3. Espais vectorials euclidians

3.1 Sigui $(E, \cdot)$ un espai vectorial euclidià.

(a) Demostreu que $|u \cdot v| = \|u\| \, \|v\|$ si, i només si, els vectors u i v són linealment dependents.

(b) Suposem ara que $v \neq 0$. Demostreu que $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ si, i només si, $u = \lambda v$ amb $\lambda \geq 0$.

3.2 Sigui E un espai vectorial euclidià i siguin $u, v \in E$. Demostreu les afirmacions següents si són certes o trobeu un contraexemple si són falses:

(a) Si u és ortogonal a v, aleshores $\|u + xv\| \geq \|u\|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

(b) Si $\|u + xv\| \geq \|u\|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$, aleshores u és ortogonal a v.

3.3 Es consideren els subespais següents de $\mathbb{R}^4$ amb el producte escalar ordinari:

$$F = \langle (2, 5, -1, 1), \, (3, 7, 0, 2) \rangle, \quad G = \langle (2, -1, 1, 0), \, (1, -3, 0, -1) \rangle.$$

(a) Determineu els subespais $F^\perp$ i $G^\perp$.

(b) Calculeu els subespais $F \cap G$, $(F \cap G)^\perp$, $F + G$ i $(F + G)^\perp$.

3.4 Siguin $F_1, \ldots, F_k$ subespais d'un espai vectorial euclidià E tals que l'únic vector $v \in E$ que és ortogonal a tots ells és $v = 0$. Demostreu que si F és un subespai de E tal que $F_i \subseteq F$ per a tot i llavors $F = E$.

3.5 Calculeu la projecció ortogonal del vector $v = (-1, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ amb el producte escalar ordinari sobre cadascun dels subespais següents:

(a) $F_1 = \langle (5, -1, 1) \rangle$.

(b) $F_2 = \langle (1, 1, -2), \, (-1, 3, 1) \rangle$.

(c) $F_3 = \langle (1, 2, 1), \, (-3, 2, -3) \rangle$.

(d) $F_4 = \langle (0, 2, -1), \, (1, 4, -1), \, (3, 2, 2) \rangle$.

(e) $F_5 = \langle (1, -1, 1), \, (0, 1, 1), \, (3, -3, 2) \rangle$.

3.6 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3 i sigui $u \in E$ vector no nul. Demostreu que l'aplicació $f \colon E \to E$ donada per $f(x) = u \wedge x$ és lineal. Calculeu el nucli i la imatge de f en termes de u.

3.7 Donat un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3, demostreu les relacions següents:

(a) $\det(u, u \wedge v, u \wedge w) = (u \cdot u) \det(u, v, w)$ per a $u, v, w \in E$ arbitraris.

(b) $\det(u \wedge w_1, u \wedge w_2, u \wedge w_3) = 0$ per a $u, w_1, w_2, w_3 \in E$ arbitraris.

3.8 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3. Considerem una base e_1, e_2, e_3 de E i definim

$$u_1 = (e_2 \wedge e_3) \wedge e_1, \qquad u_2 = (e_3 \wedge e_1) \wedge e_2, \qquad u_3 = (e_1 \wedge e_2) \wedge e_3.$$

(a) Demostreu que $\dim\langle u_1, u_2, u_3\rangle \leq 2$. (Indicació: useu la identitat de Jacobi.)

(b) Demostreu que $\dim\langle u_1, u_2, u_3\rangle = 1$ si i només si exactament un dels vectors u_i és el vector zero. (Indicació: useu la fórmula $(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$.)

(c) Demostreu que si $\dim\langle u_1, u_2, u_3\rangle = 2$ aleshores

$$(e_3 \cdot e_1)(e_3 \cdot e_2)\,(e_1 \wedge e_2) + (e_1 \cdot e_2)(e_1 \cdot e_3)\,(e_2 \wedge e_3) + (e_2 \cdot e_1)(e_2 \cdot e_3)\,(e_3 \wedge e_1)$$

és una base de $\langle u_1, u_2, u_3\rangle^{\perp}$.

3.9 Siguin u_1, u_2, u_3 tres vectors d'un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3. Definim els vectors:

$$v_1 = u_2 \wedge u_3, \qquad v_2 = u_3 \wedge u_1, \qquad v_3 = u_1 \wedge u_2.$$

(a) Demostreu que $\det(v_1, v_2, v_3) = \det(u_1, u_2, u_3)^2$ en una base ortonormal positiva qualsevol.

(b) Demostreu que

(i) $\dim\langle u_1, u_2, u_3\rangle \leq 1 \Leftrightarrow \dim\langle v_1, v_2, v_3\rangle = 0$;

(ii) $\dim\langle u_1, u_2, u_3\rangle = 2 \Leftrightarrow \dim\langle v_1, v_2, v_3\rangle = 1$;

(iii) $\dim\langle u_1, u_2, u_3\rangle = 3 \Leftrightarrow \dim\langle v_1, v_2, v_3\rangle = 3$.

3.10 Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3 i siguin e_1, e_2 dos vectors unitaris linealment independents tals que $e_1 \cdot e_2 = 1/2$. Considerem l'aplicació $f\colon E \to E$ definida per

$$f(v) = v \wedge (e_1 \wedge e_2) + (v \cdot (e_1 \wedge e_2))\, e_1 \wedge e_2.$$

(a) Demostreu que f és lineal.

(b) Demostreu que $\det(f) = \| e_1 \wedge e_2 \|^4$.

3.11 (Tardor 2016) Siguin u i v dos vectors unitaris i ortogonals d'un espai vectorial E euclidià orientat de dimensió 3. Considerem l'aplicació $\varphi\colon E \to E$ donada per

$$\varphi(x) = (x \cdot u)\, v + (x \cdot v)\, u + \det(u, v, x)\, u \wedge v.$$

(a) Demostreu que φ és lineal.

(b) Demostreu que el subespai $\langle u + v,\, u \wedge v\rangle$ està format per vectors propis de valor propi 1 i que el subespai $\langle u - v\rangle$ està format per vectors propis de valor propi -1.

(c) Trobeu la matriu de φ en la base $u, v, u \wedge v$.

3.12 (Tardor 2016) Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial euclidià de dimensió 3 tal que $f(u) \wedge f(v) = u \wedge v$ per a qualsevol parell de vectors u, v. Fixem una base ortonormal positiva e_1, e_2, e_3.

(a) Demostreu que $f(e_i) \cdot e_j = 0$ si $i \neq j$.

(b) Demostreu que $\det_{e_i}(f(e_1), f(e_2), e_3) = \det_{e_i}(f(e_2), f(e_3), e_1) = \det_{e_i}(f(e_3), f(e_1), e_2) = 1$.

(c) Deduïu dels apartats anteriors que $f(e_i) = \lambda_i e_i$ amb $\lambda_i \lambda_j = 1$ si $i \neq j$. Demostreu com a conseqüència que $f = \pm\mathrm{Id}$.