Topologia i Geometria Global de Superfícies

Curs 2014–2015

Llista 5: Camps vectorials i mètriques

1. Considerem l'esfera S^2 amb l'atles $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ on $U_1 = S^2 \smallsetminus \{(0,0,1)\}$, $U_2 = S^2 \smallsetminus \{(0,0,-1)\}$ amb les coordenades estereogràfiques

$$\varphi_1 \colon U_1 \to \mathbb{R}^2; \qquad \varphi_1(x,y,z) = \frac{1}{1-z}(x,y)$$

$$\varphi_2 \colon U_2 \to \mathbb{R}^2; \qquad \varphi_2(x,y,z) = \frac{1}{1+z}(x,y)$$

i l'aplicació de canvi de carta $\varphi_{2,1} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$,

$$\varphi_{2,1}(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2}(u,v).$$

(a) Demostreu que les funcions

$$f_{U_1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad f_{U_1}(u,v) = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$$

$$f_{U_2} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad f_{U_2}(s,t) = \frac{1-s^2-t^2}{1+s^2+t^2}$$

defineixen un camp escalar diferenciable a S^2.

(b) Demostreu que els camps constants

$$X_{U_1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \qquad X_{U_1}(u,v) = (p,q)$$
$$X_{U_2} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \qquad X_{U_2}(s,t) = (p,q)$$

no són compatibles amb l'aplicació de canvi de carta.

(c) Demostreu que els camps locals

$$X_{U_1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \qquad X_{U_1}(u,v) = (u,v)$$
$$X_{U_2} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \qquad X_{U_2}(s,t) = (-s,-t)$$

defineixen un camp vectorial diferenciable a S^2.

(d) Demostreu que els camps locals

$$W_{U_1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \qquad W_{U_1}(u,v) = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}(1-u^2+v^2, -2uv)$$

$$W_{U_2} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \qquad W_{U_2}(s,t) = \frac{1}{(1+s^2+t^2)^2}(1-s^2+t^2, -2st)$$

defineixen una 1-forma (un camp covariant) diferenciable a S^2.

2. Demostreu que, si considerem a S^2 la mètrica induïda per la mètrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$, llavors l'aplicació antipodal $A\colon S^2 \to S^2$ és una isometria. Utilitzeu aquest fet per definir una mètrica de Riemann a $\mathbb{R}P^2$ tal que la projecció $S^2 \to \mathbb{R}P^2$ sigui una isometria local.

3. Demostreu que si una mètrica de Riemann satisfà $g_{ij} = 0$ per a tot $i \neq j$ en unes certes coordenades, aleshores els símbols de Christoffel en aquestes coordenades satisfan $\Gamma^k_{ij} = 0$ si els tres índexs i, j, k són diferents, i

$$\Gamma^i_{ij} = \Gamma^i_{ji} = \frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_j} \quad \forall i, j; \qquad \Gamma^i_{jj} = \frac{-1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x_i} \quad \forall i \neq j.$$

4. Models clàssics del pla hiperbòlic

(a) *Model del semiplà de Poincaré*

Denotem per $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ el semiplà superior. Considerem a $\mathbb{H}^2$ la mètrica g amb coeficients

$$g_{11} = \frac{1}{y^2}; \qquad g_{12} = 0; \qquad g_{22} = \frac{1}{y^2}.$$

(i) Demostreu que g és una mètrica de Riemann.

(ii) Determina aquesta mètrica els mateixos angles que la mètrica euclidiana?

(iii) Calculeu els símbols de Christoffel d'aquesta mètrica i escriviu les equacions de les geodèsiques a $(\mathbb{H}^2, g)$.

(iv) Comproveu que les geodèsiques geomètriques a $(\mathbb{H}^2, g)$ són els segments de semirectes verticals i els arcs de circumferències ortogonals a la vora de $\mathbb{H}^2$.

(v) Demostreu que la curvatura de Gauss de $(\mathbb{H}^2, g)$ és -1 a tots els punts.

(b) *Model del disc de Beltrami–Poincaré*

Denotem per $\mathbb{D}^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ el disc obert de radi 1 centrat a l'origen. Considerem a $\mathbb{D}^2$ la mètrica g amb coeficients

$$g_{11} = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}; \qquad g_{12} = 0; \qquad g_{22} = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}.$$

(i) Demostreu que g és una mètrica de Riemann.

(ii) Determina aquesta mètrica els mateixos angles que la mètrica euclidiana?

(iii) Calculeu els símbols de Christoffel d'aquesta mètrica i escriviu les equacions de les geodèsiques a $(\mathbb{D}^2, g)$.

(iv) Comproveu que les geodèsiques geomètriques a $(\mathbb{D}^2, g)$ són els arcs de circumferències ortogonals a la vora de $\mathbb{D}^2$ i els segments de diàmetres.

(v) Demostreu que la curvatura de Gauss de $(\mathbb{D}^2, g)$ és -1 a tots els punts.

(vi) Demostreu que la transformació de Cayley $C\colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{D}^2$, $C(z) = (z-i)/(z+i)$, és una isometria del semiplà de Poincaré al disc de Beltrami–Poincaré.

(c) *Model del disc de Beltrami–Klein*

Considerem a $\mathbb{D}^2$, per a cada nombre real positiu R, la mètrica g_R amb coeficients

$$(g_R)_{11} = \frac{R^2(1-v^2)}{(1-u^2-v^2)^2}; \qquad (g_R)_{12} = \frac{R^2 uv}{(1-u^2-v^2)^2};$$

$$(g_R)_{22} = \frac{R^2(1-u^2)}{(1-u^2-v^2)^2}.$$

(i) Demostreu que g_R és una mètrica de Riemann per a tot $R > 0$.

(ii) Determinen aquestes mètriques els mateixos angles que la mètrica euclidiana?

(iii) Calculeu els símbols de Christoffel d'aquesta mètrica per a cada R i escriviu les equacions de les geodèsiques a $(\mathbb{D}^2, g_R)$.

(iv) Comproveu que les geodèsiques geomètriques a $(\mathbb{D}^2, g_R)$ són els segments de rectes.

(v) Demostreu que la curvatura de Gauss de $(\mathbb{D}^2, g_R)$ és $-1/R^2$ a tots els punts.

(d) *Model de la semiesfera*

Denotem per $S^2_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z > 0\}$ la semiesfera superior oberta. Considerem la carta local (S^2_+, φ) donada per la projecció estereogràfica des del pol sud $(0,0,-1)$; és a dir, $(u,v) = \varphi(x,y,z) = (1/(1+z))(x,y)$. Considerem a S^2_+ la mètrica g amb coeficients

$$g_{11} = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2}; \qquad g_{12} = 0; \qquad g_{22} = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2}$$

en aquesta carta local.

(i) Demostreu que g és una mètrica de Riemann.

(ii) Demostreu que aquesta mètrica determina els mateixos angles que la mètrica a S^2_+ induïda per la mètrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Comproveu que les geodèsiques geomètriques a (S^2_+, g) són els arcs de circumferències ortogonals a l'equador de S^2.

(iv) Demostreu que la curvatura de Gauss de (S^2_+, g) és -1 a tots els punts.

(v) Demostreu que $\varphi\colon S^2_+ \to \mathbb{D}^2$ defineix una isometria de (S^2_+, g) amb el disc de Beltrami–Poincaré.

(vi) Demostreu que la projecció ortogonal $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $p(x,y,z) = (x,y)$, dóna una isometria de (S^2_+, g) amb el disc de Beltrami–Klein $(\mathbb{D}^2, g_R)$ per a $R = 1$.

(vii) Demostreu que el discs de Beltrami–Klein i de Beltrami–Poincaré són isomètrics i doneu una isometria explícita entre ells.

5. Isometries del pla hiperbòlic

(a) Demostreu que, si a, b, c, d són nombres reals amb $ad-bc = 1$, llavors l'aplicació $f\colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ donada per $f(z) = (az+b)/(cz+d)$ és una isometria positiva.

(b) Demostreu que, si a, b, c, d són nombres reals amb $ad - bc = -1$, llavors l'aplicació $f\colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$, $f(z) = (a\overline{z}+b)/(c\overline{z}+d)$ és una isometria negativa.

(c) Demostreu que les inversions I_r i les simetries S_a donades per

$$I_r(z) = \frac{r^2 z}{|z|^2}; \qquad S_a(z) = -(\overline{z-a}) + a,$$

on $r > 0$ i a és un nombre real qualsevol, són isometries de $\mathbb{H}^2$.

(d) Demostreu que tota isometria de $\mathbb{H}^2$ és composició d'inversions i simetries.

(e) Demostreu que tota isometria positiva de $\mathbb{H}^2$ es pot expressar com

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

amb a, b, c, d reals tals que $ad - bc = 1$.

(f) Demostreu que, si dues isometries positives de $\mathbb{H}^2$ coincideixen en tres punts, llavors són iguals.

(g) Deduïu dels apartats anteriors que el grup d'isometries positives de $\mathbb{H}^2$ és isomorf a $PSL(2, \mathbb{R})$.

6. Distància al pla hiperbòlic

(a) Siguin z i w dos punts del semiplà $\mathbb{H}^2$. Demostreu que existeix una única geodèsica $\gamma\colon I \to \mathbb{H}^2$ tal que $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$ i que la longitud d'aquesta geodèsica és $\ln(a/b)$ si $z = (0, a)$ i $w = (0, b)$ amb $a > b$ i, en general,

$$l(\gamma) = \ln \frac{|z-\overline{w}| + |z-w|}{|z-\overline{w}| - |z-w|} = 2 \operatorname{arctanh} \frac{|z-w|}{|z-\overline{w}|}.$$

(b) Demostreu que l'aplicació $d\colon \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ que assigna a cada parell de punts z i w la longitud de la geodèsica $\gamma\colon I \to \mathbb{H}^2$ tal que $\gamma(0) = z$ i $\gamma(1) = w$ és una distància.

(c) Utilitzant la transformació $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{D}^2$, $z \mapsto (iz+1)/(z+i)$, demostreu que la distància en el disc de Beltrami–Poincaré és

$$d(z, w) = 2 \operatorname{arctanh} \frac{|z-w|}{|1-z\overline{w}|}.$$

(d) Demostreu que la circumferència hiperbòlica de centre $(0, 0)$ i radi r al disc $\mathbb{D}^2$ coincideix amb la circumferència euclidiana de radi $(e^r - 1)/(e^r + 1)$.

(e) Demostreu que les circumferències hiperbòliques a $\mathbb{D}^2$ i a $\mathbb{H}^2$ són les circumferències euclidianes contingudes, respectivament, a $\mathbb{D}^2$ i a $\mathbb{H}^2$.