Topologia i Geometria Global de Superfícies

Curs 2018–2019

Llista 1: Homotopia

1. Demostreu que per a qualsevol parell d'espais topològics X i Y la relació d'homotopia $f \simeq g$ és una relació d'equivalència en el conjunt de les aplicacions contínues $X \to Y$.

2. (a) Demostreu que si $f_0, f_1 \colon X \to Y$ i $g_0, g_1 \colon Y \to Z$ són aplicacions contínues tals que $f_0 \simeq f_1$ i $g_0 \simeq g_1$ llavors $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.

   (b) Demostreu que la relació d'equivalència homotòpica $X \simeq Y$ entre espais topològics és una relació d'equivalència.

3. (a) Demostreu que si $f_0, f_1 \colon X \to Y$ i $g_0, g_1 \colon A \to B$ són aplicacions contínues tals que $f_0 \simeq f_1$ i $g_0 \simeq g_1$ llavors $f_0 \times g_0 \simeq f_1 \times g_1$, on $f_i \times g_i$ denota l'aplicació $X \times A \to Y \times B$ definida com $(f_i \times g_i)(x, a) = (f_i(x), g_i(a))$.

   (b) Demostreu que si $X \simeq Y$ i $A \simeq B$ llavors $X \times A \simeq Y \times B$.

4. Per a cada espai topològic X, denotem per $\mathrm{HT}(X)$ el conjunt de les classes d'homotopia d'aplicacions $f \colon X \to X$ que són equivalències homotòpiques.

   (a) Demostreu que $\mathrm{HT}(X)$ admet estructura de grup amb l'operació induïda per la composició d'aplicacions.

   (b) Demostreu que si X i Y són espais homotòpicament equivalents llavors els grups $\mathrm{HT}(X)$ i $\mathrm{HT}(Y)$ són isomorfs.

5. Demostreu que la connexió i la connexió per camins són propietats homotòpiques (és a dir, si X té la propietat i $X \simeq Y$, llavors Y també té la propietat), però que ni la compacitat ni les propietats de separació T_1, T_2, T_3 i T_4 no són propietats homotòpiques.

6. Demostreu que un espai X és contràctil si i només si l'aplicació identitat $X \to X$ és homòtopa a l'aplicació constant $f(x) = x_0$ per a algun $x_0 \in X$.

7. Un subconjunt X de $\mathbb{R}^n$ s'anomena *estrellat* si existeix un punt $x_0 \in X$ tal que el segment que uneix x_0 amb qualsevol altre punt de X és contingut a X.

   (a) Demostreu que tot subconjunt convex de $\mathbb{R}^n$ és estrellat.

   (b) Demostreu que tot subconjunt estrellat de $\mathbb{R}^n$ és contràctil.

8. Demostreu que, si $X \neq \emptyset$, llavors l'espai $CX = (X \times [0,1])/(X \times \{1\})$ és contràctil.

9. Demostreu que tot retracte d'un espai contràctil és contràctil.

10. Demostreu que si una aplicació contínua $f \colon X \to S^n$ no és exhaustiva llavors f és homòtopa a una aplicació constant.

11. Demostreu que si una aplicació contínua $f\colon S^n \to S^n$ no té cap punt fix llavors f és homòtopa a la aplicació antipodal.

12. Demostreu que si n és senar llavors l'aplicació antipodal $S^n \to S^n$ és homòtopa a l'aplicació identitat. (Indicació: resoleu primer el cas $n = 1$.)

13. Demostreu que cadascun dels espais següents és homotòpicament equivalent a una unió puntual d'una o més esferes i determineu la dimensió d'aquestes esferes en cada cas:

    (a) $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{p_1, \ldots, p_k\}$, on $p_1, \ldots, p_k$ són punts diferents.

    (b) $\mathbb{R}^n \smallsetminus \mathbb{R}^m$.

    (c) $\mathbb{R}^3$ menys n rectes concurrents.

    (d) $S^3 \smallsetminus S^1$.

    (e) $(S^1 \times S^1) \smallsetminus \{p\}$, on p és un punt qualsevol.

14. Demostreu que l'espai $\mathbb{R}^3 \smallsetminus ((\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \cup (S^1 \times \{0\}))$ és homotòpicament equivalent al tor $S^1 \times S^1$.

15. Demostreu que la unió de la circumferència unitat a $\mathbb{R}^2$ amb l'eix vertical és homotòpicament equivalent a la unió puntual de dues circumferències.

16. Demostreu que el complement d'un punt a l'espai projectiu real $\mathbb{R}P^k$ és homotòpicament equivalent a $\mathbb{R}P^{k-1}$ per a tot $k \geq 1$.

17. Demostreu que l'espai de configuracions de dos punts ordenats a $\mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{Conf}_2(\mathbb{R}^3) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid x_1 \neq x_2\},$$

    és homotòpicament equivalent a S^2.

18. Demostreu que la vora de qualsevol bola tancada $B \subset \mathbb{R}^n$ és un retracte de deformació fort de $B \smallsetminus \{p\}$ per a tot punt p interior a B.

19. La *cinta de Möbius* és el quocient de $[-1, 1] \times [-1, 1]$ per la relació que identifica cada punt de la forma $(-1, y)$ amb $(1, -y)$. Demostreu que la cinta de Möbius té un retracte de deformació fort homeomorf a S^1.

20. Per a cada $n > 0$, sigui X_n el segment que uneix els punts $(0, 0)$ i $(1/n, 1)$ de $\mathbb{R}^2$, i sigui X_0 el segment que uneix els punts $(0, 0)$ i $(0, 1)$. Sigui $X = \cup_{n=0}^{\infty} X_n$. Demostreu que el punt $(0, 0)$ és un retracte de deformació fort de X, però que $(0, 1)$ no ho és.

21. Dos espais amb punt base (X, x_0), (Y, y_0) són *homotòpicament equivalents* si existeixen aplicacions contínues $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$ tals que $f(x_0) = y_0$, $g(y_0) = x_0$, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \operatorname{rel}\{x_0\}$ i $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y \operatorname{rel}\{y_0\}$. Demostreu que si $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$ i $(A, a_0) \simeq (B, b_0)$ llavors $X \vee A \simeq Y \vee B$.

22. Demostreu que, si X és l'espai definit a l'exercici 20, llavors els espais amb punt base $(X, (0, 0))$ i $(X, (0, 1))$ no són homotòpicament equivalents.