6. Desplaçaments

6.1 (Tardor 2019) Considerem una aplicació afí f d'un espai afí euclidià de dimensió 3 que en una referència ortonormal s'expressa com

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que f és un desplaçament, classifiqueu-lo i trobeu els elements geomètrics característics de f i de f^{-1}.

6.2 (Tardor 2018) Considerem el desplaçament f d'un espai afí euclidià de dimensió 3 que en una referència ortonormal s'expressa com

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Classifiqueu-lo i trobeu-ne els elements geomètrics característics. Classifiqueu f^{-8}.

6.3 Classifiqueu els desplaçaments següents de l'espai afí euclidià de dimensió 3 les equacions dels quals estan donades en un sistema de referència ortonormal, i descriviu-ne els elements geomètrics característics:

$$\begin{cases} x^* = (4/9)x - (7/9)y + (4/9)z - 2/9 \\ y^* = -(1/9)x + (4/9)y + (8/9)z + 2/9 \\ z^* = -(8/9)x - (4/9)y + (1/9)z + 1/9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^* = (\sqrt{2}/2)x + (\sqrt{2}/2)y \\ y^* = z + 1 \\ z^* = (\sqrt{2}/2)x - (\sqrt{2}/2)y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^* = (4/9)x + (4/9)y - (7/9)z + 1/9 \\ y^* = -(1/9)x + (8/9)y + (4/9)z + 5/9 \\ z^* = -(8/9)x + (1/9)y - (4/9)z \end{cases} \qquad \begin{cases} x^* = -(1/3)x - (2/3)y + (2/3)z + 1/3 \\ y^* = -(2/3)x - (1/3)y - (2/3)z + 1 \\ z^* = (2/3)x - (2/3)y - (1/3)z + 2/3 \end{cases}$$

6.4 Sigui $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ una referència d'un espai afí euclidià tal que la matriu del producte escalar en la base e_1, e_2, e_3 és

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que l'afinitat amb equacions

$$\begin{cases} x^* = -x + z \\ y^* = -y + z \\ z^* = z + 1 \end{cases}$$

és un desplaçament. Classifiqueu-lo i descriviu els seus elements geomètrics característics.

6.5 En un sistema de referència orientat $\{P; e_1, e_2\}$ en el qual la base està formada per vectors unitaris que formen un angle de $60°$, doneu les equacions del gir de centre $(1, 1)$ i angle $30°$.

6.6 Considerem a l'espai afí euclidià de dimensió 3 la simetria axial f respecte de la recta

$$r: \quad \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = z,$$

la simetria central g respecte del punt $P = (0, 1, -1)$ i la simetria especular h respecte del pla perpendicular a r que passa per P. Estudieu la composició $h \circ g \circ f$.

6.7 (Tardor 2016) Considerem les rectes r, s d'un espai afí euclidià de dimensió 3 que en una referència ortonormal tenen les equacions següents:

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2, \end{cases} \qquad s: \begin{cases} y = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

Siguin σ_r i σ_s les simetries axials respecte de les rectes r i s respectivament. Classifiqueu $\sigma_r \circ \sigma_s$ i doneu els seus elements geomètrics característics.

6.8 (Tardor 2018) En un pla afí euclidià orientat considerem tres punts p_1, p_2, p_3 que formen un triangle equilàter de costat 1 i tal que $\det(\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1p_3}) > 0$. Sigui g_i el gir de centre p_i i angle $\pi/3$ en direcció positiva. Classifiqueu $g_3 \circ g_2 \circ g_1$ i doneu els seus elements geomètrics característics.

6.9 Considerem en un espai afí euclidià de dimensió tres un sistema de referència ortonormal i les rectes que en aquesta referència tenen equacions $r: x = y = z$ i $s: x = 0, y = 1$. Siguin S_r, S_s les simetries axials respecte de les rectes r i s. Classifiqueu la composició $S_r \circ S_s$ i determineu els seus elements característics.

6.10 Considerem els plans que, en una referència ortonormal de l'espai afí euclidià de dimensió 3, tenen equacions

$$\pi: \quad x + y + z = 0, \qquad \pi': \quad x + y = 2.$$

Trobeu-ne els elements geomètrics característics i doneu les equacions de la composició $S_{\pi'} \circ S_\pi$ de les simetries especulars respecte dels plans π i π', i classifiqueu-la.

6.11 Estudieu la composició de les quatre simetries respecte dels costats consecutius d'un rectangle.

6.12 Donat un tetràedre regular $ABCD$ de $\mathbb{R}^3$, demostreu que existeix una única afinitat f tal que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$ i $f(D) = A$. Demostreu que és un desplaçament i classifiqueu-lo.

6.13 Estudieu el grup dels desplaçaments del pla que deixen invariant cadascun dels conjunts següents:

(a) un triangle (equilàter o isòsceles);

(b) un rectangle (distingiu separadament el cas d'un quadrat);

(c) dos punts.

6.14 Estudieu el grup dels desplaçaments de l'espai que deixen invariant cadascun dels conjunts següents:

(a) un rectangle (un quadrat) i un punt no situat al mateix pla;

(b) un pla i dos punts diferents no situats sobre el pla.

6.15 En un espai afí euclidià es consideren un pla π i una recta r no paral·lela ni perpendicular al pla π. Determineu i classifiqueu els desplaçaments f tals que $f(r) = r$ i $f(\pi) = \pi$.

6.16 Considereu el desplaçament de l'espai que en un sistema de referència ortonormal té les equacions

$$\begin{cases} x^* = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z \\ y^* = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}y + \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}z + \dfrac{3}{2} \\ z^* = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}y + \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}z + \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Classifiqueu-lo i trobeu els seus elements geomètrics característics.

6.17 Sigui $ABCD$ un rectangle del pla afí euclidià.

(a) Trieu una referència i determineu les equacions de les afinitats f tals que $f(A) = B$ i $f(B) = C$.

(b) En quins casos hi ha desplaçaments en aquesta família d'afinitats? En cas que n'hi hagi, classifiqueu-los i doneu-ne els elements geomètrics característics.

6.18 Sigui f un desplaçament d'un espai afí euclidià de dimensió 3 que en una certa referència ortonormal té les equacions següents:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} + 1 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Classifiqueu f i trobeu els seus elements geomètrics característics.

(b) Quina és la distància $d(p, f(p))$ més petita que es pot obtenir variant el punt p? Quin és el valor d'aquesta distància?

6.19 (Tardor 2019) En un espai afí euclidià de dimensió 3 amb una referència ortonormal fixada, es considera una rotació T que deixa fix l'origen $(0,0,0)$ i transforma els punts de coordenades $(1,0,0)$ i $(0,1,0)$ en $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$ respectivament.

(a) Determineu l'eix de rotació de T.

(b) Calculeu la matriu de T en el sistema de referència donat.

(c) Doneu els elements geomètrics característics de T.

6.20 (Primavera 2020)

(a) Siguin $P = (p_1, p_2)$ i $Q = (q_1, q_2)$ dos punts del pla afí euclidià estàndard $\mathbb{R}^2$ expressats en un sistema de referència ortonormal. Trobeu les coordenades dels dos punts R i S per als quals els triangles PQR i PQS són equilàters.

(b) Donat un triangle ABC al pla $\mathbb{R}^2$, dibuixem tres triangles exteriors equilàters ABF, ACE i BCD sobre els tres costats de ABC. Demostreu que els baricentres dels triangles ABF, ACE i BCD formen un triangle equilàter.