Topologia i Geometria Global de Superfícies

Curs 2018–2019

Llista 6bis

1. Trobeu els símbols de Christoffel de la mètrica standard de $\mathbb{R}^2$ en coordenades polars.

2. Siguin $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, i g_1, g_2 les mètriques riemannianes sobre M definides per $g_1 = \frac{dx^2+dy^2}{y}$ i $g_2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$. Demostreu que la longitud del segment vertical $x = 0$, $\varepsilon \leq y \leq 1$ amb $\varepsilon > 0$ tendeix a 2 quan ε tendeix a 0 amb la mètrica g_1 però tendeix a infinit amb la mètrica g_2.

3. Demostreu que el semiplà de Poincaré $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ amb la mètrica hiperbòlica
$$\frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$
i $M = \mathbb{R}^2$ amb la mètrica $e^{-2v}du^2 + dv^2$ són varietats riemannianes isomètriques. *Indicació*: Busqueu una isometria de la forma $F(u, v) = (x(u), y(v))$.

4. Sigui M el subconjunt de $\mathbb{R}^3$ definit per
$$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, \qquad z > 0.$$
   (a) Demostreu que M és una subvarietat diferenciable de $\mathbb{R}^3$ que conté el punt $p = (0, 0, 1)$ i que si
   $$\phi(u, v) = (\cos v \cdot \sinh u, \sin v \cdot \sinh u, \cosh u), \quad u > 0, \quad 0 < v < 2\pi,$$
   aleshores ϕ^{-1} és una carta de M.
   (b) Sigui g la restricció a M de la forma bilineal $\widetilde{g}$ de $\mathbb{R}^3$ definida per
   $$\widetilde{g} = dx^2 + dy^2 - dz^2.$$
   Demostreu que g es una mètrica riemanniana en M i que la expresió local de g en la carta definida per ϕ^{-1} és $du^2 + (\sinh u)^2 dv^2$.
   (c) Demostreu que M te curvatura constant -1.

5. Considereu $\mathbb{R}^2$ dotat de la mètrica $g = \frac{1}{1+x^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$. Pot ser $(\mathbb{R}^2, g)$ isomètric al pla euclidià?

6. Sigui g el camp de formes bilineals sobre $\mathbb{R}^2$ amb els coeficients següents en la base canònica: $g_{11} = 1 + 6x^2 + 18x^4$, $g_{21} = g_{12} = 1 + 6x^2$, $g_{22} = 2$.
   (a) Demostreu que g defineix una mètrica riemanniana a $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calculeu els símbols de Christoffel de g.
   (c) Demostreu que les corbes $\alpha(t) = (t, -t^3)$ i $\beta(t) = (-t, t + t^3)$ són geodèsiques de $(\mathbb{R}^2, g)$.

7. Sigui $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Sigui g la mètrica de $\mathbb{R}^3$ donada per

$$g = (1 + h(x_1)^2)\mathrm{d}x_1^2 + 2h(x_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2.$$

(a) Calculeu els símbols de Christoffel de g.

(c) Demostreu que si $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tal que $\frac{dH}{dx} = h$, llavors per a tot $a \in \mathbb{R}$ les corbes $\gamma(t) = (t, a - H(t), t)$ són geodèsiques.

(d) És $(\mathbb{R}^3, g)$ localment isomètric a $(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2)$?