GEOMETRIA DIFERENCIAL DE CORBES I SUPERFíCIES

Problemes curs 2018-2019. Semestre Primavera.

Superfícies. Primera forma fonamental

Superfícies parametritzades

Exercici 1. *(Con circular.)* Sigui ω constant, $0 < \omega < \dfrac{\pi}{2}$. Proveu que

$$\varphi(u,v) = u(\sin\omega\cos v, \sin\omega\sin v, \cos\omega), u \neq 0, v \in \mathbb{R}$$

és una superfície parametritzada regular i la seva traça és

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = z^2\tan^2\omega\} \setminus \{(0,0,0)\},$$

el con circular menys el vèrtex. Proveu que tots els plans tangents passen pel vèrtex i les normals tallen l'eix OZ formant un angle constant.

Exercici 2. Siguin $a, b, c > 0$. Proveu que

$$\varphi(u,v) = (a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u), \quad u \in \mathbb{R},\ 0 < v < 2\pi$$

és una superfície parametritzada regular i la seva traça está continguda en la quàdrica d'equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Trobeu la intersecció d'aquesta superfície amb el pla $z = 0$ i proveu que els plans tangents de φ en aquests punts són verticals.

Exercici 3. (i) Proveu que si totes les rectes normals d'una superfície parametritzada regular connexa són paral·les a una direcció fixa, llavors la traça d'aquesta superfície està continguda en un pla.

(ii) Proveu que si totes les rectes normals afins d'una superfície parametritzada regular connexa passen per un punt fix, llavors la traça d'aquesta superfície està continguda en una esfera.

Superfícies regulars

Exercici 4. Proveu que el subconjunt S de $\mathbb{R}^3$ definit per l' equació $(x-y)^3 + y^5 + (z+x)^4 = 2$ és una superfície regular. Proveu que el punt $P = (1,1,0)$ és de S i trobeu el pla tangent a S en P.

Exercici 5. Sigui S el paraboloide hiperbòlic d'equació $z = x^2 - y^2$.

(i) Proveu que S és una superfície regular i que

$$\begin{aligned}\varphi(u,v) =& (u+v, u-v, 4uv),\\ \psi(s,t) =& (s\cosh t, s\sinh t, s^2),\ s \neq 0\end{aligned}$$

són cartes de S.

(ii) Determineu el canvi de paràmetres $h = \varphi^{-1} \circ \psi$.

Exercici 6. Siguin $a \neq 0$ i S el subconjunt de $\mathbb{R}^3$ definit per l'equació

$$x\sin\frac{z}{a} = y\cos\frac{z}{a}$$

(i) Proveu que S és una superfície regular.

(ii) Proveu que

$$\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av), (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

és una carta global de S. (És a dir, S és un helicoide recte.)

Exercici 7. Considerem el següent subconjunt de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + 1\}.$$

(1) Demostreu que S és una superfície regular.
(2) Demostreu que per a tot $\theta \in \mathbb{R}$ l'aplicació $\phi_\theta : (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$\phi_\theta(u, v) = (\cos(\theta + u), \sin(\theta + u), 0) + v(-\sin(\theta + u), \cos(\theta + u), 1))$$

és una carta de S, i trobeu $\theta_1, \ldots, \theta_k$ de manera que

$$S = \phi_{\theta_1}((-\pi, \pi) \times \mathbb{R}) \cup \cdots \cup \phi_{\theta_k}((-\pi, \pi) \times \mathbb{R}).$$

(3) Demostreu que per a cada punt $p \in S$ es poden trobar dues rectes diferents $r_1, r_2 \subset S$ tals que $p \in r_1 \cap r_2$.

Exercici 8. Considerem l'aplicació $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donada per

$$\phi(u, v) = (\cos u \cdot e^v, \sin u \cdot e^v, e^v).$$

(1) Proveu que ϕ defineix una superfície parametritzada regular i trobeu l'expressió de la primera forma fonamental.
(2) Proveu que la traça de ϕ està continguda en

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x^2 + y^2 = z^2\}.$$

(3) Proveu que el pla tangent afí $T_p\phi$ conté l'origen per a tot $p \in \phi(\mathbb{R}^2)$.
(4) Trobeu la longitud de la corba $u = \sqrt{2}v$ entre $\phi(0, 0)$ i $\phi(2, \sqrt{2})$.
(5) Trobeu el cosinus de l'angle amb que es tallen les corbes $u + v = 2$ i $v = u^2$ en el punt $\phi(1, 1)$.

Exercici 9. Siguin $a > b > c > 0$ nombres reals, i sigui

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax^2 + by^2 + cz^2 = 1\}.$$

(1) Demostreu que S és una superfície regular.
(2) Sigui $D_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + by^2 < 1\}$ i sigui

$$\phi : D_{a,b} \to \mathbb{R}^3, \qquad \phi(u, v) = \left(u, v, \sqrt{\frac{1 - au^2 - bv^2}{c}}\right).$$

Demostreu que ϕ és una parametrització regular local de S.

Primera Forma fonamental. Longitud i angles

Exercici 10. Siguin S la superfície regular d'equació $z^2 + y - x^3 = 0$, φ la parametrització de S definida per $\varphi(u, v) = (u, u^3 - v^2, v)$, i $\alpha(t) = (e^t, e^{3t} - t^2, t)$.

(i) Proveu que la corba parametritzada α està continguda en S i trobeu les coordenades de α respecte de φ.
(ii) Trobeu les components de α' en la base φ_u, φ_v del pla tangent a S. Existeix algun punt de α en que α' sigui paral·lel a φ_u?

Exercici 11. Sigui $\varphi(u, v) = (a \cos v, a \sin v, u)$, per a tot $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

(1) Proveu que φ és una superfície parametritzada regular tal que la seva traça és el cilindre $x^2 + y^2 = a^2$.
(2) Trobeu els coeficients de la primera forma fonamental.
(3) Proveu que la traça de l'hèlice $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ està continguda dins la imatge φ i trobeu funcions u, v tal que $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$.
(4) Trobeu la longitud de la corba α de l'apartat anterior entre $t = 0$ i $t = 2\pi$ utilitzant la primera forma fonamental.

Exercici 12. Sigui φ la superfície parametritzada regular

$$\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2), \quad 0 < u, 0 < v < 2\pi.$$

(i) Trobeu els coeficients E, F i G de la primera forma fonamental.
(ii) Trobeu l'angle que formen les corbes $v = u + 1$, $v = 3 - u$ en el seu punt de contacte.
(iii) Trobeu la longitud de la corba $u = 3$, per a v tal que $\dfrac{\pi}{2} \leq v \leq \pi$.

Exercici 13. Sigui φ la superfície parametritzada regular

$$\varphi(u,v) = R(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u), \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, -\pi < v < \pi.$$

(i) Trobeu els coeficients E, F i G de la primera forma fonamental.
(ii) Trobeu el cosinus de l'angle que forma la corba $v = 2u$ amb els meridians. Determineu en quins punts el valor de l'angle és $\frac{\pi}{4}$.
(iii) Trobeu l'expressió de la longitud de la corba $v = 2u$, entre $(0,0)$ i $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Exercici 14. Sigui φ una superfície parametritzada regular tal que $E = 1 + v^2$, $F = 0$, $G = e^v$ i siguin C_1, C_2 les corbes sobre S d'equacions respectives $u + v = 2$, $v = u^2$. Trobeu el cosinus de l'angle que formen C_1 i C_2 en els dos punts de tall.

Exercici 15. S'anomenen *loxodromes* d'una superfície de revolució

$$\varphi(u,v) = (a(u)\cos v, a(u)\sin v, b(u))$$

les corbes $\beta(t) = (u(t), v(t))$ que tallen els meridians $v = v_0$ sota un angle constant.

(i) Proveu que, si l'angle de tall és $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$, la loxodroma es pot parametritzar en la forma $v = v(u)$, on v satisfà l'equació diferencial

$$\pm v'(u) = \tan\theta \frac{c(u)}{a(u)},$$

essent $c(u) = \sqrt{(a'(u))^2 + (b'(u)^2)}$.
(ii) Proveu que les loxodromes del cilindre d'equació $x^2 + y^2 = R^2$ són les hèlices.

Exercici 16. Proveu que les loxodromes d'angle θ sobre el con circular

$$\varphi(u,v) = u(\sin\alpha\cos v, \sin\alpha\sin v, \cos\alpha), u > 0$$

amb ω constant, $0 < \omega < \dfrac{\pi}{2}$, tenen per equació

$$u = Ae^{\pm v\sin\alpha\cot\omega}.$$

Exercici 17. Trobeu la longitud des de l'equador fins el pol d'una loxodroma d'angle θ $(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ sobre l' esfera.

Exercici 18. *(Tor.)* Siguin r i a constants tals que $0 < r < a$. Proveu que en fer girar la circumferència $\alpha(u) = (a + r\cos u, 0, r\sin u)$ al voltant de l'eix OZ s'obté la superfície parametritzada regular

$$\varphi(u,v) = ((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

con $-\pi < u < \pi$, $-\pi < v < \pi$, anomenada *tor*.

(i) Trobeu els coeficients de la primera forma fonamental de φ
(ii) Trobeu el cosinus de l'angle de tall del paral·lel $u = 0$ amb la corba $v = \sin 2u$

Superfícies reglades i desenvolupables

Exercici 19. Determineu la superfície cònica amb vèrtex en el punt $(0,0,1)$ i directriu la paràbola $z = 0, y = x^2$.

Exercici 20. Trobeu les equacions de la superfície reglada engendrada per una recta que, es mou paral·lelament al plan $x + y + z = 7$ i que interseca en tot moment la corba d'equacions $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, i l'eix Oz.

Exercici 21. Trobeu la superfície reglada que té per generatrius les rectes que intersequen les rectes $\{x = 0, z + a = 0\}$, $\{y = 0, z = a\}$ i la circumferència $\{x^2 + y^2 = r^2, z = 0\}$.

Exercici 22. *(Helicoide recte.)* Sigui φ l'helicoide (recte) definit per

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

(a) Proveu que φ és una superfície reglada amb generatrius $v = v_0$.
(b) Proveu que el plan tangent a φ al llarg d'una generatriu $v = v_0$ conté aquesta generatriu, i si $\theta(u)$ denota l'angle que forma el pla tangent a φ en un punt (u, v_0) de la generatriu amb l'eix Oz, llavors $\tan \theta(u)$ és proporcional a la distància u del punt $\varphi(u, v_0)$ a l'eix Oz.
(c) Proveu que φ és una superfície no cilíndrica i trobeu el seu paràmetre de distribució així com la seva línia d'estricció.

Exercici 23. Proveu que les següents superfícies reglades són no cilíndriques i trobeu-ne el paràmetre de distribució i la línia d'estricció

(i) El paraboloide hiperbòlic $z = axy$ amb $\varphi(u, v) = (u, 0, 0) + v(0, 1, au)$.
(ii) L'hiperboloide d'un full $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ amb $\varphi(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v)$.
(iii) El conoide $\varphi(u, v) = (v \cos u \sin \theta, v \sin u \sin \theta, v \cos \theta + au)$.

Exercici 24. Siguin $p(t)$, $q(t)$ dos punts mòbils de l'espai que es mouen a la mateixa velocitat escalar, el primer en una direcció paral·lela a l'eix Oz, partint de $(0, 0, 0)$, i el segon en una direcció paral·lela a l'eix Oy, partint de $(a, 0, 0)$, amb $a \neq 0$.

(i) Proveu que la recta que uneix $p(t)$ amb $q(t)$ descriu un conjunt S en $\mathbb{R}^3$ donat per $y(x-a)+zx = 0$.
(ii) Trobeu una parametrització regular de S com superfície reglada. Proveu que és no cilíndrica i determineu el seu paràmetre de distribució i la seva línia d'estricció.