Topologia i Geometria Global de Superfícies

Curs 2021–2022

Llista 6: Curvatura

1. En el quadrant positiu $\mathbb{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$ considerem la mètrica de Riemann amb coeficients

$$g_{11} = g_{22} = \frac{x^2 + y^2}{x^2\, y^2}, \qquad g_{12} = g_{21} = 0.$$

   (a) Demostreu que la recta $x = y$ és la imatge d'una geodèsica a $\mathbb{P}$.

   (b) Calculeu la longitud de la corba $\gamma(t) = (t, t)$ entre els punts $(1, 1)$ i $(2, 2)$.

   (c) Calculeu la curvatura de Gauss de $(\mathbb{P}, g)$.

   (d) Si $\mathbb{H}^2$ és el semiplà de Poincaré, demostreu que l'aplicació $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{H}^2$ donada per $f(x, y) = (x^2 - y^2,\ 2xy)$ és una isometria.

2. Sigui M el subconjunt de $\mathbb{R}^3$ definit per $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ amb $z > 0$.

   (a) Demostreu que M és una subvarietat diferenciable de $\mathbb{R}^3$ i que si

$$\phi(u, v) = (\cos v\, \sinh u,\ \sin v\, \sinh u,\ \cosh u), \quad u > 0,\ 0 < v < 2\pi,$$

   aleshores ϕ^{-1} és l'aplicació de coordenades d'una carta local a M.

   (b) Sigui g la restricció a M de la 2-forma $dx^2 + dy^2 - dz^2$ de $\mathbb{R}^3$. Demostreu que g és una mètrica de Riemann a M i que l'expressió local de g en la carta local de l'apartat anterior és $du^2 + (\sinh u)^2\, dv^2$.

   (c) Demostreu que M té curvatura de Gauss constant -1.

3. Considerem l'esfera S^2 amb la mètrica induïda per la mètrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Siguin ABC i $A'B'C'$ dos triangles geodèsics amb costats respectius a, b, c i a', b', c'. Demostreu que, si $a = a'$, $b = b'$ i $c = c'$, llavors existeix una única isometria $f\colon S^2 \to S^2$ tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ i $f(C) = C'$.

   (b) Demostreu que, si Σ és la suma dels angles interiors d'un triangle geodèsic no degenerat a S^2, llavors $\pi < \Sigma < 3\pi$.

   (c) Demostreu que si un triangle geodèsic a S^2 té costats a, b, c i angles α, β, γ, llavors es compleixen les *lleis trigonomètriques esfèriques:*

$$\begin{aligned} \sin a\, \cos\beta &= \cos b\, \sin c - \sin b\, \cos c\, \cos\alpha \\ \sin a\, \sin\beta &= \sin b\, \sin\alpha \\ \cos a &= \cos b\, \cos c + \sin b\, \sin c\, \cos\alpha. \end{aligned}$$

   (d) Demostreu que si α, β, γ són nombres positius tals que $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$ llavors existeix algun triangle geodèsic a S^2 amb angles interiors α, β, γ.

4. Considerem el semiplà de Poincaré $\mathbb{H}^2$ amb la mètrica hiperbòlica.

   (a) Siguin ABC i $A'B'C'$ dos triangles geodèsics amb costats respectius a, b, c i a', b', c'. Demostreu que, si $a = a'$, $b = b'$ i $c = c'$, llavors existeix una única isometria $f\colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ i $f(C) = C'$.

   (b) Demostreu que, si Σ és la suma dels angles interiors d'un triangle geodèsic no degenerat a $\mathbb{H}^2$, llavors $\Sigma < \pi$.

   (c) Demostreu que si un triangle geodèsic a $\mathbb{H}^2$ té costats a, b, c i angles α, β, γ, llavors es compleixen les *lleis trigonomètriques hiperbòliques:*

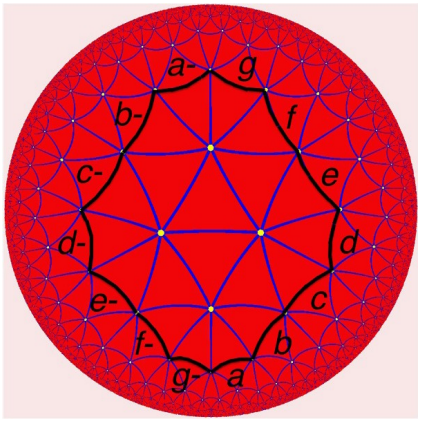
$$\cosh a = \cosh b \, \cosh c - \sinh b \, \sinh c \, \cos \alpha$$
$$\cos \alpha = -\cos \beta \, \cos \gamma + \sin \beta \, \sin \gamma \, \cosh a.$$

   (d) Demostreu que si α, β, γ són nombres positius tals que $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ llavors existeix algun triangle geodèsic a $\mathbb{H}^2$ amb angles interiors α, β, γ.

   (e) Siguin ABC i $A'B'C'$ dos triangles geodèsics amb angles respectius α, β, γ i α', β', γ'. Demostreu que, si $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$, llavors existeix una única isometria $f\colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ i $f(C) = C'$.

5. Considerem el disc de Beltrami–Poincaré $\mathbb{D}^2$ amb la mètrica hiperbòlica i amb la triangulació infinita per triangles geodèsics representada en la figura següent.

   (a) Classifiqueu la superfície S obtinguda identificant els costats del polígon geodèsic següent tal com indiquen les lletres de la figura.



   (b) Formen una triangulació de S els triangles de la figura?

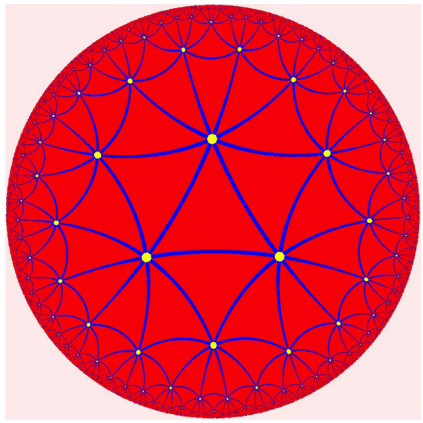
   (c) Demostreu que, si P i Q són els vèrtexs resultants de les identificacions de costats indicades a la figura, llavors la mètrica de $\mathbb{D}^2$ indueix una mètrica de Riemann a $S \setminus \{P, Q\}$.

   (d) Calculeu la curvatura de Gauss de $S \setminus \{P, Q\}$.

   (e) Trobeu l'àrea de $S \setminus \{P, Q\}$.

   (f) Trobeu les longituds dels costats dels triangles de S.

6. Considerem la triangulació infinita de $\mathbb{D}^2$ representada en la figura següent:



   (a) Trobeu un polígon geodèsic d'aquesta triangulació i una identificació de costats tal que la superfície S' obtinguda sigui homeomorfa a la superfície S de l'exercici anterior.

   (b) Demostreu que, si P' i Q' són els vèrtexs resultants de les identificacions de costats de l'apartat (b), llavors la mètrica de $\mathbb{D}^2$ indueix una mètrica de Riemann a $S' \setminus \{P', Q'\}$.

   (c) Calculeu la curvatura de Gauss de $S' \setminus \{P', Q'\}$.

   (c) Trobeu l'àrea de $S' \setminus \{P', Q'\}$.

   (e) Demostreu que $S \setminus \{P, Q\}$ i $S' \setminus \{P', Q'\}$ són superfícies de Riemann localment isomètriques, però no isomètriques.

   (f) Trobeu les longituds dels costats dels triangles de S'.

7. Sigui S una superfície de Riemann compacta i orientable i sigui $K(p)$ la curvatura de Gauss de S en cada punt $p \in S$.

   (a) Demostreu que si $K(p) \geq 0$ per a tot $p \in S$ i existeix un punt p_0 en el qual $K(p_0) > 0$ llavors S és homeomorfa a una esfera.

   (b) Demostreu que si $K(p) = 0$ per a tot $p \in S$ llavors S és homeomorfa a un tor.

   (c) Demostreu que si $K(p) \leq 0$ per a tot $p \in S$ i existeix un punt p_0 en el qual $K(p_0) < 0$ llavors S és una superfície de gènere $g > 1$.

8. Sigui S una superfície de Riemann orientable de curvatura constant K i sigui P un polígon geodèsic de n costats contingut en un entorn coordenat de S. Demostreu que, si denotem per Σ la suma dels angles interiors de P, llavors

$$\begin{aligned} \Sigma &> (n-2)\pi \quad \text{si } K > 0, \\ \Sigma &= (n-2)\pi \quad \text{si } K = 0, \\ \Sigma &< (n-2)\pi \quad \text{si } K < 0. \end{aligned}$$