]$	$[3]$	$(1/2, 1/3)$
$D[0, 1]$	$[\bar{3}]$	$(0, 2/3)$
$D[2, 0]$	$[6]$	$(1, 2/3)$
$D[0, 2]$	$[\bar{6}]$	$(0, 4/3)$
$D[1, 1]$	$[8]$	$(1/2, 1)$

3.6.2 Teorema. *Totes les representacions irreductibles del grup $\mathfrak{su}(3)$ sorgeixen de les representacions $[3]$ i $[\bar{3}]$.*

3.6.3 Exemple. Tenim els productes següents d'àlgebres de Lie:

$$[3] \otimes [3] = [6] \oplus [\bar{3}],$$

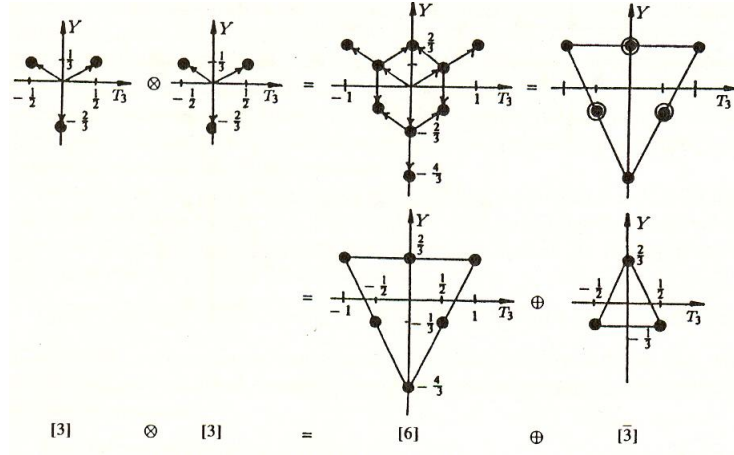


Figura 3.5

$$[3] \otimes [\bar{3}] = [8] \oplus [1],$$

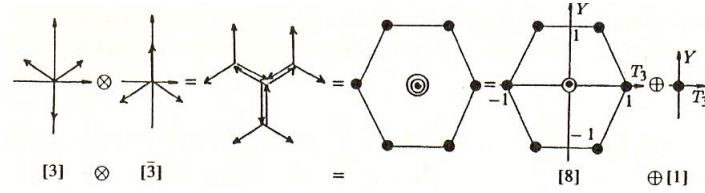


Figura 3.6

$$[3] \otimes [3] \otimes [3] = [6] \otimes [3] \oplus [3] \otimes [\bar{3}] = [10] \oplus [8] \oplus [8] \oplus [1].$$

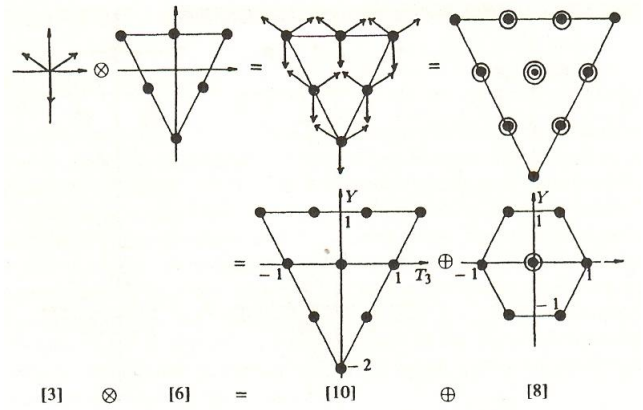


Figura 3.7

Capítol 4

Representacions dels grups espinorials

L'objectiu d'aquesta secció és el càlcul de les representacions dels grups espinorials, per mitjà dels resultats de les seccions anteriors.

4.1 El grup espinorial com a grup de Lie

En aquesta secció tractarem breument del grup $\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^n, q)$ com a grup de Lie així com la seva àlgebra de Lie.

4.1.1 Teorema. *Si $(\mathbb{R}^n, q)$ és un espai quadràtic definit positiu o negatiu, llavors hi ha una única estructura analítica sobre $\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^n, q)$ ($q = (n, 0)$ o bé $q = (0, n)$), respecte de la qual $\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^n, q)$ és un grup de Lie tal que el homomorfisme doble recubridor $\varphi : \mathbf{Spin}(\mathbb{R}^n, q) \rightarrow \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ és analític.*

Tal i com hem vist en l'exemple 2.1.9, $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^n, q)$ és la seva pròpia àlgebra de Lie respecte el claudàtor

$$[x, y] = xy - yx, \quad x, y \in \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^n, q),$$

definida per la multiplicació de Clifford, i cada $x \in \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^n, q)$ determina un operador

$$\begin{aligned} d\varphi(X) : \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^n, q) &\rightarrow \mathcal{Cl}^*(\mathbb{R}^n, q), \\ Y &\mapsto d\varphi(X)(Y) = [X, Y]. \end{aligned}$$

Per una altra banda, l'aplicació diferencial de l'aplicació de recobriment $\varphi : \mathbf{Spin}(\mathbb{R}^n, q) \rightarrow \mathbf{SO}(\mathbb{R}^n, q)$ determina un isomorfisme d'àlgebres de Lie $d\varphi : \mathfrak{spin}(\mathbb{R}^n, q) \rightarrow \mathfrak{so}(\mathbb{R}^n, q)$ satisfent

$$\varphi(\exp X) = \exp(d\varphi(X)) \quad X \in \mathfrak{spin}(\mathbb{R}^n, q).$$

El teorema següent mostra que aquests dos usos de la notació $d\varphi$ són consistents.

4.1.2 Teorema. *L'àlgebra de Lie $\mathfrak{spin}(\mathbb{R}^n, q)$ es pot identificar amb la subàlgebra de Lie de tots els bivectors de $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^n, q)$, és a dir*

$$\mathcal{Cl}^{(2)}(\mathbb{R}^n, q) = \langle e_i e_j; e_i, e_j \in \mathbb{R}^n \rangle.$$

A més,

$$(i) \quad d\varphi(X) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \text{ si } X \in \mathcal{Cl}^{(2)}(\mathbb{R}^n, q),$$

(ii) *L'aplicació*

$$\begin{aligned} d\varphi : \mathcal{Cl}^{(2)}(\mathbb{R}^n, q) &\rightarrow \mathfrak{so}(\mathbb{R}^n, q) \\ X &\mapsto d\varphi(X) \end{aligned}$$

és unisomorfisme.

DEMOSTRACIÓ. Sigui $\{e_j\}_{1 \leq j \leq n}$, una base normalitzada per a $\mathbb{R}^n$, i sigui

$$e_{jk} := \frac{1}{2}e_j e_k \quad (1 \leq j, k \leq n).$$

Llavors $\{e_{jk}\}_{1 \leq j < k \leq n}$ és una base de $\mathcal{C}\ell^{(2)}(\mathbb{R}^n, q)$ i els bivectors e_{jk} satisfan les relacions de commutació

$$[e_{jk}, e_{rs}] = q(e_j)\{\delta_{jr}e_{ks} - \delta_{js}e_{kr}\} - q(e_k)\{\delta_{kr}e_{js} - \delta_{ks}e_{jr}\}.$$

En particular, $\mathcal{C}\ell^{(2)}(\mathbb{R}^n, q)$ és una subàlgebra de Lie de $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n, q)$. Per una altra banda,

$$\exp(te_{jk}) = \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + e_j e_k \sin\left(\frac{1}{2}t\right) = e_j(e_k \sin\left(\frac{1}{2}t\right) - q(e_j)e_j \cos\left(\frac{1}{2}t\right)),$$

quan $q(e_j)q(e_k) = 1$, mentre que

$$\begin{aligned} \exp(te_{jk}) &= \cosh(1/2t) + e_j e_k \sinh(1/2t) = \\ &= e_j(e_k \sinh(1/2t) + q(e_j)e_j \cosh(1/2t)) \end{aligned}$$

si $q(e_j)q(e_k) = -1$. Per tant, com a producte parell d'elements tals que $q(e_j) = \pm 1$, $\exp(te_{jk})$ sempre roman en la component identitat de $\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^n, q)$, i per tant $e_{jk} \in (\mathbb{R}^n, q)$. Com que

$$\dim(\mathfrak{spin}(\mathbb{R}^n, q)) = \dim(\mathfrak{so}(\mathbb{R}^n, q)) = \frac{1}{2}n(n-1),$$

l'àlgebra de Lie $\mathcal{C}\ell^{(2)}(\mathbb{R}^n, q)$ generada per aquests e_{jk} es tot $\mathfrak{so}(\mathbb{R}^n, q)$.

Fixem ara X en $\mathcal{C}\ell^{(2)}(\mathbb{R}^n, q)$. Llavors $X = \sum_{j < k} a_{jk} X_{jk}$ on $A = (a_{jk})$ és la matriu antisimètrica $\mathbb{R}^{n \times n}$, i, sobre V ,

$$d\varphi(X)v = \sum_{j < k} a_{jk} [X_{jk}, v] = \sum_{j < k} a_{jk} (q(e_j)E_{jk} - q(e_k)E_{kj})v$$

on E_{jk} és la transformació lineal de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$E_{jk} : v \rightarrow v_j e_k; \quad v = \sum_j v_j e_j.$$

En conseqüència, $X \rightarrow d\varphi(X)$ és un isomorfisme lineal de $\mathcal{C}\ell^{(2)}(\mathbb{R}^n, q)$ en $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ que satisfà que

$$d\varphi(X_{jk}) = q(e_j)E_{jk} - q(e_k)E_{kj} \quad (1 \leq j, k \leq n).$$

En realitat, aquest és un isomorfisme lineal de $\mathcal{C}\ell^{(2)}(\mathbb{R}^n, q)$ en $\mathfrak{so}(V, q)$ atès que

$$B(d\varphi(X)u, v) + B(u, d\varphi(X)v) = XB(u, v) - B(u, v)X = 0$$

per a tot $u, v \in \mathbb{R}^n$. Per a provar que això es compleix també per a l'isomorfisme àlgebres de Lie, observem que

$$\varphi(\exp tX)v = (\exp tX)v(\exp tX)^{-1},$$

i, per tant,

$$\frac{d}{dt}(\varphi(\exp tX)v)|_{t=0} = Xv - vX = [X, v].$$

D'aquesta manera l'operador $d\varphi(X) : v \rightarrow [X, v]$ sorgeix de la diferencial de l'homomorfisme del grup de Lie

$$\varphi : \mathbf{Spin}(\mathbb{R}^n, q) \rightarrow \mathbf{SO}(\mathbb{R}^n, q).$$

En conseqüència

$$X \mapsto d\varphi(X)$$

defineix un isomorfisme d'àlgebres de Lie de $\mathfrak{spin}(\mathbb{R}^n, q)$ en $\mathfrak{so}(\mathbb{R}^n, q)$ que satisfà

$$\varphi(\exp X) = \exp(d\varphi(X)); \quad X \in \mathfrak{spin}(\mathbb{R}^n, q).$$

□

En el cas de grups de Lie no connexos, com per exemple el grup $\mathbf{Spin}(\mathbb{R}^4, (3, 1))$, la seva component connexa que contenen l'element neutre, es comporta igual que els grups de Lie connexos.

4.2 Representacions dels grups de Lie $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ i $\mathbf{Spin}(n, \mathbb{C})$

Un cop hem vist que $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathfrak{spin}(n, \mathbb{R})$, aquesta secció descriurem les representacions del grup espinorial complex. Per a fer això cal abans estudiar les representacions del grup $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ i encara més, s'haurà de distingir entre el cas amb n parell i el cas amb n senar.

4.2.1 Cas parell: $\mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$

Siguin h_i els generadors d'una àlgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$. Les arrels venen donades per les formes $\alpha_i(\sum a_i h_i) = a_i$.

Té arrels $\pm\alpha_i \pm \alpha_j$ (diagrama de tipus B_n) amb transicions fonamentals de la forma $t_i = h_i - h_{i+1}$, per a $i = 1, \dots, n-1$, i $t_n = h_{n-1} - h_n$. Els pesos estan definits per $\lambda_i(t_j) = \delta_{ij}$ i poden s'escriuen com segueix:

$$\lambda_1 = \alpha_1, \lambda_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \lambda_{n-2} = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i.$$

Els pesos restants són de la forma

$$\lambda_{n-1} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i - \alpha_n \right)$$

i

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i + \alpha_n \right).$$

Per tant ens queda que

$$\delta = (n-1)\alpha_1 + (n-2)\alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1},$$

amb les corresponents xarxes

$$\mathcal{I} = \{\Sigma a_i \alpha_i \mid 2a_i \in \mathbb{Z}, a_i - a_j \in \mathbb{Z}\}$$

i

$$\mathcal{R} = \{\Sigma a_i \alpha_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^n a_i \in 2\mathbb{Z}\}.$$

Si n és senar,

$$(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in \mathcal{I}/\mathcal{R}$$

i té ordre 4 en $\mathcal{I}/\mathcal{R}$ i a més el genera ja que

$$3(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \in \mathcal{R}.$$

Si n és parell, els elements $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ estan en $\mathcal{I} \setminus \mathcal{R}$ i té ordre 2. Per tant tenim $\mathcal{I}/\mathcal{R} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si n és parell i $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ si és senar. Es pot provar, mitjançant les fórmules de les dimensions de Weyl, que sorgeixen com a conseqüència de la fórmula d'integració de Weyl, que $\dim(U_{\lambda_j}) = \binom{2n}{j}$. Per tant

$$U_{\lambda_j} = \bigwedge^j \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}), \quad j = 1, \dots, n-2,$$

i, com comprovarem a continuació,

$$U_{\lambda_{n-1}+\lambda_n} = \bigwedge^{n-1}(\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})),$$

$$U_{2\lambda_{n-1}} \oplus U_{2\lambda_n} = \bigwedge^n(\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})).$$

Per a $\mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$ la xarxa

$$\mathcal{K} = \{\sum a_n \lambda_n \mid a_n \in \mathbb{Z}\}$$

i

$$\mathcal{K}/\mathcal{R} \simeq \mathcal{I}/\mathcal{K} \simeq \mathbb{Z}/(2),$$

per tant $\mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$ és doblement connex i té centre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Clarament tenim que $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2} \in \mathcal{K}$ però $\lambda_{n-1}, \lambda_n \notin \mathcal{K}$. Com hem vist en seccions anterior el recobridor universal és $\mathbf{Spin}(2n, \mathbb{C})$.

Les representacions fonamentals λ_{n-1}, λ_n estan associats a les accions de $\mathbf{Spin}(2n, \mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}^{2^n}$. En termes de matrius M , hi ha $M_1, \dots, M_{2n}$ actuant sobre $\mathbb{C}^{2^n}$. Siguin $M_{ij} = M_i M_j$, per $i < j$ són generadors de $\mathbf{Spin}(2n, \mathbb{C})$. Sigui $\Gamma = M_1 \cdots M_{2n}$. Llavors $[\Gamma, M_{ij}] = 0$. per tant $\mathbb{C}^{2^n}$ és pot descompondre en dues espais amb diferents valors propis de Γ .

D'aquesta manera hi ha dos representacions irreductibles del grup de Lie $\mathbf{Spin}(2n, \mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}^{2^n}$, cada una amb pes $\pm \frac{1}{2}\lambda_1 \pm \frac{1}{2}\lambda_2 \pm \dots \pm \frac{1}{2}\lambda_n$ on una té un nombre senar de signes menys i l'altra amb un nombre parell. La primera correspon a $U_{\lambda_{n-1}}$ i la segona a U_{λ_n} .

4.2.2 Cas senar $\mathbf{SO}(2n+1, \mathbb{C})$

En aquest cas tenim arrels $\pm\alpha_i \pm \alpha_j$ i $\pm\alpha_i$ (sistema d'arrels C_n . amb transicions fonamentals $t_1 = h_1 - h_2, \dots, t_{n-1} = h_{n-1} - h_n$ i $t_n = 2h_n$. Com és usual,

$$\lambda_1 = \alpha_1, \lambda_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \lambda_{n-1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}, \lambda_n = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \dots + \alpha_n).$$

En conseqüència $\delta = (n - \frac{1}{2})\alpha_1 + (n - \frac{3}{2})\alpha_2 + \dots + \frac{1}{2}\alpha_n$. D'aquesta manera,

$$\mathcal{I} = \{\sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \mid 2a_i \in \mathbb{Z}, a_i - a_j \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathcal{R} = \{\sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \mid a \in \mathbb{Z}\},$$

per tant $\mathcal{I}/\mathcal{R} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i per $\mathbf{SO}(2n+1, \mathbb{C})$, $\mathcal{K} = \mathcal{R}$. Notem que $\delta \notin \mathcal{K}$ per $\mathbf{SO}(2n+1)$.

Com en el cas $\mathbf{SO}(2n, \mathbb{C})$,

$$\bigwedge^j(\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})) = U_{\lambda_j} \text{ per a tot } j = 1, \dots, n-1.$$

Com abans aquest fet sorgeix de les fórmules dimensionals de Weyl. En aquest cas, però $\bigwedge^n \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$ és també irreductible i igual a $U_{2\lambda_n}$. En aquest cas la representació espinorial és única i és U_{λ_n} .

4.2.3 Cas del grup $\mathbf{Spin}(3, \mathbb{C})$.

En el cas del grup espinorial $\mathbf{Spin}(3, \mathbb{C})$ podem observar els resultats següents. La dimensió de la representació és 2, i correspon a les anomenades matrius de Pauli.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

També podem observar que el rang d'aquest grup és 1, és a dir, les representacions venen donades per un nombre.

Tal com veurem en la secció, aquestes només poden prendre un nombre enter o un mig-enter, i. e., múltiples enters del nombre $1/2$.

4.3 Caràcters dels grups espinorials

Comencem per estudiar els grups espinorial senars. Sigui el grup espinorial compacte $\mathbf{Spin}(2n+1, \mathbb{C})$. Siguin e_i , f_i i u . Considerem la transformació ortogonal

$$\begin{aligned} J(e_i) &= e_i \\ J(f_i) &= f_i \\ J(u) &= -u \end{aligned}$$

per tant

$$\mathbf{O}(2n+1, \mathbb{C}) = \mathbf{SO}(2n+1, \mathbb{C}) \cup \mathbf{SO}(2n+1, \mathbb{C})J.$$

Els seu grup de Weyl és el producte semidirecte $W = S_n \ltimes \mathbb{Z}/(2)^n$.

Sigui T un tor maximal $\mathbf{SO}(2n+1, \mathbb{C})$. Sigui X es corresponent grup de caràcters de T , vist en la secció 2.3. Es pot comprovar que X és el grup lliure en les variables x_i . Sigui $T' = \varphi^{-1}(T)$ l'antiimatge del tor maximal en el grup $\mathbf{Spin}(2n+1, \mathbb{C})$ és un doble recobriment de $\mathbf{SO}(2n+1, \mathbb{C})$, el grup X ha de ser d'índex 2 en X' . Podem considerar el grup lliure en les variables x_i com un subgrup del grup lliure en les variables $x_i^{1/2}$ amb l'acció usual del grup de Weyl, generat pels elements x_i i $s = (\prod_{i=1}^n x_i^{1/2})$.

Per la fórmula d'integració de Weyl obtenim

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{O}(2n, \mathbb{C})} f(g) d\mu &= \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left(\int_T f(x) \Delta(x) \overline{\Delta}(x) d\tau + \int_{TJ} f(x) \Delta(x) \overline{\Delta}(x) d\tau \right), \end{aligned}$$

on

$$\Delta(x_1, \dots, x_p) = \prod_{i < j} (x_i + x_i^{-1} - (x_j + x_j^{-1})) \prod_i (x_i^{1/2} - x_i^{-1/2}).$$

4.3.1 Observació. Una funció

$$A_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n} := \sum_{s \in W} 1^s s(x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \cdots x_n^{\ell_n}), \quad \ell_1 > \ell_2 > \cdots > \ell_n > 0.$$

és un caràcter de grup X' si tots els ℓ_i son o semienters.

La funció

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i + x_i^{-1} - (x_j + x_j^{-1})) \prod_i (x_i^{1/2} - x_i^{-1/2})$$

és antisimètrica amb terme director $x_i^{n-1/2} \cdots x_n^{1/2}$. Per tant es té el valor

$$\Delta = A_{n-1/2, n-1-1/2, \dots, 1/2}.$$

Notem que

$$\Delta \prod_i (x_i^{1/2} + x_i^{-1/2}) = \prod_{i < j} (x_i + x_i^{-1} - (x_j + x_j^{-1})) \prod_i (x_i - x_i^{-1}).$$

Si els ℓ_i són tots enters, llavors $A_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n}$ és divisible per $\Delta \prod_i (x_i^{1/2} + x_i^{-1/2})$ amb els quocients sent una combinació lineal de caràcters tots amb el exponents enters. Per una altra banda, si tots els ℓ_i son mig enters, multipliquem per $\prod_i x_i^{1/2}$ i és manté la multiplicitat.

4.3.2 Proposició. Els elements

$$S_\lambda(x) := A_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n} / \Delta(x), \quad \lambda := \ell_1 - n, \ell_2 - n + 1, \dots, \ell_n - 1$$

són una base entera de l'anell $\mathbb{Z}[x_i, x_i^{-1}, \prod_i x_i^{1/2}]$, invariants per W .

El monomi líder de $S_\lambda(x)$ és $x_1^{\ell_1 - n + 1/2} x_2^{\ell_2 - n + 3/2} \dots x_n^{\ell_n - 1/2}$.

4.3.3 Teorema. Les funcions $S_\lambda(x)$ (com a funcions dels valors propis) són els caràcters del grup espinorial $\mathbf{Spin}(n, \mathbb{C})$. Les funcions $S_\lambda(x)$ amb pes enter són els caràcters irreductibles del grup especial ortogonal.

Si λ és integral, $S_\lambda(x)$ és el caràcter de la representació $T_\lambda(V)$ de 6.6.

Per al cas parell el seu grup de Weyl és el producte semidirecte $S_n \ltimes S$ on S_n és el grup simètric permutant les coordenades. S és el subgrup del grup de signatura $\mathbb{Z}/(2)^n := (\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$ els quals canvien els signes de les coordenades, format per només un nombre parell de canvis de signes.

Per la fórmula d'integració de Weyl, obtenim

$$\int_{\mathbf{Spin}(2n, \mathbb{C})} f(g) d\mu = \frac{1}{2^{n-1} n!} \int_T f(x) \Delta(x) \bar{\Delta}(x) d\tau,$$

on $\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i + x_i^{-1} - (x_j + x_j^{-1}))$, amb monomi director $x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-1}$.

L'anell de caràcters del tor maximal del grup especial ortogonal és l'anell de polinomis $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}]$, mentre que el grup espinorial té també l'element $\prod_i x_i^{1/2}$.

Ara, no sempre és veritat que en la òrbita d'un monomi sota l'acció del grup de Weyl W , hi ha un monomi amb tots els exponents positius. D'aquesta manera tenim una noció diferent de terme director. De fet, és fàcil verificar que, donat $h_1 > h_2 > \cdots > h_n \geq 0$, si $h_n > 0$ i els dos monomis $x_1^{h_1} x_2^{h_2} \cdots x_n^{h_n}$ i $x_1^{h_1} x_2^{h_2} \cdots x_{n-1}^{h_{n-1}} x_n^{-h_n}$ estan en dos òrbites diferents i liderant cada un d'ells. En el llenguatge dels pesos, un element és director en una òrbita si ho és en una cambra fonamental. A més cada un d'aquests dos elements serà terme director d'una funció antisimètrica. Dividint aquestes funcions per $\Delta(x_1, \dots, x_n)$ aconseguim la llista de caràcters irreductibles. Podem saber a quines representacions corresponen usant la teoria de pesos més alts.

Capítol 5

Aplicacions a la física de partícules

En aquest capítol veurem una aplicació a la física dels conceptes que hem explicat anteriorment. Ens centrarem en el grup $\mathbf{SU}(3)$ i en els seus subgrups.

5.1 Conceptes i definicions bàsics

En aquesta primera secció tractarem breument alguns resultats fonamentals de la física actual, així com també un breu diccionari que ens relacionarà els conceptes vistos en el treball i els resultats provinents de la física.

L'any 1924, el físic francès De Broglie va suggerir que, així com anys enrere, Compton havia observat que la radiació es podria interpretar en termes de matèria (caràcter corpuscular), a totes les partícules materials se'ls podia associar una ona. D'acord amb aquesta hipòtesi, De Broglie va donar una interpretació física de les regles de quantificació.

Un altre resultat clau de la física de partícules és el principi d'incertesa de Heisenberg que es pot enunciar com segueix:

En un sistema físic no es poden conèixer simultàniament i amb absoluta precisió els valors de dues variables canòniques conjugades.

Werner Heisenberg (1901-1976) posà de manifest que és impossible construir un aparell que mesures on està un electró, i que a més ens digués a quina velocitat està viatjant. Si volem mesurar la seva velocitat haurem de canviar de llum, en aquest cas ja no sabrem la seva posició.

En 1925, Wolfgang Ernst Pauli (1900-1958) va enunciar el principi d'exclusió (anomenat de Pauli) que estableix que no pot haver-hi dos fermions amb tots els nombres quàntics idèntics (el mateix estat quàntic de la partícula individual). Avui en dia no té l'estatus de principi, ja que és pot demostrar a partir de supòsits més generals.

El principi d'exclusió de Pauli interpreta un paper important en nombre molt gran de fenòmens físics. Un dels més importants (i que donà lloc al principi) és la configuració electrònica dels àtoms. Un àtom electrònicament neutre allotja un nombre d'electrons igual al nombre de protons del nucli. Com que els electrons són fermions, el principi d'exclusió els prohibeix ocupar el mateix estat quàntic, per tant han d'ocupar les successives capes electròniques.

5.1.1 Funcions d'ona

5.1.1 Definició. Una funció d'ona $\Psi(x, t)$ d'un sistema físic és una funció que representa l'estat dinàmic d'aquest sistema, és a dir, conté tota la informació referent a les seves propietats físiques.

Les funcions d'ona que s'utilitzen en mecànica quàntica són funcions complexes de variable real

$$\begin{aligned}\Psi : \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, t) &\mapsto \Psi(x, t).\end{aligned}$$

El conjunt de funcions d'ona d'un sistema físic té una estructura d'espai de Hilbert, $\mathcal{H}$. Donat un operador lineal

$$\begin{aligned}\hat{A} : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ \Psi &\mapsto \hat{A}\Psi,\end{aligned}$$

es diu que una funció d'ona Ψ és una funció pròpia d'aquest operador amb valor propi a si es compleix

$$\hat{A}\Psi = a\Psi$$

En aquest cas se sol escriure

$$\Psi_a := \Psi.$$

El conjunt de funcions pròpies té estructura d'espai vectorial.

5.1.2 Definició. La dimensió d'aquest espai vectorial s'anomena multiplicitat o ordre de degeneració del valor propi a . Si la dimensió és 1, es diu que el valor propi és no degenerat.

En mecànica quàntica es fan les interpretacions següents:

1. Els estats dinàmics dels sistemes físics són representats per les funcions d'ona. El conjunt de les funcions d'ona té una estructura d'espai de Hilbert $\mathcal{H}$.
2. Les variables dinàmiques són representades per operadors hermítics A que actuen sobre $\mathcal{H}$.
3. Els resultats possibles d'una mesura d'una variable dinàmica són els valors propis de l'operador corresponent $\hat{A}$. El valor d'aquest observable és un nombre quàntic.

4. En mesurar una variable dinàmica A en un sistema que es troba en un estat dinàmic que és representat per la funció d'ona Ψ , hi ha una determinada probabilitat $P(a_i)$ d'obtenir el valor propi a_i .
5. Si com a resultat de fer una mesura de la variable dinàmica A en un sistema físic que es troba en un estat dinàmic $\Psi(x)$ s'obté el valor propi a_i , aleshores l'estat dinàmic just després de la mesura és donat per la funció pròpia corresponent.

5.1.2 Variables dinàmiques simultàniament mesurables amb precisió

Siguin A i B dues variables dinàmiques i $\hat{A}$ i $\hat{B}$ els seus operadors corresponents. Suposem que l'estat dinàmic d'un sistema és representat per una funció d'ona Ψ_i , que és funció pròpia de l'operador $\hat{A}$, amb valor propi a_i :

$$\hat{A}\Psi_i = a_i\Psi_i,$$

i compleix el mateix per l'operador $\hat{B}$, aleshores l'ordre en el que farem les mesures no serà rellevant, ja que

$$\hat{B}\hat{A}\Psi_i = b_ia_i\Psi_i = a_ib_i\Psi_i = \hat{A}\hat{B}\Psi_i.$$

Per a que això sigui cert en general, és a dir, que els resultats de les mesures no depenguin de l'ordre en què es facin, és condició necessària i suficient que els operadors $\hat{A}$ i $\hat{B}$ tinguin una base pròpia comuna.

Comprovar que dos operadors tenen una base pròpia comuna és difícil però aquesta condició és equivalent a que

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0.$$

5.1.3 Exemple. El moment angular és el producte vectorial

$$L = x \wedge p$$

on x és la posició i p el moment lineal. De manera explícita, les components de l'operador del moment angular són

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \hat{L}_y &= \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \hat{L}_z &= \hat{y}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_y = i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

A partir de les relacions de commutació fonamentals es poden trobar les relacions de commutació dels components de l'operador moment angular. En particular

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z.$$

Aquest resultat ens diu que el moment angular és una magnitud vectorial de la qual no podem conèixer simultàniament i amb absoluta precisió dos dels seus tres components. En canvi l'operador mòdul del moment angular commuta amb tots ells. Això vol dir que es pot conèixer simultàniament i amb absoluta precisió el mòdul del moment angular i qualsevol dels seus components.

Es pot comprovar, doncs, que si considerem el grup de Lie $\mathbf{SU}(3)$ sobre el conjunt $\mathcal{H}$ de funcions d'ona d'un sistema físic aleshores el conjunt d'operadors que són simultàniament observables, coincideix amb tres parelles de generadors de les tres subàlgebres de Cartan que conté $\mathfrak{su}(3)$, recordem que tenim la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & iT_3 & -iT_2 & \frac{i}{2}T_7 & -\frac{i}{2}T_6 & \frac{i}{2}T_5 & -\frac{i}{2}T_4 & 0 \\ & 0 & iT_1 & \frac{i}{2}T_6 & \frac{i}{2}T_7 & -\frac{i}{2}T_4 & -\frac{i}{2}T_5 & 0 \\ & & 0 & \frac{i}{2}T_5 & -\frac{i}{2}T_4 & -\frac{i}{2}T_7 & \frac{i}{2}T_6 & 0 \\ & & & 0 & \frac{i}{2}(T_3 + \frac{\sqrt{3}}{3}T_8) & \frac{i}{2}T_2 & \frac{i}{2}T_1 & -\frac{i}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}T_5 \\ & & & & 0 & -\frac{i}{2}T_1 & \frac{i}{2}T_2 & \frac{i}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}T_4 \\ & & & & & 0 & -\frac{i}{2}(T_3 - \frac{\sqrt{3}}{3}T_8) & -\frac{i}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}T_7 \\ & & & & & & 0 & \frac{i}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}T_6 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2 Models de l'univers

En aquesta secció es donarà una introducció a la teoria de la gran unificació (denotada, GUT per les sigles angleses de Grand Unification Theory) i de la seva relació amb les matemàtiques.

5.2.1 Introducció

La teoria de la gran unificació és una de les teories o models de la física que unifica tres forces fonamentals: la força electro-magnètica, la força nuclear dèbil, i la força nuclear forta.

La gran unificació està basada en la idea que en energies extremadament altes, totes les simetries tenen el mateix origen, la qual cosa és consistent amb el fet que són les manifestacions d'una única simètria calibradora. Més precisament, GUT preveu que les energies superiors a 10^{14} GeV, el electromagnetisme, les energies nuclears dèbils i fortes es fusionen en un únic camp unificat.

Fins ara, els físics han estat capaços de juntar l'electromagnetisme i l'energia nuclear dèbil en la força electrodèbil, i actualment s'està treballant per unir aquesta última força i la cromodinàmica quàntica en les interaccions QCD-electrodèbil també anomenades la força electrofora. Més enllà de la gran unificació hi ha també l'especulació que pot ser possible juntar la gravitació amb les altres tres mesures simètriques dins d'una teoria global de les lleis de l'univers.

5.2.2 Teories proposades

Moltes teories d'unificació han estat proposades, però cap d'elles és universalment reconeguda. Una de les més ambiciosos inclou totes les forces fonamentals, incloent la gravitació. Algunes de

les més freqüents són:

1. model estàndard té com a grup associat

$$\mathbf{Spin}(3, \mathbb{R}) \times \mathbf{SU}(3) \times \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{U}(1).$$

En introduir consideracions relativistes respecte l'espai temps, els grup calibrador de tot el model estàndard resulta

$$\mathbf{Spin}(3, 1) \times \mathbf{SU}(3) \times \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{U}(1).$$

2. el model Georgi-Glashow que té grup calibrador $\mathbf{SU}(5)$,
3. el model $\mathbf{SO}(10)$,
4. el model torçat $\mathbf{SU}(5)$, que té grup calibrador

$$\mathbf{SU}(5) \times \mathbf{U}(1),$$

5. el model Pati-Salam que té grup calibrador

$$\mathbf{SU}(4) \times \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2),$$

6. el model torçat $\mathbf{SO}(10)$, que té grup calibrador

$$\mathbf{SO}(10) \times \mathbf{U}(1),$$

7. el model de trinificació que té grup calibrador

$$\mathbf{SU}(3) \times \mathbf{SU}(3) \times \mathbf{SU}(3).$$

8. el model $\mathbf{SU}(6)$,

9. el model E_8

i molts altres, gairebé un per a cada grup de Lie compacte.

5.3 Model estàndard

El model estàndard de la física de partícules és una teoria que descriu tres de les quatre interaccions fonamentals conegudes entre partícules elementals que componen tota la matèria. És una teoria quàntica de camps desenvolupada entre 1970 i 1973 que és consistent amb la mecànica quàntica i la relativitat especial. Fins ara, gairebé totes les proves experimentals de les tres forces descrites pel model, estan d'acord amb les seves prediccions. Encara que el model estàndard no arriba a ser una teoria completa de les interaccions fonamentals degut a que no inclou la gravetat.

Dins de tot això el model estàndard agrupa dos teories importants, el model electrodèbil i la cromodinàmica quàntica, el que proporciona una teoria internament consistent que descriu les interaccions entre totes les partícules observades experimentalment.

El model electrodèbil va ser desenvolupat en els anys 60 per Glashow, Salam i Weinberg. La constatació experimental de les interacció mediades per corrents carregades, els portà a postular l'existència de les corrents neutres. Aquest tres investigadors van rebre el Premi Nobel de Física en 1979.

El grup calibrador que regeix aquest model és

$$\mathbf{SU}(2) \times \mathbf{U}(1),$$

on el grup $\mathbf{SU}(2)$ està associat a la conservació de l'espín T , i el grup $\mathbf{U}(1)$, està associat a la conservació de l'hipercàrrega Y .

La cromodinàmica quàntica és una teoria de cal·libracció que descriu la interacció entre quarks i gluons. Aquesta teoria va ser proposada per David Politzer, Frank Wilczek i per David Gross. Segons aquesta teoria, els caràcter de l'interacció forta està determinat per una simetria especial entre les carregues de color dels quarks. Es coneix aquesta simetria com el grup de

cal·libració

SU(3)

i els quarks es transformen sota aquest grup com a triplets **SU(3)** de camps.

5.3.1 Partícules

En aquesta secció intentarem fer un resum de les partícules fonamentals i d'alguns dels seus nombres quàntics.

Observem en la figura 5.1 un esquema de les partícules fonamentals per al model estàndard.

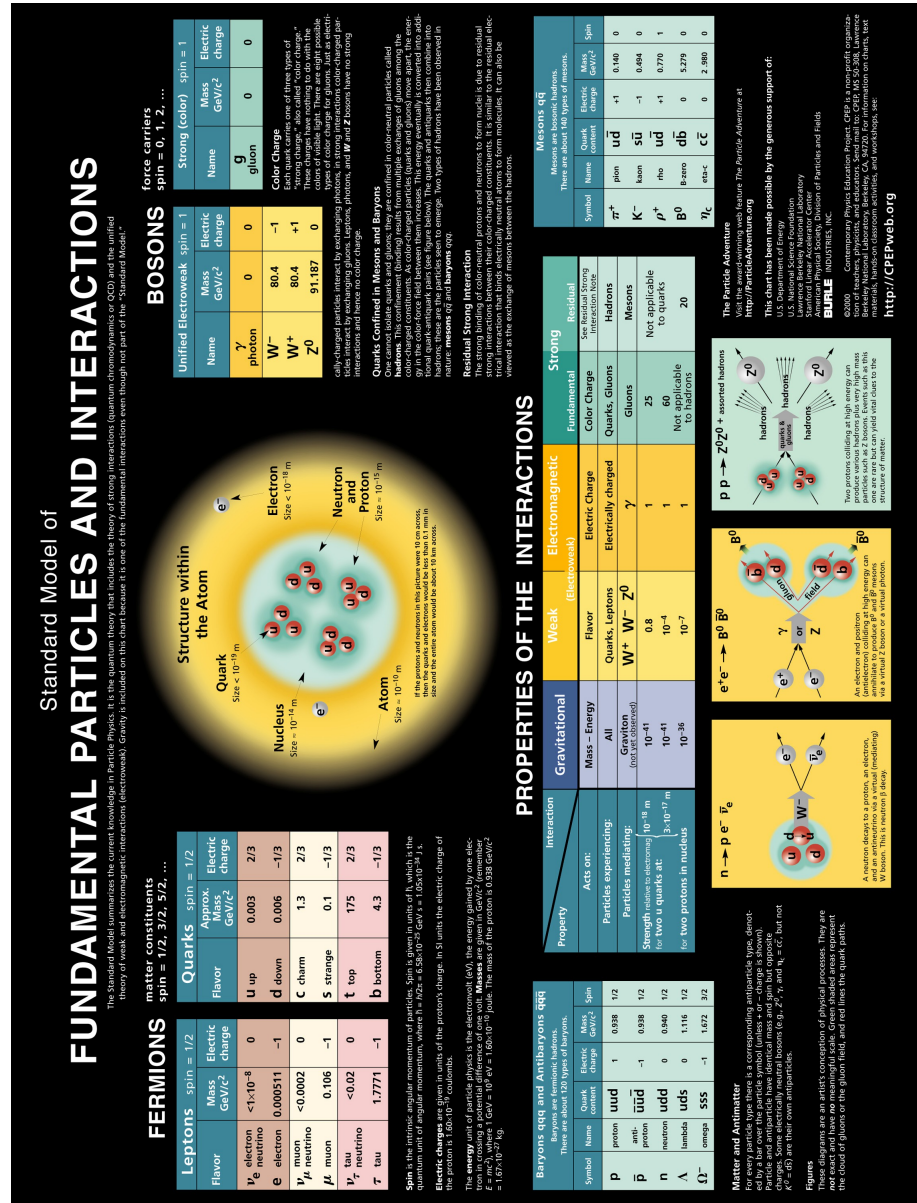


Figura 5.1: Carta fonamental de les partícules.

5.3.2 Partícules portadores de matèria

Segons el model estàndard tota la matèria coneguda està constituïda de partícules que tenen una propietat intrínseca anomenada espín, el valor del qual és nombre semienter. En termes del model estàndard totes les partícules de matèria són fermions. Per aquest motiu, segueixen el principi d'exclusió de Pauli. A part de les antipartícules associades, el model estàndard explica un total de 12 tipus diferents de partícules de matèria, que són, quarks (up, down, strange, charm, top i bottom) i les sis partícules que són els leptons (electró, muó, tau i els seus neutrins corresponents).

Les partícules de la matèria també porten carregues que les fan susceptibles a les forces fonamentals segons quelcom descrit en la secció següent.

- Cada quark pot portar qualsevol de les tres carregues de color (vermella, verda o bé blava) permetint participar en interaccions fortes.
- Els quarks tipus up (up, top i charm) porten una carrega elèctrica de $+2/3$ i els tipus down (down, rar i bottom) porten una carrega de $-1/3$, permetent als dos tipus de partícules participar en les interaccions electromagnètiques.
- Els leptons no porten cap carrega de color, per tant, no interaccionen en les interaccions fortes.
- El leptons tipus up (els neutrins) no porten cap càrrega, elèctrica.
- Els leptons tipus down (el electró, el muó, i el leptó tau) porten carrega de -1 , permetent als dos tipus participar en interaccions electromagnètiques.

- Els quarks i els leptons porten càrregues de sabor, incloent l'isospin dèbil, permetent a totes elles estar presents en les interaccions nuclears dèbils.

Parelles de cada grup, un quark tipus up, un quark tipus down, un lepton tipus down i el seu neutrí corresponent, formen famílies de partícules. Les partícules corresponents entre cada família són idèntiques entre elles llevat en la massa i el sabor.

Famílies	Leptons		Quarks	
	Nom	Símbol	Nom	Símbol
1a	electró	e	up	u
	neutrí e	n_e	down	d
2a	muó	μ	charm	c
	neutrí μ	n_μ	strange	s
3a	tau	τ	top	t
	neutrí τ	n_τ	bottom	b

5.3.3 Partícules portadores de força

Les forces en la física són la manera en que les partícules interaccionen entre elles. El model estàndard explica les forces de la natura (electromagnetisme, nuclear forta (color) i nuclear dèbil (sabor)) com el resultat de l'intercanvi d'altres partícules per part de les partícules de matèria. Aquestes altres partícules són conegudes com partícules mitjanceres de la força. Quan s'intercanvia una partícula mitjancera de la força, a nivell macroscòpic l'efecte és equivalent a una força que influencia a les dos, i es diu que la partícula a fet de mitjancera d'aquesta força. Es creu que les partícules mitjanceres de força són la raó per la qual existeixen les forces i les interaccions entre les partícules.

Les partícules de força descrites pel model estàndard també tenen espín, però en aquest cas el valor és enter, pel que direm

que les partícules són bosons. Per tant aquestes partícules no segueixen el principi d'exclusió de Pauli.

Els fotons intervenen en la força electromagnètica entre les partícules elèctricament carregades. El fotó no té massa ni càrrega elèctrica i ve descrit per la teoria de la electrodinàmica quàntica.

Els bosons de cal·libracció W^+ , W^- i Z_0 intervenen en les interaccions nuclears dèbils entre partícules de diversos sabors. Tenen massa. Les interaccions dèbils que impliquen als bosons W^+ W^- actuen exclusivament en partícules però no en antipartícules. A més, els bosons W^+ i W^- , tenen càrrega $+1$ i -1 respectivament i participen en les interaccions electromagnètiques. El bosó neutre Z_0 , interactua amb partícules i antipartícules. Aquest tres bosons de calibració, juntament amb els fotons, s'agrupen i intervenen col·lectivament en les interaccions electrodèbils. Els vuit gluons intervenen en les interaccions nuclears fortes entre les partícules carregades de color.

Els gluons no tenen massa. La multiplicitat dels gluons s'etiqueta per les combinacions del color i una càrrega d'anticolor (anomenades antivermell, antiverd i antiblau). Com el gluó té una càrrega efectiva de color, poden interactuar entre ells. Els gluons i les seves interaccions es descriuen mitjançant la teoria de la cromodinàmica quàntica.

5.3.4 El bosó de Higgs

La partícula de Higgs és una partícula elemental masiva hipotètica predita pel model estàndard i l'única que encara no ha estat observada. Això és en part, a que cal una gran quantitat d'energia per a crear-la i observar-la en un laboratori. No té cap espín intrínsec, i (com les partícules mitjanceres de força) es classifica com un bosó.

El bosó de Higgs és la clau per a explicar l'origen de la mas-

sa en les altres partícules elementals, en particular la diferència entre el fotó sense massa i els bosons W i Z que si en tenen. Les masses de les partícules, i les diferències entre l'electromagnetisme (causada pel fotó) i la força dèbil (causades pels bosons W i Z) són crítiques en molts aspectes de l'estructura de la matèria microscòpica (i per tant de la macroscòpica). Per tant, si es demostra l'existència, el bosó de Higgs esdevindria la partícula amb més efecte del nostre món.

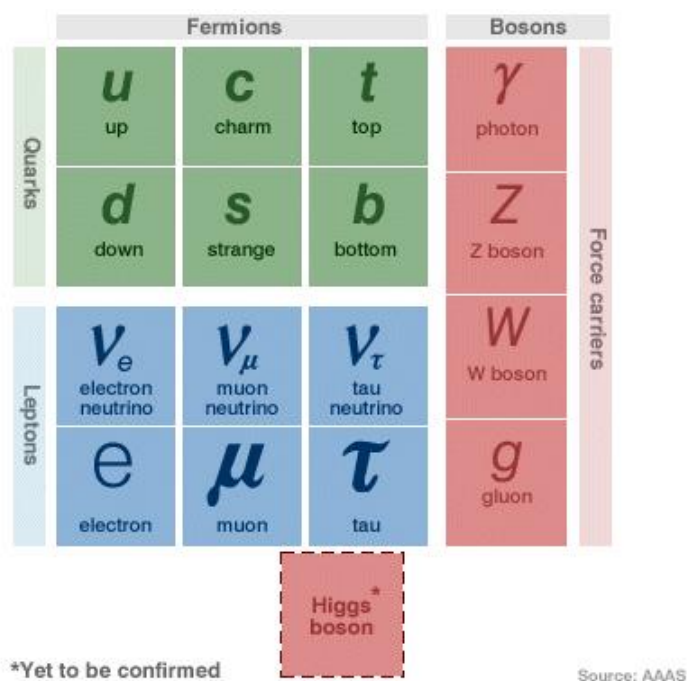


Figura 5.4: Partícules elementals

5.4 Barions

En la física de partícules del model estàndard, els barions són una família de partícules subatòmiques les quals estan fetes de tres quarks. La notable família inclou els protons i els neutrons,

els quals formen els nuclis atòmics, però existeixen molts altres barions inestables. El terme barió és deriva del grec $\beta\alpha\rho\acute{\upsilon}\varsigma$ que significa fort, perquè al mateix temps es cregué que els barions es caracteritzaven per tenir massa més gran que altres partícules.

5.4.1 Introducció

Els barions són fermions interactuant fortament, això és, les partícules experimenten les forces nuclear fortes i són descrites per l'estadística de Fermi-Dirac, la qual s'apliquen a totes les partícules que obeeixen el principi d'exclusió de Pauli.

Els barions, juntament amb els mesons, més enllà de la família de partícules conegudes com hadrons, significa que estan compostes de quarks. Els barions són fermions composts de tres quarks, mentre que els mesons són bosons composts d'un quark i un antiquark. La classificació del model de quarks està basat en aquesta construcció.

A més dels nucleons, altres membres de la família dels barions inclou les partícules Δ , Λ , Σ , Ξ i Ω .

Els barions delta, i les seves resonàncies Δ^{++} , Δ^+ , Δ^0 , Δ^- estan composts per una combinació de quarks up i down de manera que el seu espín és $3/2$. Bàsicament decauen en un pió i un protó o un neutró.

Els barions (Λ^0) estan composts d'un quark up, un down i un quark rar, amb els quarks up i down amb l'isospin igual a 0. El lambda neutre va ser la primera observació de l'existència del quark rar. En gran part dels casos un lambda decau a un protó i un pió carregat, o a un neutró i un pió neutre.

Els barions sigma (Σ^+ , Σ^0 , Σ^-), estan composts d'un quark rar i una combinació d'un up i d'un down, però situats en un l'estat 1 isospin. Els sigma neutre té la mateixa composició de quarks que els lambda (up, down, rar), i per tant decau molt

més ràpid que Σ^+ (up, up, rar) o Σ^- (down, down, rar).

Els barions xi, (Ξ^0, Ξ^-), estan compostats de dos quarks rars i un de up o down. Llavors decau de forma predominant en un barió lambda i un pió; el lambda en conseqüència en el cas anterior. Donada aquesta seqüència de descaïments, un estat Ξ és a vegades anomenada com una cascada.

El barió omega negatiu (Ω^-) està compostat per tres quarks rars. Aquest descobriment va ser un gran triomf en un estudi dels processos entre els quarks, àtes que va ser trobat després de que la seva existència, massa i decaïments van ser predites.

Hi ha un estat bariònic adicional el qual conté quarks pesants. Aquest estat denotat per la lletra grega corresponent a la seu tipus (up/down/rar) gust amb un subíndex indicant que quark rar ha estat reemplaçat per el quark més gran. Per exemple, Λ_c^+ té el quark (charm, up, down) enlloc de (rar, up, down).

5.4.2 Matèria bariònica

La materia bariònica és matèria composada majoritàriament de barions (per massa), el qual inclou atòms de qualsevol tipus i d'aquesta manera inclou tota la matèria que podem trobar en la vida normal.

La matèria no bariònica és la antitesis fonamental de tal matèria, sent qualsevol tipus de materia que no està formada per barions. Aquesta pot incloure materia ordinaria com neutrins o electrons lliures; encara que inclou exòtiques espècies de matèria fosca no barionica, tal com partícules supersimètriques, axions o forats negres. La distinció entre materia bariònica i no bariònica es important en la cosmologia.

5.4.3 Càrrega i raresa

Tal i com hem descrit es poden mesurar empíricament certes propietats de les partícules. Els nombre més senzills que poden mesurar és el nombre bariònic dels barions, que per definició, és 1. Donat que estan formats de 3 quarks, cada quark té nombre bariònic $1/3$.

La càrrega, Q , és una mesura de la càrrega elèctrica de la partícula.

La raresa, S , és una mesura de la quantitat de quarks rars que hi ha en una partícula.

En el cas dels barions tenim que si $S = -1$, és a dir, hi ha un quark rar, tenim

$$\begin{aligned}\Sigma^+ & \text{ amb } I_3 = 1, \\ \Sigma^0 & \text{ amb } I_3 = 0, \\ \Sigma^- & \text{ amb } I_3 = -1,\end{aligned}$$

i tenim també

$$\Lambda^+ \text{ amb } I_3 = 0,$$

I_3 denota l'isospin debil, i amb $S = -2$ tenim

$$\begin{aligned}\Xi^+ & \text{ amb } I_3 = 1/2, \\ \Xi^- & \text{ amb } I_3 = -1/2.\end{aligned}$$

Dibuixant aquest punts obtenim la gràfica:

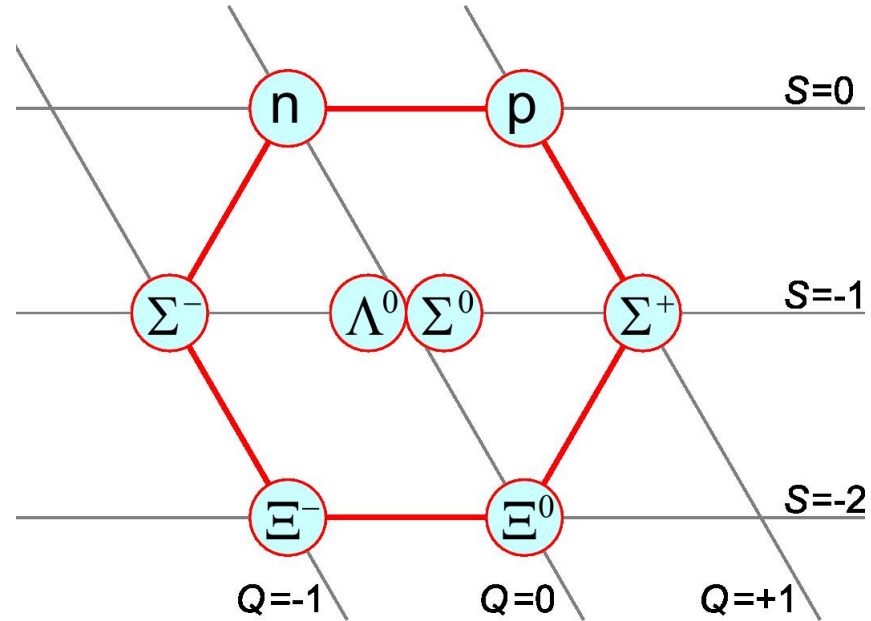


Figura 5.2: Octet bariònic

5.4.4 Ressonàncies hadròniques

Les partícules formades per quarks, tals com els barions i els mesons que participen en les interaccions fortes, s'anomenen genèricament hadrons.

A més de les partícules que hem estudiat fins ara, com per exemple en la secció anterior, existeixen també un gran nombre d'estats excitats. En el cas dels barions podem representar-los gràficament com mostra la figura 5.3.

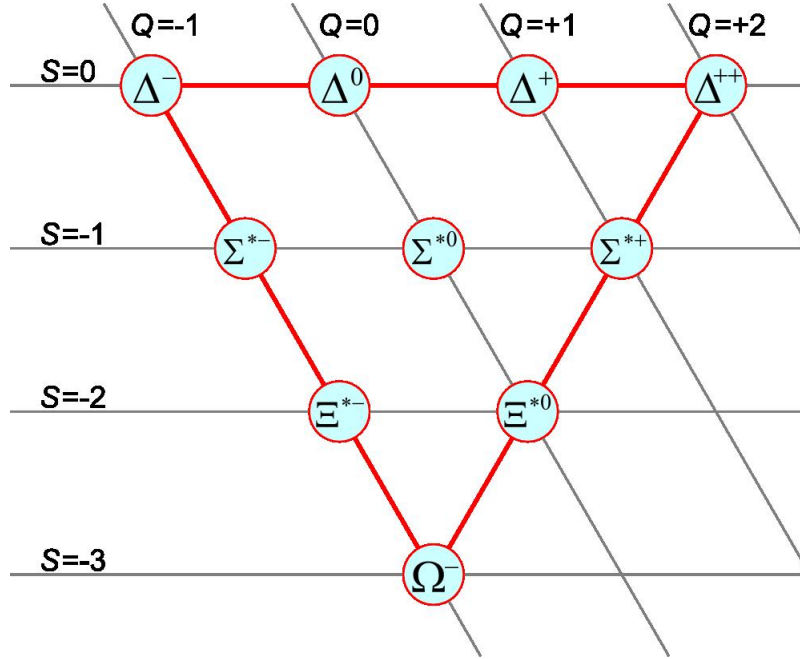


Figura 5.3: Decaplet de ressonàncies bariòniques

5.4.5 Nombres quàntics de les partícules constituents

En aquest apartat farem un resum de totes les partícules elementals segons el model estàndard. Tenint en compte que els nombres quàntics es conserven en el sentit que si una partícula X té un cert nombre quàntic amb valor x i una partícula Y té el mateix nombre quàntic amb valor y , aleshores si $X + Y$ dona lloc a una nova partícula, el valor del nombre quàntic serà $x + y$. Així doncs si donem els valors dels nombres quàntics més importants.

FAMÍLIA I

nom	símbol	Q	T_3	color	massa
electró	e^-	-1	-1/2	[1]	511 keV
positró	e^+	1	0	[1]	511 keV
neutrí	ν_e	0	1/2	[1]	< 2 eV
quark alt	u	2/3	1/2	[3]	n.o.
antiquark alt	$\bar{u}$	-2/3	-1/2	$\bar{[3]}$	n.o.
quark baix	d	-1/3	-1/2	[3]	n.o.
antiquark baix	$\bar{d}$	1/3	1/2	$\bar{[3]}$	n.o.

En física d'energies altes, les unitats de massa s'expressen en unitats d'energia, d'acord amb l'equivalència entre la massa i l'energia

$$E = mc^2.$$

Cal destacar també que els valors de les masses no es poden deduir del model. Només es poden obtenir mitjançant l'experimentació.

FAMÍLIA II

nom	símbol	Q	T_3	color	massa
muó	μ^+	-1	-1/2	[1]	106 MeV
antimuó	μ^-	1	0	[1]	106 MeV
muó-neutrí	ν_e	0	0	[1]	<2 eV
quark encantador	c	2/3	0	[3]	n.o.
antiquark encantador	$\bar{c}$	-2/3	-1/2	[$\bar{3}$]	n.o.
quark rar	s	-1/3	0	[3]	n.o.
antiquark rar	$\bar{s}$	1/3	0	[$\bar{3}$]	n.o.

FAMÍLIA III

nom	símbol	Q	T_3	color	massa
tau	τ^+	-1	-1/2	[1]	1.78 GeV
antitau	τ^-	+1	0	[1]	1.78 GeV
tau-neutrí	τ_e	0	1/2	[1]	<2 eV
quark cim	t	2/3	0	[3]	n.o.
antiquark cim	$\bar{t}$	-2/3	0	[$\bar{3}$]	n.o.
quark fons	b	-1/3	0	[3]	n.o.
antiquark fons	$\bar{b}$	1/3	0	[$\bar{3}$]	n.o.

5.5 Diccionari

Fem un resum de tot el que hem vist en el teorema següent:

5.5.1 Teorema. (Diccionari) *Definim un estat físic com una terna $S = (\mathcal{H}, G, U)$ on:*

- (1) $\mathcal{H}$ és un espai de Hilbert de dimensió n , dit l'espai d'estats de S .
- (2) G és un grup de Lie semisimple i connex, de rang r , dit el grup calibrador de S .

(3) Una representació

$$U : G \rightarrow \mathbf{GL}(\mathcal{H}).$$

Siguin $\mathfrak{g}$ l'àlgebra de Lie de G , i $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subàlgebra de Cartan. Sigui

$$u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{End}(\mathcal{H})$$

la representació tangent de U .

Escollim bases duals

$$\mathfrak{h} = \langle h_1, \dots, h_r \rangle, \quad \mathfrak{h}^* = \langle h_1^*, \dots, h_r^* \rangle,$$

respecte de la forma de Killing.

Sigui $Y(U)$ el conjunt de pesos de U i

$$\mathcal{H}_\rho = \langle \Psi_{\rho_{i_1}}, \dots, \Psi_{\rho_{i_t}} \rangle$$

on escrivim $\rho_{i_1} = \dots = \rho_{i_t} = \rho$, per denotar l'espai de pes ρ .

Sigui

$$\rho_k = (a_1^{(k)}, \dots, a_r^{(k)}), \quad 1 \leq k \leq n,$$

les seves coordenades en la base $\{h_j^*\}$.

Aleshores,

(i) El conjunt $\mathcal{O} = \{u(h_1), \dots, u(h_r)\}$ és un sistema complet d'observables que commuten.

(ii) La matriu Q definida com

$$Q := \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_r^{(1)} & \dots & a_r^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}(r \times n, \mathbb{R})$$

direm que és la matriu dels nombres quàntics de $\mathcal{O}$.

Cada columna de la matriu Q constitueix un sistema complet de nombres quàntics de S simultàniament mesurables.

La representació gràfica de Q , és un n -plet de $\mathbb{R}^r$ projectat en $\mathbb{R}^2$.

- (iii) *Existeix una base $\{\Psi_{\rho_k}\}_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathcal{H}$ formada per vectors propis de $\mathfrak{h}$:*

$$u(h_k)\Psi_{\rho_k} = a_j^{(k)}\Psi_{\rho_k}, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Els vectors $\{\Psi_{\rho_k}\}$ proporcionen un sistema complet d'estats dinàmics de S .

- (iv) *El nombre de matrius de nombres quàntics no equivalents coincideix amb el nombre de tors maximals de G .*

5.5.2 Exemple. Cas quark.

En el cas del quark, els sistema físic ve donat per $\mathcal{H}$ un espai de Hilbert de dimensió 3. El grup de Lie calibrador és $G = \mathbf{SU}(3)$. Considerem en aquest cas la representació $U = [3]$ que ens mesura el color.

Tenim que els quarks tindran les mesures reflectides en la figura 5.5.

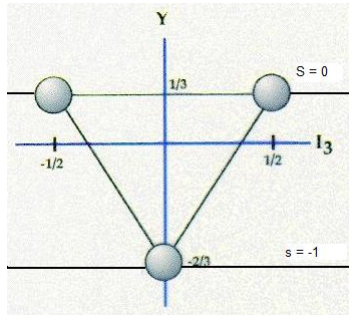


Figura 5.5: Triplet de quarks segon [3]

5.5.3 Observació. Per a obtenir els barions només cal observar que

$$[3] \otimes [3] \otimes [3] = [6] \otimes [3] \oplus [3] \otimes [\bar{3}] = [10] \oplus [8] \oplus [8] \oplus [1],$$

obtenint el decaplet i octuplet bariònic ($[10] \oplus [8]$) representats en les figures 5.1 i 5.2 i, a més, s'obtenen l'octet i el singlet mesònic ($[8] \oplus [1]$).

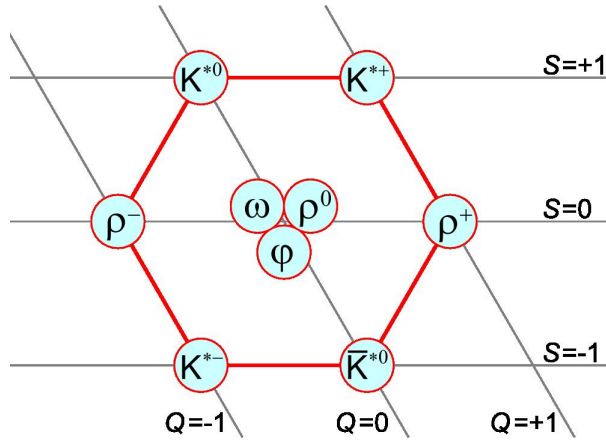


Figura 5.6: Octet mesònic procedent de $[8]$ i $[1]$

5.5.4 Exemple. Cas E_8

Si l'univers admetés el grup de Lie excepcional E_8 com a grup calibrador, operant segons la representació adjunta, contindria un sistema físic integrat per un espai de Hilbert de dimensió 248. Atès que la representació adjunta ens dona lloc als barions que són les partícules més petites observades fins ara en el model estàndard dona que pensar que possiblement sigui la representació que és manifesta de forma més natural, tindríem la representació gràfica 5.7 per aquests E_8 -fermions.

Obtindrem segons el teorema diccionari que la matriu de nombres quàntics per a cada estat físic serà de $M(8 \times 248, \mathbb{R}^8)$, atès que el rang de l'àlgebra de Lie de E_8 és 8. Cada vegada

tindríem 8 nombres quàntics simultàniament observables i un total de 248 ressonàncies.

Suposar que el grup $\mathbf{E}_8$ és el grup que unifica l'univers no és una utopia o una cosa inimaginable. De fet $\mathbf{E}_8$ com a subgrup el grup

$$\mathbf{SU}(3) \times \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{U}(1),$$

que és el considerat en el model estàndard.

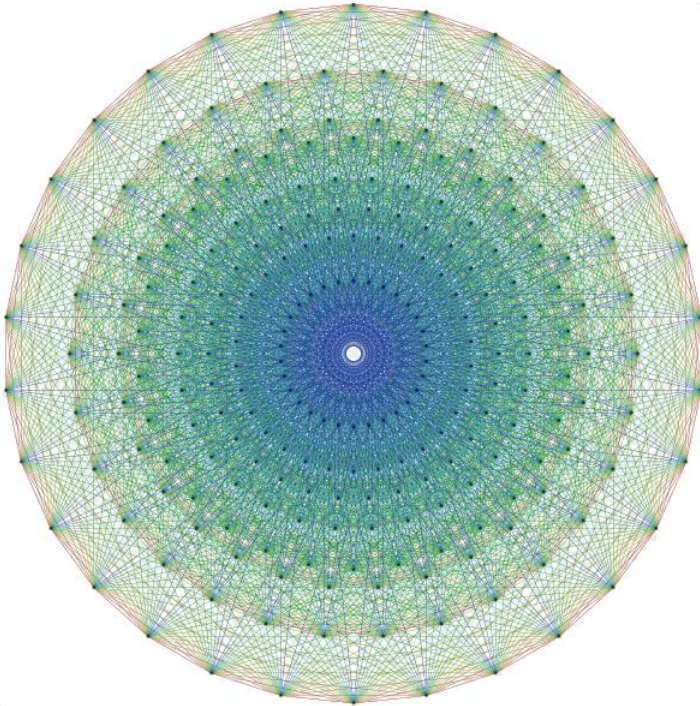


Fig. 5.7: 248-plet E_8 -fermions en la representació adjunta

Bibliografia

- [Dos03] Dosil, M.: *Discovery potential and mass measurement of MSSM charged Higgs produced in top decays with the ATLAS detector*. Tesi, Universitat Autònoma de Barcelona.
- [Fri00] Friedrich, T.: *Dirac Operators in Riemannian Geometry*. Graduate Studies in Mathematics. Volume. 25. American Mathematical Society, 2000. xv + 195 pp. ISBN: 0-8218-2055-9.
- [Ful91] Fulton, W.; Harris, J.: *Representation Theory*. Reading in Mathematics. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1991. xv + 551 pp. ISBN: 0-387-97527-6.
- [Gal05] Gallier, J.: *Clifford algebras, Clifford groups, and a generalization of the quaternions: $\mathbf{Spin}(V, q)$ i $\mathbf{Pin}(V, q)$* . Class notes.
- [Geo99] Georgi, H.: *Lie Algebras in Particle Physics*. Perseus Books Group; 2, 1999. ISBN: 0-7382-0233-9
- [Gil91] Gilbert, J.E.; Murray, M.A.M.: *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis*. Cambridge studies in advanced mathematics, 26, Cambridge University Press, 1991. vi + 334 pp. ISBN: 0-521-34651-1.

- [Lam73] Lam, T. Y.: *The algebraic Theory of Quadratic Forms*. Advanced Book Program. W. A. Benjamin, Inc. Reading, 1973 xi + 344 pp. ISBN: 0-805-35664-3.
- [Lou03] Lounnesto, P.: *Clifford Algebras and Spinors*. London Mathematical Society. LNS
- [Mul04] Müller, B.: *Quantum Mechanics. Symmetries*. Springer, 2004. Paperback: 526 pp. ISBN: 3-540-58080-8.
- [Pod04] Podestá, R.A.: *El operador de Dirac en variedades compactas planas*. Tesi, Universidad Nacional de Córdoba, 2004.
- [Pro81] Procesi, C.: *Topological Geometry*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge 1981.
- [Pro07] Procesi, C.: *Lie Groups. An Approach through Invariants and Representations*. Universitext. Springer-Verlag, 2007. xxii + 596 pp. ISBN: 978-0-387-26040-2
- [Rod02] Rodríguez, E.: *El grupo $\mathbf{SU}(3)$* . Prepublicació.
- [San02] Sanchez del Rio, C (coord.): *Física cuántica*. Ed. Piramide. Madrid 2002. 1143 pp. ISBN: 84-368-1656-0.
- [Shi04] Shimura, G.: Arithmetic and analytic theories of quadratic forms and Clifford groups. Mathematical Surveys and Monographs, 109. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. x+275 pp. ISBN: 0-8218-3573-4.
- [Sim96] Simon, B.: Representations of finite and compact groups, Graduate Studies in Mathematics, n. 10, American Mathematical Society, 1996. xii + 266 pp. ISBN: 0-8218-0453-7

- [Tau05] Tay, P.; W.T. Yu, R.: *Lie algebras and algebraic groups*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, 2005. 653 pp. ISBN: 978-354-24170-6.
- [Tra97] Travesa, A.: Representacions de $SO(3)$. In the book Representacions Automorfes de $GL(2)$. Parts I, II i III, Bayer, P.; Travesa, A. eds. Notes del Seminari de Teoria de Nombres (UB-UAB-UPC). vol 2, p 39-77; Barcelona, 1997. ISBN: 84-923250-1-1.
- [Rio07] Rio, A.: A000079, *Successions d'Sloan*. Notes del Seminari de teoria de Nombres (UB-UPC-UAB), 15. 9. 111-142. Lario, J.C.; Remón, D. (eds). Barcelona, 2006. ISBN: 84-934244-4-7.