GEOMETRIA DIFERENCIAL DE CORBES I SUPERFíCIES

Problemes curs 2018-2019. Semestre Primavera.
Geometria de l'aplicació de Gauss

Curvatura de Gauss i curvatura media

Exercici 1. Sigui V un obert de $\mathbb{R}^3$, S una superfície regular continguda a V, i $F : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació diferenciable. Demostreu que la restricció $f := F|_S : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és diferenciable. A més, per a tot $p \in S$

$$d_p f = (d_p F)_{|T_p S}.$$

Aplicació del resultat anterior: Siguin V un obert de $\mathbb{R}^3$, $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable, $a \in f(V)$ un valor regular de f i $S = f^{-1}(a)$. Demostreu que $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida per

$$N(\mathbf{x}) = \frac{\text{grad } f(\mathbf{x})}{|\text{grad } f(\mathbf{x})|}$$

és una aplicació diferenciable tal que $N(\mathbf{x})$ és un vector normal unitari de S en $\mathbf{x}$, per a tot $\mathbf{x} \in S$.

Exercici 2. Proveu que la diferencial de l'aplicació normal d'un pla o d'una esfera és una homotècia amb raó constant.

Recíprocament, proveu que si S és una superfície connexa tal que la diferencial de N en cada punt és una homotècia, aleshores la raó de la homotècia no depèn del punt i S està continguda en un pla o en una esfera.

Exercici 3. Sigui S la gràfica de $z = x^2 + ay^2 - y^3$, i $p = (0, 0, 0) \in S$. Classifiqueu, segons les curvatures media i de Gauss, el punt p en funció del paràmetre $a \in \mathbb{R}$.

Exercici 4. Sigui S la gràfica d'una funció $z = h(x, y)$ tal que $h(0, 0) = 0$ i $dh_{(0,0)} = 0$. Sigui $p = (0, 0, 0)$ i suposem que S està orientada de manera que $N(p) = (0, 0, 1)$. Proveu que, en la base $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ de T_pS, la matriu de l'endomorfisme d_pN és la matriu hessiana de $-h$ en $(0, 0)$.

Exercici 5. Classifiqueu, segons les curvatures media i de Gauss, els punts de les superfícies següents:

$$\text{(i) } zx = 1, \qquad \text{(ii) } z = xy, \qquad \text{(iii) } z = x^2,$$
$$\text{(iv) } z = x^2y - y^3, \qquad \text{(v) } z = x^2y + y^3, \qquad \text{(vi) } z = \cos x + \sin y.$$

Exercici 6. Sigui S una superfície de revolució i suposem que

$$\varphi(u, v) = (a(u)\cos v, a(u)\sin v, b(u)), \quad u_0 < u < u_1,\ 0 < v < 2\pi, \quad a(u) > 0,$$

és una carta de S. Notem $c(u) = \|(a'(u), b'(u))\|$. Sigui $\alpha(u) = (a(u), 0, b(u))$. Proveu les següents fórmules

$$k_1(u, v) = \frac{a'b'' - a''b'}{c^3}(u) = k_\alpha(u), \quad k_2 = \frac{b'}{ac}, \quad K = \frac{b'\,(a'b'' - a''b')}{ac^4}, \quad H = \frac{a'b'' - a''b'}{2c^3} + \frac{b'}{2ac}$$

on $k_\alpha(u)$ és la curvatura de α. Concloure que $K(\varphi(u, v)) = 0$ si $k_\alpha(u) = 0$, en canvi si $k_\alpha(u) \neq 0$, el signe de $K(\varphi(u, v))$ depèn de la concavitat de la corba $\alpha(u) = (a(u), 0, b(u))$ en relació a l'eix Oz (si la posició relativa és $(|$, $K > 0$, i si la posició relativa es $)|$, llavors $K < 0$) . Proveu que els punts d'inflexió de la corba α tals que la tangent és horitzontal formen un paral·lel de punts plans.

Exercici 7. Classifiqueu els punts del tor d'equació $(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$, on R y r són constants tals que $R > r > 0$. Comproveu que els punts en que la curvatura de Gauss és nul·la són els paral·lels superior i inferior. Comproveu que aquests paral·lels divideixen el tor en dues components una de les quals, la definida per $x^2 + y^2 > R^2$, és el·líptica i l'altra, la definida per $x^2 + y^2 < R^2$, és hiperbólica.

Exercici 8. Classifiqueu, segons les curvatures media i de Gauss, els punts de la superfície generada en fer girar al voltant de l'eix OZ la corba $x = \sin z + 2$ del pla $y = 0$.

Exercici 9. Classifiqueu els punts de les següents quàdriques de revolució segons les curvatures de Gauss i media. Proveu que cada una d'aquestes quàdriques té punts d'un sol tipus.

(i) Con $\{x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha\} \setminus \{\mathbf{0}\}$, con $\tan \alpha > 0$.
(ii) Cilindre $x^2 + y^2 = R^2$, amb $R > 0$.
(iii) Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, amb $R > 0$.
(iv) Paraboloide el·líptic $2pz = x^2 + y^2$ amb $p > 0$.
(v) Hiperboloide d'una fulla o hiperbòlic $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha + 1$, $\tan \alpha > 0$.
(vi) Hiperbolide de dues fulles o el·líptic $x^2 + y^2 = -z^2 \tan^2 \alpha + 1$, $\tan \alpha > 0$.

Exercici 10. Proveu que la pseudoesfera de pseudoradi $R > 0$ té curvatura de Gauss igual a $-\dfrac{1}{R^2}$. La pseudoesfera ve donada per:

$$\varphi(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R(\log \tan \frac{u}{2} + \cos u)). \quad u \in (0, \pi), \quad v \in (0, 2\pi)$$

Exercici 11. Proveu que el catenoide, que és la superfície de revolució generada por la catenaria $x = R \cosh \dfrac{z}{R}$, $y = 0$, amb $R \neq 0$, al girar al voltant de l'eix Oz, té curvatura media nul·la.

$$\varphi(u, v) = R(\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \quad u \in \mathbb{R},\ 0 < v < 2\pi,$$

Exercici 12. Proveu que si un pla és tangent a una superfície regular orientable al llarg d'una corba, llavors els punts d'aquesta corba tenen curvatura de Gauss nul·la. Concloure a partir d'això que les superfícies desenvolupables tenen curvatura de Gauss igual a zero.

Exercici 13. (1) Sigui φ una carta d'una superfície S. Proveu que la condició de punt umbilical en coordenadas és $\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G}$.

(2) Proveu que en una gràfica $z = h(x, y)$, per a la carta $\varphi(u, v) = (u, v, h(u, v))$ tenim

$$I_\varphi = \begin{pmatrix} 1 + h_u^2 & h_u h_v \\ h_u h_v & 1 + h_v^2 \end{pmatrix}, \quad II_\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}} d^2 h$$

Per tant, l'equació dels punts umbilicales és: $\frac{h_{uu}}{1+h_u^2} = \frac{h_{uv}}{h_u h_v} = \frac{h_{vv}}{1+h_v^2}$

(3) Trobeu els punts umbilicals de la superfície $z = x^2 + y^2$.

Exercici 14. Sigui S una superfície regular orientable. Proveu que si $\alpha : I \longrightarrow S$ és una corba 1-regular de S formada per punts plans de S llavors α és una corba plana. Exemple: sobre $\varphi(u, v) = ((1 + u) \cos v, v(1 + u) \sin v, u^4)$ la corba coordenada $u = 1$ està formada per punts plans .

Exercici 15. *Superfícies reglades no cilíndriques i curvatura de Gauss.* Sigui $\varphi(u, v) = \alpha(u) + v \cdot w(u)$ una superfície reglada no cilíndrica tal que $|w| = 1$ i $\langle \alpha', w' \rangle = 0$. Sigui $\lambda = \frac{[\alpha', w, w']}{|w'|^2}$.

(i) Trobeu la primera forma fonamental de φ i proveu que $EG - F^2 = (\lambda^2 + v^2)|w'|^2$.
(ii) Trobeu els coeficients f y g de la segona forma fonamental i proveu que $K(u, v) = -\frac{\lambda^2(u)}{(\lambda^2(u)+v^2)^2}$.
(iii) Proveu que si S és una superfície el·líptica llavors S no pot ser reglada.

Exercici 16. Trobeu la curvatura de Gauss i la curvatura mèdia de l'helicoide recte $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$.

Exercici 17. Siguin S y M les superfícies definides respectivamente per les cartes

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u), \quad 0 < u,\ 0 < v < 2\pi$$
$$\psi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \quad 0 < u,\ 0 < v < 2\pi.$$

Proveu que l'expressió de la curvatura de Gauss en les coordenades (u, v) de ambdues superfícies és la mateixa, però no tenen els mateixos coeficients de la primera forma fonamental.

Exercici 18. Proveu que si tots els plans tangents a una superfície S passen per un punt fix, llavors la curvatura de Gauss de S és zero. Doneu un exemple d'una superfície d'aquest tipus que no sigui un pla.

Curvatura normal

Exercici 19. Siguin S el cilindre d'equació $x^2 + y^2 = R^2$, $P = (R, 0, 0)$, $\mathbf{v}_\theta = (0, \cos\theta, \sin\theta)$, π_θ el pla $P + Gen(\mathbf{v}_\theta, N(p))$ i C_θ la corba intersecció de π_θ amb S. Trobeu la curvatura normal de C_θ respecte de S en el punt P i determineu per a quins valors de θ aquesta curvatura normal assoleix els seus valors extrems.

Exercici 20. Siguin $S = \{x + y = z^3 + 1\}$ i $p = (1, 1, 1)$. Determineu per a quin valor de $a \in \mathbb{R}$, el vector $\vec{v} = (a, 3, 1)$ és tangent a S en p, i trobeu en aquest cas la curvatura normal de S en p en la direcció de $\vec{v}$.

Exercici 21. Sigui S la superfície de revolució generada per la corba

$$z = \sin\log x\ , \quad y = 0$$

en girar al voltant de l'eix Oz. Sigui $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, \sin t)$. Proveu que α está sobre S i trobeu la curvatura normal de α respecte de S en els punts $t = 0, \pi/2$.

Línies de curvatura i asimptótiques

Exercici 22. Trobeu les línies de curvatura i les línies asimptòtiques de l' helicoide recte.

Exercici 23. Trobeu les línies asimptòtiques del paraboloide $z = xy$.

Exercici 24. Proveu que si un pla talla una superfície S al llarg d'una corba C sota un angle constant, llavors C es línia de curvatura de S.

Exercici 25. Trobeu les línies asimptòtiques de l'embut logarítmic, que és la superfície de revolució generada per la corba $z = \log x$, amb $x > 0$, en el pla $y = 0$, al girar al voltant de l'eix Oz:

$$\varphi(u, v) = (u\cos v, u\sin v, \log u), \quad 0 < u,\ 0 < v < 2\pi.$$

Exercici 26. Sigui $\varphi(u, v)$ una parametrització global d'una superfície regular S tal que

$$I_\varphi = \begin{pmatrix} 4u^2 & 0 \\ 0 & 1 + u^4 \end{pmatrix} \quad , \qquad II_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2u}{\sqrt{1+u^4}} \\ \frac{-2u}{\sqrt{1+u^4}} & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Clasifiqueu, segons les curvatures media i de Gauss, els punts de la superfície.
(ii) Trobeu la curvatura normal de $u = v$.
(iii) És $u = v$ una línia de curvatura? i asimptòtica?
(iv) Trobeu les línies asimptòtiques de S.

Exercici 27. Proveu que si C és una corba asimptòtica 2-regular d'una superfície S, llavors $|\tau| = \sqrt{-K}$

Geodésiques. Curvatura geodèsica. Càlculs amb la II

Exercici 28. Trobeu la la curvatura geodèsica d'una circumferència de radi r en una esfera de radi R.

Exercici 29. Proveu que si dues superfícies són tangents al llarg d'una corba C, i aquesta corba és geodèsica d'una d'elles llavors també ho és de l'altra.

Exercici 30. Considerem el tor de revolució generat per la rotació del cercle

$$(x-a)^2 + z^2 = r^2, y = 0,$$

al voltant de l'eix Oz, $(a > r > 0)$. Els paral·lels generats pels punts $(a+r, 0)$, $(a-r, 0)$, (a, r) se denominen, respectivament, el paral·lel màxim, el paral·lel mínim i el paral·lel superior. Comproveu quin d'aquests paral·lels és

(i) Una geodèsica.
(ii) Una corba asimptòtica.
(iii) Una línia de curvatura.

Exercici 31. Trobeu la curvatura geodèsica de les hèlixs $t \mapsto (R\cos t, R\sin t, bt)$ d'un cilindre circular $x^2 + y^2 = R^2$.

Exercici 32. Trobeu la curvatura geodèsica de les hèlixs $u =$ cte de l'helicoide recte

$$\varphi(u, v) = (u\cos v, u\sin v, av) \quad .$$

Exercici 33. Trobeu la curvatura geodèsica dels paral·lels d'una superfície de revolució.

Símbols de Christoffel. Teorema de Gauss

Exercici 34. Proveu que els símbols de Christoffel de la superfície de revolució:

$$\varphi(u, v) = (a(u)\cos v, a(u)\sin v, b(u)), \quad u_0 < u < u_1,\ 0 < v < 2\pi$$

satisfan

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c'}{c} & 0 & -\frac{aa'}{c^2} \\ 0 & \frac{a'}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

on $c = \sqrt{a'^2 + b'^2}$.

Exercici 35. Proveu que si E i F només depenen de u i G és constant, llavors $K = 0$.

Exercici 36. Proveu que si φ és una parametrització tal que $E = G = 1$, $F(u, v) = \cos\theta(u, v)$, llavors

$$K = -\frac{\theta_{uv}}{\sin\theta}.$$

Exercici 37. Proveu que si φ és una parametrització isoterma, és a dir , si $E = G = \lambda(u, v)$ i $F = 0$, llavors

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\Delta(\log\lambda),$$

on $\Delta\lambda$ representa el laplacià $\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial v^2}$ de la función λ.

Apliqueu aquesta fórmula per a provar que si la primera forma fundamental d'una superfície té la forma

$$E = G = \frac{1}{(u^2 + v^2 + c^2)^2}, \quad F = 0$$

llavors la curvatura de Gauss és constant.

Exercici 38. Siguin S i M les superfícies definides respectivament per les cartes

$$\begin{aligned}\varphi(u,v) =&(u\cos v, u\sin v, \log u), \quad 0<u,\ 0<v<2\pi\\ \psi(u,v) =&(u\cos v, u\sin v, v)\,, \quad 0<u,\ 0<v<2\pi.\end{aligned}$$

Proveu que les curvatures de S i M coincideixen però els coeficients de la primera forma fundamental no.

Exercici 39. Sigui φ tal que $F=0$, $G=e^{2\lambda(u)+2\mu(v)}$, $\Gamma^1_{11}=\Gamma^2_{11}=0$. Proveu que E és constant i trobeu K.

Teorema fonamental de la teoría de superfícies

Exercici 40. Existeix alguna superfície $\varphi(u,v)$ tal que

$$E=1, F=0, G=\cos^2 u, \quad e=\cos^2 u, f=0, g=1?.$$

Exercici 41. Proveu que existeix una superfície regular S que admet una parametrització $\varphi(u,v)$ tal que

$$E=4u^2, F=0, G=1+u^4, e=0, f=-\frac{2u}{\sqrt{1+u^4}}, g=0.$$

Exercici 42. Suposem que una superfície S admet una parametrització $\varphi(u,v)$ tal que $E=2$, $F=0$, $e=1$, $g=1$, i les corbes de les famílies $\{u+v=cte\}$, $\{u-v=cte\}$ es tallen ortogonalment. Trobeu G, f i K.

Exercici 43. Suposem que una superfície S admet una parametrització $\varphi(u,v)$ tal que $E=G=1$, $F=0$, i $f=g=0$. Proveu que $\varphi_{uv}=\varphi_{vv}=0$ i concloure que S és desenvolupable de tipus cilíndric. Proveu que, si a més $e=1$, la superfície és un cilindre circular de radi 1.

Exercici 44. Si E, F, i G són constants què es pot dir sobre K?, i sobre H?

Exercici 45. Pot existir una superfície S de $\mathbb{R}^3$ tal que $H=0$, $K=-1$? Raoneu la resposta.

Exercici 46. Sigui φ tal que $E=1+v^2$, $F=0$, $G=1$, i les corbes coordenades són asimptòtiques. Trobeu K i els coeficients e, f i g de la segona forma fonamental. Proveu que φ és una superfície reglada tal que la seva línia d'estricció és una recta i el seu paràmetre de distribució és constant. Proveu que φ és un helicoide recte.

Exercici 47. Sigui S una superfície regular sense punts umbilicals. Suposem que $\varphi: U \longrightarrow S$ és una carta global de S tal que les corbes coordenades són línies de curvatura, i a més les corbes coordenades $v=cte$ són línies asimptòtiques.

(1) Trobeu la curvatura de Gauss de S.
(2) Proveu que les corbes coordenades $v=cte$ són rectes.
(3) Proveu que si efectuem el canvi de paràmetres

$$(s,t)=h(u,v)=\left(\int_0^u \sqrt{E(u)}du, v\right)$$

llavors en la nova parametrització $\psi(s,t)=\varphi(h^{-1}(s,t))$ es pot veure que és una superfície reglada desenvolupable.

Exercici 48. Sigui $\varphi: U \longrightarrow S$ una carta local d'una superfície regular S de $\mathbb{R}^3$. Suposem que els coeficients de la primera i segunda formes fonamentals verifiquen:

$$E=1+\frac{v^2}{2}, F=\frac{1}{\sqrt{2}}, G=1,\ g=0,$$

i a més $e(u,0)=1$, $\forall\, u$, $f(u,v)>0$, $\forall\,(u,v)$.

(1) Proveu que la curvatura de Gauss K de S és $K(\varphi(u,v))=\frac{-1}{(1+v^2)^2}$.

(2) Proveu que les corbes coordenades $u = cte$ són rectes.
(3) Proveu que φ és una superfície reglada de la forma
$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + v.w(u)$$
tal que $|w(u)| = 1$ i $\langle \alpha'(u), w'(u) \rangle = 0$.
(4) Proveu que la corba coordenada $v = 0$ és una circumferència de radi 1.
(5) Proveu que per a tot u_0 la generatriu d'equació $u = u_0$ és ortogonal a la normal principal de α en el punt u_0, forma un angle constant de $\frac{\pi}{4}$ radiants amb α, i $\langle w(u_0), b_\alpha(u_0) \rangle < 0$.
(6) Fent servir els resultats anteriors deduïu que existeix un desplaçament de $\mathbb{R}^3$ que transforma S en l'hiperboloide d'equació $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Exercici 49. Sigui S una superfície connexa orientable de $\mathbb{R}^3$. Suposem que les curvatures de Gauss i mitjana de S són constants i $K \neq 0$.

(i) Proveu que les curvatures principals són constants.
(ii) Suposem que existeix un atles de S tal que les corbes coordenades són línies de curvatura ortogonals. Proveu que la superfície està continguda en una esfera. (Indicació: Deriveu les relacions $N_u = k_1 \varphi_u$, $N_v = k_2 \varphi_v$ i proveu que $k_1 = k_2$.)

Curvatura geodèsica. Càlculs amb la I

Exercici 50. *El Pla hiperbòlic.* Suposem que una superfície S admet una parametrització $\varphi : \mathbb{H}^2 = \{(u, v); v > 0\} \longrightarrow S$ tal que $E = G = \frac{R^2}{v^2}$, $F = 0$.

(i) Proveu que $K = \frac{-1}{R^2}$.
(ii) Proveu que les geodèsiques són les corbes coordenades $u = cte$, i els arcs de circumferència continguts en $\mathbb{H}^2$ amb centre en $v = 0$.

Exercici 51. Sigui $\alpha : I \longrightarrow S$ una corba regular sobre una superfície orientada S. Proveu les propietats següents:

(i) α és geodèsica i asimptòtica de S si i només si és una recta.
(ii) Si α és geodèsica i 2-regular llavors és línia de curvatura si i només si és plana.
(iii) Si totes les geodèsiques de S són corbes planes 2-regulars i S és conexa, llavors S està continguda en una esfera.

Exercici 52. Sigui C l'el·lipse intersecció del cilindre $x^2 + y^2 = 1$ amb el pla que passa per l'eix Ox, formant angle θ amb el plan Oxy. Calculeu el valor absolut de la curvatura geodèsica de C respecte del cilindre, en els vèrtexs de C.

Exercici 53. Siguin S una superfície regular, i A una simetria de $\mathbb{R}^3$ respecte d'un pla π. Suposem que $A(S) = S$ i que la intersecció $S \cap \pi$ és una corba parametritzada regular α . Proveu que α és una geodèsica de S.

Exercici 54. Suposem que una superfície S admet una parametrització $\varphi(u, v)$, amb $v \neq 0$, tal que $E = v^2$, $F = 0$, $G = 2$, $e = \frac{v}{\sqrt{2}}$, $f = g = 0$.

(i) Trobeu la curvatura de la corba coordenada $v = c$.
(ii) Trobeu la curvatura en $p = \varphi(0, 1)$ de la geodèsica de S que forma angle $\frac{\pi}{3}$ amb la corba coordenada $u = 0$ en p.