Computational Algebra, Algebraic Geometry & Applications

Conferencia en honor a Alicia Dickenstein

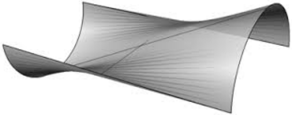
Buenos Aires, 1 al 3 de agosto de 2016

http://mate.dm.uba.ar/~coalaga/

Resultantes, flexes, y una generalización de una fórmula de Salmon

Laurent Busé, Marc Chardin, **Carlos D'Andrea**, Martín Sombra, Martin Weimann

`UMA 2015 Santa Fe- Setiembre 2015`



CNRS PICS "Géométrie diophantienne et calcul formel"

CNRS PICS "Géométrie diophantienne et calcul formel"

- Laurent Busé INRIA Sophia-Antipolis (Niza)
- Marc Chardin Institut de Mathématics de Jussieu (Paris)
- Martín Sombra ICREA & Universitat de Barcelona
- Martin Weimann Université de Caen

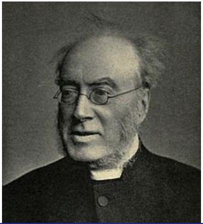
Un poco de historia

Un poco de historia

Rev. George Salmon

A Treatise on the analytic geometry of three dimensions

Longmans, Green & Co., 1862

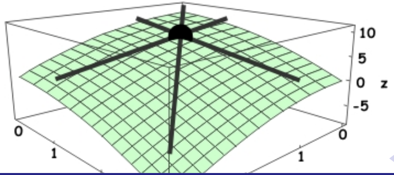


Flexes de una superficie

Un punto p en una superficie $S \subset \mathbb{C}^3$ se dice un *flex* (o punto de inflexión) de S

Flexes de una superficie

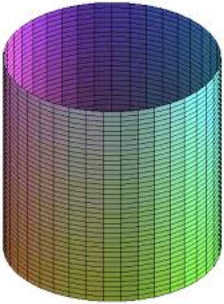
Un punto p en una superficie $S \subset \mathbb{C}^3$ se dice un *flex* (o punto de inflexión) de S si existe una recta que pasa por p que tiene order de contacto por lo menos 3 con S



Por ejemplo

Por ejemplo

En una superficie *reglada*, todo punto p es un flex de S

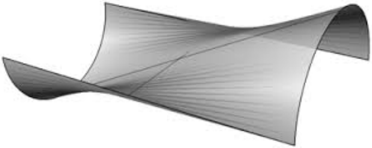


Teorema (Salmon, 1862)

Sea $f(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ de grado d.

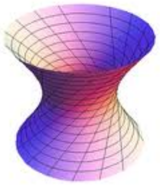
Teorema (Salmon, 1862)

Sea $f(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ de grado d. Existe $Flec(f)(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ de grado $\leq 11d - 24$ que define los flexes de $\{f(x, y, z) = 0\}$



Corolario 1 (Salmon, 1862)

Si $Flec(f)(x, y, z)$ se anula en todos los ceros de $f(x, y, z)$, esta superficie es reglada



Corolario 2 (Salmon, 1862)

Si la superficie definida por $f(x, y, z)$ contiene más de $11d^2 - 24d$ rectas, entonces $f(x, y, z)$ contiene un factor que define una superficie reglada

Terence Tao (blog, 2014)

The original proof of the Cayley-Salmon theorem, dating back to at least 1915, is not easily accessible and not written in modern language.

Janos Kollár (arxiv: 2014)

I get a polynomial of degree $11d - 18$. Salmon claims that in fact the degree should be $11d - 24$. I have not checked this.

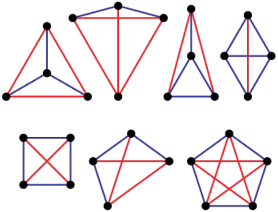
Nets Katz (arxiv: 2014)

One of the motives for this lecture is to defend Salmon's honor and explain his original proof.

¿Por qué tanta atención a este resultado de más de 150 años???

Una conjetura de Erdös (1946)

Dados n puntos distintos en el plano, hay al menos $\mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{\log(n)}}\right)$ distancias distintas entre ellos



Lo mejor hasta ahora

Larry Guth & Nets Katz

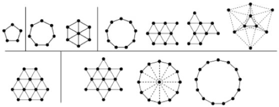
Annals of Mathematics (2015)

$$\mathcal{O}\left(\frac{n}{\log(n)}\right)$$

Conjecture 1 *(Erdős) The minimum number of distinct distances determined by n points in the Euclidean plane is $\Theta\left(\frac{n}{\sqrt{\log n}}\right)$.*

The first few exact values of the function $v(n)$ were determined in [ErF96]:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$v(n)$	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6



SETS WITH k DISTINCT DISTANCES, $2 \leq k \leq 6$,
AND MAXIMUM NUMBER OF POINTS

Via Geometría de incidencias...

Teorema (Guth-Katz 2015)

Via Geometría de incidencias...

Teorema (Guth-Katz 2015)

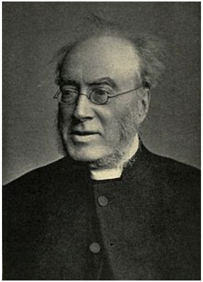
Sea $\mathcal{L}$ un conjunto de N^2 rectas en $\mathbb{R}^3$, con no mas de $\mathcal{O}(N)$ de ellas coplanares o en una superficie doblemente reglada.

Via Geometría de incidencias...

Teorema (Guth-Katz 2015)

Sea $\mathcal{L}$ un conjunto de N^2 rectas en $\mathbb{R}^3$, con no mas de $\mathcal{O}(N)$ de ellas coplanares o en una superficie doblemente reglada. Para $2 \leq k \leq N$, el número de puntos que se encuentran en al menos k rectas es del orden de $\mathcal{O}(N^3 k^{-2})$

¡La demostración de este teorema usa el grado del polinomio de Salmon!



$Flec(f)(x,y,z)$

- ¿Demostración "elemental" del resultado de Salmon?

$Flec(f)(x,y,z)$

- ¿Demostración "elemental" del resultado de Salmon?
- ¿Cálculo?

$Flec(f)(x, y, z)$

- ¿Demostración "elemental" del resultado de Salmon?
- ¿Cálculo?
- ¿Generalizaciones?

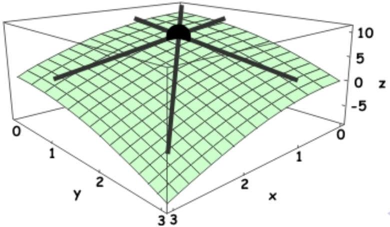
Nuestro trabajo (B-C-D-S-W)

El "orden de osculación lineal" de una hipersuperficie $S \subset \mathbb{P}^n$ en $p \in \mathbb{P}^n$ es

Nuestro trabajo (B-C-D-S-W)

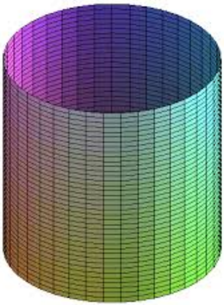
El "orden de osculación lineal" de una hipersuperficie $S \subset \mathbb{P}^n$ en $p \in \mathbb{P}^n$ es

$$\mu_p := \max_{L \subset \mathbb{P}^n} (S, L)_p$$



$$\mu_p = \infty$$

si hay una recta que pasa por p contenida en S



El conjunto de Flexes

$$Flex(S) := \{p \in \mathbb{P}^n \mid \mu_p \geq n\}$$

Es una subvariedad algebraica de S

El conjunto de Flexes

$$Flex(S) := \{p \in \mathbb{P}^n \mid \mu_p \geq n\}$$

Es una subvariedad algebraica de S

- ¿Dimensión?

El conjunto de Flexes

$$Flex(S) := \{p \in \mathbb{P}^n \mid \mu_p \geq n\}$$

Es una subvariedad algebraica de S

- ¿Dimensión?
- ¿Grado?

El conjunto de Flexes

$$Flex(S) := \{p \in \mathbb{P}^n \mid \mu_p \geq n\}$$

Es una subvariedad algebraica de S

- ¿Dimensión?
- ¿Grado?
- ¿Cálculo?

Cálculo

$$F(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$$

homogéneo de grado d

que define a S

Cálculo

$$F(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$$

homogéneo de grado d

que define a S

$$F(\underline{x} + t \cdot \underline{x'}) = F_{d,0}(\underline{x}, \underline{x'}) + F_{d-1,1}(\underline{x}, \underline{x'})\, t + \ldots + F_{d-n,n}(\underline{x}, \underline{x'})\, t^n + \mathcal{O}(t^{n+1})$$

Cálculo

$$Flex(S) = \{\underline{x} \in \mathbb{P}^n : \exists\, \underline{x}' \in \mathbb{P}^n |$$

$$F_{d,0}(\underline{x}, \underline{x}') = 0,\ F_{d-1,1}(\underline{x}, \underline{x}') = 0$$

$$\ldots F_{d-n,n}(\underline{x}, \underline{x}') = 0\}$$

Incidencia y Eliminación

$$\begin{array}{ccc} V(F_{d,0}, F_{d-1,1}, \ldots, F_{d-n,n}) & \subset & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_1 \\ Flex(S) & \subset & \mathbb{P}^n \end{array}$$

Incidencia y Eliminación

$$\begin{array}{ccc} V(F(\underline{x}), F_{d-1,1}, \ldots, F_{d-n,n}) & \subset & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_1 \\ Flex(S) & \subset & \mathbb{P}^n \end{array}$$

Otra ecuación

Otra ecuación

Dado $p \in S$, $p \in Flex(S)$ si y solamente si $\{F_{d,1}(p, \underline{x'}), \ldots, F_{d-n,n}(p, \underline{x'})\}$ NO es una sucesión regular en $\mathbb{K}[x_0', \ldots, x_n']$

Ecuaciones para $Flex(S)$

Teorema

Ecuaciones para $Flex(S)$

Teorema

Las ecuaciones que definen a $Flex(S)$ son

$$\begin{aligned} F(x_0, \ldots, x_n) &= 0 \\ \mathrm{Res}^{x'}_{1,2,\ldots,n}(F^{\infty}_{d-1,1}, \ldots, F^{\infty}_{d-n,n}) &= 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones para $Flex(S)$

Teorema

Las ecuaciones que definen a $Flex(S)$ son

$$\begin{aligned} F(x_0,\ldots,x_n) &= 0 \\ \mathrm{Res}^{x'}_{1,2,\ldots,n}(F^{\infty}_{d-1,1},\ldots,F^{\infty}_{d-n,n}) &= 0 \end{aligned}$$

$F^{\infty}_{d-j,j}(\underline{x}, x'_1, \ldots, x'_n)$

Recordamos:

$$F(\underline{x} + t \cdot \underline{x'}) = F_{d,0}(\underline{x}, \underline{x'}) + F_{d-1,1}(\underline{x}, \underline{x'})\, t + \ldots + F_{d-n,n}(\underline{x}, \underline{x'})\, t^n + \mathcal{O}(t^{n+1})$$

$F^{\infty}_{d-j,j}(\underline{x}, x'_1, \ldots, x'_n)$

Recordamos:

$$F(\underline{x} + t \cdot \underline{x'}) = F_{d,0}(\underline{x}, \underline{x'}) + F_{d-1,1}(\underline{x}, \underline{x'})\, t + \ldots + F_{d-n,n}(\underline{x}, \underline{x'})\, t^n + \mathcal{O}(t^{n+1})$$

$$\boxed{F^{\infty}_{d-j,j}(\underline{x}, x'_1, \ldots, x'_n) := F_{d-1,1}(\underline{x}, 0, x'_1, \ldots, x'_n)}$$

$\mathrm{Res}^{\underline{x'}}_{d_1,d_2,\ldots,d_n}$

Dados $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$, el polinomio genérico de grado d_i en n variables homogéneas es:

$\mathrm{Res}^{x'}_{d_1,d_2,\ldots,d_n}$

Dados $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$, el polinomio genérico de grado d_i en n variables homogéneas es:

$$f_i(x'_1, \ldots, x'_n) = \sum_{|\alpha|=d_i} c_{i,\alpha} x'^{\alpha_1}_1 \ldots x'^{\alpha_n}_n$$

La Resultante

$$\mathrm{Res}^{x'}_{d_1,d_2,\ldots,d_n} \in \mathbb{Z}[c_{i,\alpha},\ i = 1,\ldots,n]$$

La Resultante

$$\mathrm{Res}^{\underline{x}'}_{d_1,d_2,\ldots,d_n} \in \mathbb{Z}[c_{i,\alpha},\ i=1,\ldots,n]$$

- Es un polinomio irreducible

La Resultante

$$\mathrm{Res}^{x'}_{d_1,d_2,\ldots,d_n} \in \mathbb{Z}[c_{i,\alpha},\ i = 1,\ldots,n]$$

- Es un polinomio irreducible
- Se anula si y solamente si existe $\xi \in \mathbb{P}^{n-1}$ tal que $f_1(\xi) = f_2(\xi) = \ldots = f_n(\xi) = 0$

Cálculo

$$\left\langle \mathrm{Res}^{\underline{x'}}_{d_1,d_2,\dots,d_n} \right\rangle$$
$$=$$
$$\left\langle f_1(1,x'_2,\dots,x'_n),\dots,f_n(1,x'_2,\dots,x'_n) \right\rangle$$
$$\cap$$
$$\mathbb{Z}[c_{i,\alpha},\ i=1,\dots,n]$$

Fórmula de Poisson para resultantes

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{Res}^{\underline{x}'}_{d_1,d_2,\ldots,d_n} \\ = \\ \left(\mathrm{Res}^{\underline{x}''}_{d_2,\ldots,d_n}\right)^{d_1}\left(\prod_{f_2(\xi)=\cdots=f_n(\xi)=0} f_1(\xi)\right)\end{gathered}}$$

Fórmula de Poisson para resultante

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{Res}^{\underline{x}'}_{d_1,d_2,\ldots,d_n} \\ = \\ \left(\mathrm{Res}^{\underline{x}''}_{d_2,\ldots,d_n}\right)^{d_1}\left(\prod_{f_2(\xi)=\cdots=f_n(\xi)=0} f_1(\xi)\right)\end{gathered}}$$

donde $\underline{x}'' = (x_2', \ldots, x_n')$ y f_1 está "afinizado"

Otras propiedades

- $\deg_{c_{i,\alpha}}\left(\mathrm{Res}^{\underline{x}'}_{d_1,d_2,\ldots,d_n}\right) = \frac{d_1 \ldots d_n}{d_i}$

Otras propiedades

- $\deg_{c_{i,\alpha}}\left(\mathrm{Res}^{x'}_{d_1,d_2,\ldots,d_n}\right) = \frac{d_1 \ldots d_n}{d_i}$
- Si $n = 2$, $\mathrm{Res}^{x'}_{d_1,d_2}$ coincide con la resultante clásica de Sylvester de 2 polinomios en una variable

Volviendo a $Flex(S)$

Los polinomios que definen a $Flex(S)$ en $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ son

$$F(x_0, \ldots, x_n) \text{ y}$$
$$\mathrm{Res}^{\underline{x}'}_{1,2,\ldots,n}(F^\infty_{d-1,1}, \ldots, F^\infty_{d-n,n})$$

¿Grados?

¿Grados?

- $\deg\left(F(x_0, \ldots, x_n)\right) = d$

¿Grados?

- $\deg\left(F(x_0,\ldots,x_n)\right) = d$
- $$\deg\left(\mathrm{Res}^{\underline{x}'}_{1,2,\ldots,n}(F^{\infty}_{d-1,1},\ldots,F^{\infty}_{d-n,n})\right) = ????$$

Los grados de $\mathrm{Res}^{x'}_{1,2,\ldots,n}$

dicen que:

Los grados de $\mathrm{Res}^{x'}_{1,2,\ldots,n}$

dicen que:

$$\deg\left(\mathrm{Res}^{x'}_{1,2,\ldots,n}(F^{\infty}_{d-1,1},\ldots,F^{\infty}_{d-n,n})\right)$$

$$=$$

$$d\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k}\right)-n\cdot n!$$

Tabla

n	$\deg\left(\mathrm{Res}^{x'}_{1,2,\ldots,n}(F^{\infty}_{d-1,1},\ldots,F^{\infty}_{d-n,n})\right)$
2	$3d-4$
3	$11d-18$
$\vdots$	$\vdots$

PERO

Se sabe (bien) que para $n = 2$, $Flex(S)$ es la intersección de la curva con su hessiano

PERO

Se sabe (bien) que para
$n = 2$, $Flex(S)$ es la intersección de
la curva con su hessiano

$$\deg(\text{hessiano}) = 3(d-2)$$

PERO

Se sabe (bien) que para $n = 2$, $Flex(S)$ es la intersección de la curva con su hessiano

$$\deg(\text{hessiano}) = 3(d-2)$$

$$< 3d - 4$$

Y para $n = 3$

Y para $n = 3$

El resultado de Salmon dice que $Flex(S)$ es la intersección de S con otra superficie de grado $\leq 11d - 24$

Y para $n = 3$

El resultado de Salmon dice que $Flex(S)$ es la intersección de S con otra superficie de grado $\leq 11d - 24$

$$< 11d - 18$$

¿Qué estamos calculando mal???

¿Qué estamos calculando mal???

- La variedad eliminante está bien calculada, y los grados son correctos

¿Qué estamos calculando mal???

- La variedad eliminante está bien calculada, y los grados son correctos
- El trabajo de Salmon no es en un espacio proyectivo...

¿Qué estamos calculando mal???

- La variedad eliminante está bien calculada, y los grados son correctos
- El trabajo de Salmon no es en un espacio proyectivo...
- !!!

Nuestros Resultados (I)

Teorema

Busé-Chardin-**D**-Sombra-Weimann

Nuestros Resultados (I)

Teorema

Busé-Chardin-D-Sombra-Weimann

$$\mathrm{Res}^{\underline{x}'}_{1,2,\ldots,n}(F^{\infty}_{d-1,1},\ldots,F^{\infty}_{d-n,n})$$
$$=$$
$$x_0^{n!}G(\underline{x})+A(\underline{x})F(\underline{x})$$

Nuestro Resultado

Teorema

Busé-Chardin-D-Sombra-Weimann

$$\mathrm{Res}^{x'}_{1,2,\ldots,n}(F^{\infty}_{d-1,1},\ldots,F^{\infty}_{d-n,n})$$
$$=$$
$$x_0^{n!}G(\underline{x})+A(\underline{x})F(\underline{x})$$

Bajando el grado

- $\deg(G) = d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k}\right) - (n+1)!$

Bajando el grado

- $\deg(G) = d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k}\right) - (n+1)!$
- G coincide con el hessiano si $n = 2$, y con el polinomio de Salmon si $n = 3$

Resultado Geométrico

Teorema

Busé-Chardin-D-Sombra-Weimann

$S = Flex(S) \iff S$ es una hipersuperficie reglada.

Resultado Geométrico

Teorema
Busé-Chardin-D-Sombra-Weimann

$S = Flex(S) \iff S$ es una hipersuperficie reglada.

Si no, y $\{x_0 = 0\} \not\subset S$, entonces $Flex(S)$ tiene codimensión 1 en S, y grado $\leq d^2\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k}\right) - d(n+1)!$

Idea de la Demostración

Idea de la Demostración

- Agregamos una forma lineal genérica
  $\ell(x') = u_0 x'_0 + u_1 x'_1 + \ldots + u_n x'_n$

Idea de la Demostración

- Agregamos una forma lineal genérica $\ell(x') = u_0 x'_0 + u_1 x'_1 + \ldots + u_n x'_n$
- Calculamos $\mathrm{Res}_{1,1,2,\ldots,n}(\ell(x'), F_{d-1,1}, \ldots, F_{d-n,n})$

Idea de la Demostración (II)

Aplicando la Fórmula de Poisson, se demuestra que, modulo $F(\underline{x})$,

Idea de la Demostración (II)

Aplicando la Fórmula de Poisson, se demuestra que, modulo $F(\underline{x})$,

$$\mathrm{Res}_{1,1,2,\ldots,n}(\ell(x'), F_{d-1,1}, \ldots, F_{d-n,n})$$
$$=$$
$$\ell(x_0, \ldots, x_n)^{n!}\, x_0^{n!}\, G(x_0, \ldots, x_n)$$

¿El final de la historia??!?!?

¿El final de la historia??!?!?

$$H(F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

Para $n = 3$

(Salmon 1862)

$$G = \Theta - 4H(\Phi + a\Psi)$$

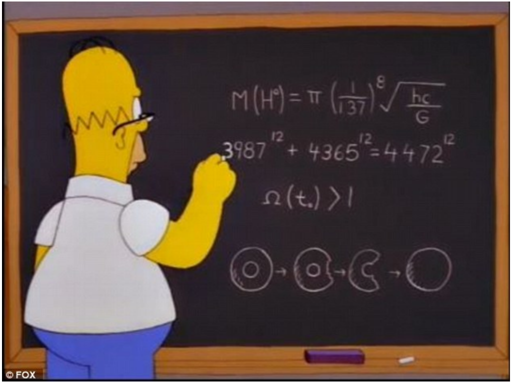
Para $n = 3$

(Salmon 1862)

$$G = \Theta - 4H(\Phi + a\,\Psi)$$

con $a \in \mathbb{Z}$ y Θ, H, Φ, Ψ covariantes de $f(x, y, z)$

¿Una fórmula explícita para G??



Moltes Gràcies!!

http://mate.dm.uba.ar/~coalaga/