

## Ideals de corbes mòbils i la seva interacció amb el disseny assistit per ordinador

CARLOS D'ANDREA

**Resum** Presentem un cas d'interacció fructífera entre l'àlgebra commutativa i el disseny assistit per ordinador. Els problemes en aquesta àrea aplicada i cada vegada més important de la informàtica s'han traslladat a l'estudi d'estructures algebraïques abstractes, i han enriquit a la matemàtica amb múltiples resultats teòrics i problemes oberts que expliquem en aquest text.

**Paraules clau:** Parametritzacions racionals, corbes planes, àlgebres de Rees,  $\mu$ -bases, generadors minimal

**Classificació MSC2000:** primària 14H50; secundària 13A30, 68W30

En el disseny geomètric assistit per ordinador, les corbes i les superfícies del pla i del espai euclidià són actors essencials, i és per això que la seva representació algebraica i geomètrica és de molta importància.

Al lector li deuen ser familiars les representacions “paramètriques” i “implícites” d'una corba o superfície que va aprendre als cursos de càlcul i/o geometria elemental. La primera és d'interès per produir punts en una determinada figura, mentre que la forma implícita és útil per decidir amb facilitat si un determinat punt pertany al conjunt o no. Per exemple, és un fet clàssic ja conegut pels antics grecs que la circumferència amb centre a l'origen de  $\mathbb{R}^2$  i radi unitari (Figura 1) pot parametritzar-se així:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right). \end{array} \quad (1)$$

(en realitat, la imatge d'aquesta aplicació cobreix tota la circumferència excepte el punt  $(-1, 0)$ ), mentre que la seva representació implícita al pla de coordenades  $(x, y)$  és la coneguda equació

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \quad (2)$$

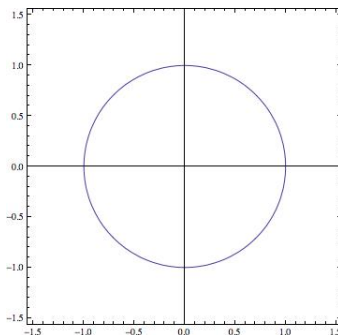


FIGURA 1: La circumferència unitària.

Ambdues representacions són importants, ja que -per exemple- per calcular interseccions entre corbes és convenient tenir una d'elles en forma paramètrica i l'altra de manera implícita.

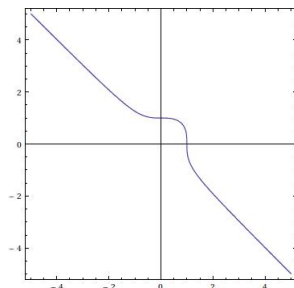
Al món computacional, les corbes s'han de definir de manera “finita” i precisa, la qual cosa ens porta directament al cor de l'àlgebra, ja que precisament els polinomis i els seus quocients (les funcions racionals) són expressables amb poca informació (per exemple, els coeficients dels polinomis involucrats) i suficient precisió. En realitat, per la capacitat de precisió visual d'ordinadors d'avui dia, és suficient treballar amb funcions polinòmiques (o quocients d'aquestes) “a trossos”, de grau molt baix (sovint lineals). En aquest escrit ens limitarem a treballar amb funcions racionals, això és, que es puguin representar com a polinomis o quocients de polinomis en tot el pla.

A l'avantatge de “quedar-nos” al món polinòmic, que fa que amb poca informació algebraica puguem codificar els nostres objectes de manera precisa, se li contraposa el fet que no tota corba algebraica (els zeros d'un polinomi en dues variables) sigui “parametritzable”. Per exemple, la cúbica de Fermat (veure Figura 2) de simple equació  $x^3 + y^3 = 1$ , no admet una parametrització del tipus  $(x(t), y(t))$  amb  $x(t)$  i  $y(t)$  funcions racionals de  $t$  com en (1).

Aquesta situació és pròpia de la geometria algebraica, en contrast amb el que passa en geometria lineal, diferencial o analítica, on gairebé tot objecte pot definir-se paramètrica i implícitament, almenys localment.

Com al món del disseny assistit per ordinador la quantitat de corbes que es necessiten per tenir una precisió raonable és molt poca (a costa d'utilitzar altres mecanismes d'ajust que no discutirem aquí), diguem que ens limitarem a considerar solament aquelles corbes que són “parametritzables”, és a dir aquelles que tenen una representació de la forma  $(x(t), y(t))$  amb  $x(t), y(t) \in \mathbb{K}(t)$ , el cos de funcions racionals amb coeficients en  $\mathbb{K}$  i indeterminada  $t$ . Aquí, denotarem per  $\mathbb{K}$  denotarem el cos base que generalment serà el dels nombres reals (el cos per excel·lència del disseny visual), però també denotarà a vegades els nombres racionals  $\mathbb{Q}$ , els nombres complexos  $\mathbb{C}$ , o fins i tot algun cos finit.

Tenir fórmules explícites i senzilles per passar d'una representació (paramètrica

FIGURA 2: Gràfic de la corba de Fermat  $x^3 + y^3 = 1$ .

o implícita) a l'altra és de molta utilitat en aquest camp, i la cerca i el disseny de tals formulacions constitueixen un àrea actual de recerca.

Passar de representació implícita a paramètrica és un problema força difícil, ja que s'ha de començar per detectar si la corba en qüestió és “parametritzable” o no, i després aconseguir una forma paramètrica que la representi. Resultats efectius sobre com resoldre el problema de la parametrització poden trobar-se en [SW91, SWP08, vH95], però els mètodes que es proposen en aquests treballs són massa complicats i involucren tècniques de geometria algebraica no elementals, la complexitat de les quals encara no està ben entesa.

En contrast, passar de la forma paramètrica a una implícita és relativament senzill, tant des d'un punt de vista teòric com computacional. En aquest cas, l'anomenat “Teorema d'eliminació” ([CLO07, CLO05]) ens diu que es poden manipular algebraicament les equacions com hem après a fer-ho en cursos elementals d'àlgebra, eliminar la variable  $t$  i quedar-nos amb una expressió en les variables  $x$  i  $y$  que ens donarà l'equació que busquem.

Vegem com funciona aquest teorema amb l'exemple de la parametrització donada en (1). De les identitats

$$\begin{cases} x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y &= \frac{2t}{1+t^2} \end{cases},$$

arribem al sistema polinòmic

$$\begin{cases} (1+t^2)x - (1-t^2) &= 0 \\ (1+t^2)y - 2t &= 0 \end{cases}, \quad (3)$$

i d'aquestes dues equacions hem de “eliminar” la variable  $t$  per quedar-nos amb una expressió en  $x$  i  $y$ .

Si alguna de les dues expressions que apareix en (3) fos lineal en  $t$ , es podria resoldre el sistema expressant  $t$  en funció de l'altra variable (a partir de la equació lineal en  $t$ ), i reemplaçant aquesta expressió després en l'altra equació per arribar

a una expressió que depengui solament de  $x$  i de  $y$ . Però l'exponent que apareix en cada polinomi de (3) és quadràtic, la qual cosa fa que hàgim d'utilitzar altres mètodes d'eliminació, i aquí és on apareix en escena la “Resultant de Sylvester” que va a ser introduïda pel mateix Sylvester en 1853 en [Syl53], i que ens diu que el determinant d'aquesta matriu

$$\begin{pmatrix} -1+x & 0 & 1+x & 0 \\ 0 & -1+x & 0 & 1+x \\ y & -2 & y & 0 \\ 0 & y & -2 & y \end{pmatrix} \quad (4)$$

és una expressió equivalent a haver eliminat la variable  $t$  en (3). El lector pot comprovar que calculant explícitament aquest determinant, s'obté

$$4(-1+x^2+y^2),$$

un múltiple del polinomi que defineix la circumferència unitària (2).

En general, donats dos polinomis  $f(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_mt^m$  y  $g(t) = b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n$  de graus  $m$  i  $n$  respectivament, la resultant de Sylvester d'aquests polinomis és el determinant de la matriu quadrada de  $n+m$  files i columnes següent:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-1} & a_m & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n \end{pmatrix}, \quad (5)$$

on les primeres  $n$  files contenen els coeficients de  $f$  disposats en la forma que s'indica amunt, les últimes  $m$  files contenen els coeficients de  $g$ , i en la resta de la matriu hi ha zeros. És molt senzill de verificar que en el cas (3), amb

$$\begin{aligned} f(t) &= (-1+x) + 0t + (1+x)t^2 \\ g(t) &= y - 2t + yt^2, \end{aligned}$$

La matriu de Sylvester es converteix en (4).

La resultant de Sylvester és el que es denomina un polinomi “d'eliminació” en el sentit que el determinant de la matriu (5) pertany a l'ideal generat per  $f$  i per  $g$  (és a dir, s'escriu com  $Af + Bg$ , amb  $A$  i  $B$  també polinomis) però ja no involucra a la variable  $t$ . D'alguna manera, hem aconseguit “canviar” les equacions  $f = 0$  i  $g = 0$  per una altra equació que ja no depèn de  $t$ , hem eliminat la variable  $t$ .

Aquesta “resolució” via resultants del problema de la implicitació pot aplicar-se de manera general: donada una parametrització de la forma

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &\dashrightarrow \mathbb{K}^2 \\ t &\mapsto \left( \frac{x_N(t)}{x_D(t)}, \frac{y_N(t)}{y_D(t)} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

on  $X_N(t)$ ,  $X_D(t)$ ,  $y_N(t)$ ,  $y_D(t)$  són polinomis en la variable  $t$  no tots ells constants, tals que  $\gcd(x_N(t), x_D(t)) = \gcd(y_N(t), y_D(t)) = 1$ , i el símbol “ $\dashrightarrow$ ” significa que la funció està definida llevat en un conjunt finit de punts de  $\mathbb{K}$  (els zeros dels denominadors), es pot utilitzar la resultant de Sylvester per eliminar  $t$  en les expressions

$$\begin{cases} f(t) = x \cdot x_D(t) - x_N(t) \\ g(t) = y \cdot y_D(t) - y_N(t), \end{cases} \quad (7)$$

i obtenir (una potència de) l’equació implícita de la corba que s’obté com l’adherència de la imatge de la aplicació (6). La demostració d’aquest resultat pot trobar-se en el capítol d’Eliminació i Extensió de [CLO07].

Si els polinomis que codifiquen la parametrització (6) tenen grau menor o igual a  $n$ , la matriu de Sylvester que calcula la resultant tindrà  $2n$  files i columnes. Es sap que el polinomi en  $(x, y)$  que resulta de calcular el determinant també té el seu grau fitat per  $n$ , i genèricament és un polinomi irreductible de grau  $n$ . És més, si la parametrització és “genèricament injectiva” (es a dir, la funció és injectiva llevat en un nombre finit de punts), i té grau igual a  $n$  (el “grau de la parametrització” és el màxim dels graus dels 4 polinomis que la codifiquen), llavors l’expressió resultant serà un polinomi irreductible de grau  $n$ . Altrament, el polinomi que resulta d’eliminar  $t$  usant la resultant de Sylvester serà una potència d’un polinomi irreductible. Aquest polinomi irreductible és el que defineix la corba. Dit en fórmules

$$\text{Res}_t(x \cdot x_D(t) - x_N(t), y \cdot y_D(t) - y_N(t)) = E(x, y)^d, \quad (8)$$

on  $\text{Res}_t(\cdot, \cdot)$  denota la resultant de Sylvester que “elimina” la variable  $t$ ,  $E(x, y)$  és el polinomi irreductible que defineix la corba, i  $d \geq 1$ . De fet, l’exponent  $d$  és el anomenat “índex de traçat”, que és la quantitat de vegades que la parametrització recorre la corba (en el cas d’aplicacions genèricament injectives, es té  $d = 1$ ).

En conclusió, donada una parametrització de grau  $n$ , hi ha una matriu quadrada de dimensió  $2n$  tal que el seu determinant ens produeix la seva equació implícita. Podrem trobar matrius més petites que produeixin el mateix efecte? Certament, hi ha matrius més petites per calcular resultants, per exemple “matrius de Bézout” (cf. [AJ06]) que redueixen les dimensions a la meitat, però la pregunta és si es podria canviar els polinomis que apareixen en (7) per uns de menor grau tals que la seva resultant també produeixin l’equació implícita de la corba.

Aquest tema va ser el que va atreure a diversos investigadors del disseny geomètric assistit per ordinador a principis dels anys noranta, i que va donar origen a una interacció molt fructífera entre l’àlgebra commutativa, la geometria algebraica, i el modelatge geomètric que continua fins avui dia. Vegem com va començar la història.

## 1 Rectes mòbils i $\mu$ -bases

Les “rectes mòbils” van ser introduïdes per Thomas Sederberg i els seus col·laboradors en la sèrie d’articles [STD94, SC95, SGD97, CSC98]. El concepte de recta mòbil es

basa en la següent observació: cada fila de la matriu de Sylvester que apareix en (4) codifica l'equació d'una recta en el pla  $(x, y)$  amb valors “mòbils” determinats pel paràmetre  $t$ . Per exemple, la primera fila de (4) correspon a la recta mòbil

$$(1 + t^2) \cdot x - (1 - t^2) = 0, \quad (9)$$

mentre que l'última fila d'aquesta matriu codifica la recta

$$(t + t^3) \cdot y - 2t^2 = 0. \quad (10)$$

Per a cada valor del paràmetre  $t$ , s'obté l'equació d'una recta en el pla  $(x, y)$  que tallarà a la circumferència precisament en el punt de la corba corresponent al valor de  $t$  en la parametrització (1). Això ens permet pensar a aquestes rectes com a famílies de rectes que “segueixen” a la parametrització juntament amb el valor del paràmetre (veure Figura 3).

1 DEFINICIÓ Una recta mòbil de grau  $\delta$  que segueix a la parametrització (6) és un polinomi  $\mathcal{L}_\delta(t, x, y) = u(t)x + v(t)y + w(t) \in \mathbb{K}[t, x, y]$ , amb

$$\max\{\deg(u), \deg(v), \deg(w)\} = \delta,$$

tal que

$$\mathcal{L}_\delta \left( t, \frac{x_N(t)}{x_D(t)}, \frac{y_N(t)}{y_D(t)} \right) = 0. \quad (11)$$

Noteu que trivialment els polinomis que apareixen en (7) són rectes mòbils que segueixen a la parametrització. A més a més, si multipliquem qualsevol recta mòbil d'aquestes per un polinomi  $z(t)$  qualsevol, el resultat serà una altra recta mòbil (de grau major) amb les mateixa propietat de seguir a la parametrització.

El conjunt de rectes mòbils que segueixen a una parametrització té una estructura de mòdul sobre l'anell de polinomis  $\mathbb{K}[t]$ . De fet, és el mòdul de “syzygies” o relacions de la terna

$$(x_N(t) \cdot y_D(t), y_N(t) \cdot x_D(t), x_D(t) \cdot y_D(t)), \quad (12)$$

que són les coordenades homogènies de la parametrització (6).

No direm molt més en aquest sentit, atès que la definició de rectes mòbils no requereix comprendre conceptes com syzygies o mòduls. De fet, calcular rectes mòbils que segueixen a una parametrització donada és molt senzill ja que, fixat  $\delta$ , els coeficients dels polinomis  $u(t)$ ,  $v(t)$  i  $w(t)$  són les solucions del sistema d'equacions lineals determinants per la identitat (11).

Amb aquesta definició geomètricament molt elemental, el mètode de “implicitació via rectes mòbils” tal com va ser formulat en [STD94] essencialment diu: busqueu un conjunt de rectes mòbils de grau menor o igual que  $\delta$ , amb  $\delta$  el més petit possible, tal que aquestes rectes siguin “independents” en el sentit que la matriu dels seus coeficients (com a polinomi en  $t$ ) tingui rang màxim. Amb una mica de sort, es trobaran  $\delta + 1$  formes, amb la qual cosa es podrà construir una

matriu quadrada contenint tots els coeficients (com a polinomi en  $t$ ) d'aquestes rectes. Calculeu el determinant de la matriu, i s'obindrà un múltiple no trivial de l'equació implícita. Si es “trien bé” les rectes mòbils independents, el determinant serà igual a  $E(x, y)^d$ .

Això és el que passa en la matriu (4): en les seves files hi ha codificades 4 rectes mòbils de grau 3 linealment independents, i el determinant d'aquesta matriu ens dona l'equació implícita de la circumferència unitària. Es podrà construir una matriu de rectes mòbils de grau menor? La resposta és que sí, i un exercici molt senzill pel lector és resoldre les equacions que apareixen en (11) amb la parametrització (1) i  $\delta = 1$ , i trobar dues rectes mòbils linealment independents com les següents:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(t, x, y) &= y - (x + 1)t \\ \mathcal{L}_1^*(t, x, y) &= (-1 + x) + ty.\end{aligned}$$

Amb els coeficients d'aquestes rectes construïm una matriu de  $2 \times 2$ :

$$\begin{pmatrix} y & -1 - x \\ -1 + x & y \end{pmatrix}, \quad (13)$$

que el seu determinant ens dona  $x^2 + y^2 - 1$ , que ens dona l'equació implícita que estàvem buscant. Noteu que aquesta matriu té la meitat de files que (4), amb la qual cosa hem aconseguit d'alguna manera “simplificar” el problema de la implicitació.

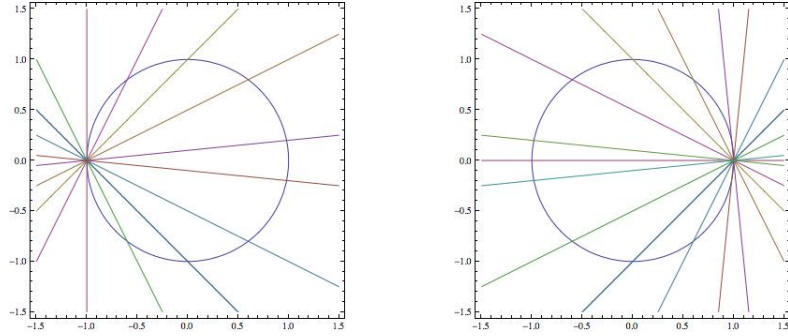


FIGURA 3: Rectes mòbils  $\mathcal{L}_1$  (a esquerra) i  $\mathcal{L}_1^*$  (a dreta).

Es pot fer això de manera sistemàtica amb una parametrització genèrica com a (6)? Quin és el valor de  $\delta$  més petit possible? Aquesta pregunta va ser resposta per Hilbert fa més de 100 anys, i redescoberta per la comunitat de modelatge geomètric en [CSC98].

**2 TEOREMA** *Donada una parametrització com en (6) de grau  $n$ , existeixen un únic  $\mu \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq \mu \leq \frac{n}{2}$ , i dues rectes mòbils  $\mathcal{P}_\mu(t, x, y)$ ,  $\mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)$  que segueixen a la parametrització, tal que qualsevol altra recta mòbil que segueix a (6) és una combinació polinòmica d'aquestes dues, és a dir que tota  $\mathcal{L}_\delta(t, x, y)$  com en la Definició 1 es pot expressar com*

$$\mathcal{L}_\delta(t, x, y) = p(t)\mathcal{P}_\mu(t, x, y) + q(t)\mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y),$$

amb  $p(t), q(t) \in \mathbb{K}[t]$  de graus fitats per  $\delta - \mu$  i  $\delta - n + \mu$  respectivament.

Els polinomis  $\mathcal{P}_\mu(t, x, y)$  i  $\mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)$  poden calcular-se explícitament sense necessitat de conèixer  $\delta$  a priori, utilitzant una “resolució lliure” de l’ideal generat pels 3 polinomis que apareixen en (12), i hi ha algorismes eficients per fer aquests càlculs, veure per exemple [CDNR97].

Noteu que encara que els algorismes generals per calcular resolucions lliures estan basats en càlculs amb “bases de Gröbner” que en general tenen una complexitat de càlcul molt dolenta, l’avantatge en aquesta situació és que l’ideal que estem considerant és del tipus “Hilbert-Burch”. Això vol dir que els coeficients d’aquests polinomis apareixen en les columnes de la matriu de  $2 \times 3$  de les primeres syzygies de la resolució. A més a més, els menors maximals (amb signe) d’aquesta matriu ens donen les “coordenades” de la parametrització. En l’exemple de la parametrització (1), la matriu de Hilbert-Burch és

$$\begin{bmatrix} -t & 1 & -t \\ 1 & t & -1 \end{bmatrix},$$

i calculant els menors maximals amb signe d’aquesta matriu, obtenim

$$-(1 - t^2, 2t, 1 + t^2),$$

un múltiple no trivial del vector (12) que codifica la parametrització (1). Referim al lector a [CSC98] per a més detalls sobre la demostració del Teorema 2.

**3 DEFINICIÓ** Un parell  $\{\mathcal{P}_\mu(t, x, y), \mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)\}$  com en el Teorema 2 es diu una  $\mu$ -base de la parametrització (6).

Noteu que òbviament del Teorema 2 només es desprèn la unicitat del valor de  $\mu$  i no de la  $\mu$ -base. De fet, si  $\mu = n - \mu$  (la qual cosa passa genèricament si  $n$  és parell), llavors qualsevol combinació  $\mathbb{K}$ -lineal genèrica d’elements d’una  $\mu$ -base és una altra  $\mu$ -base. Si  $\mu < n - \mu$ , llavors el parell  $\{\mathcal{P}_\mu(t, x, y), \mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)\}$  pot reemplaçar-se per  $\{\mathcal{P}_\mu(t, x, y), \mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y) + r(t)\mathcal{P}_\mu(t, x, y)\}$  amb  $r(t)$  de grau fitat per  $n - 2\mu$ , i produir una nova  $\mu$ -base.

La raó per la qual calcular  $\mu$ -bases és important no és solament perquè amb elles podem generar totes les rectes mòbils que segueixen a una parametrització (i en particular trobar  $\delta + 1$  linealment independents per omplir una matriu de rectes mòbils tal que el seu determinant ens dóna l’equació implícita), sinó que a més a més hi ha una connexió molt directa entre,  $\mu$ -bases, resultants, i l’equació implícita d’una parametrització. Aquest resultat va ser demostrat en [CSC98, Theorem 1].

**4 TEOREMA** Amb la notació anterior, es té:

$$\text{Res}_t(\mathcal{P}_\mu(t, x, y), \mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)) = E(x, y)^d. \quad (14)$$

Aquest teorema ens dóna un mètode per calcular matrius de rectes mòbils. En efecte, la majoria de les matrius que calculen resultants de Sylvester (per exemple,

les que es descriuen en [AJ06]), tenen en la seva codificació els coeficients de las rectes mòbils que son potències de  $t$  multiplicades pels elements d'una  $\mu$ -base.

També ens diu que la dimensió de la matriu de rectes mòbils serà de  $n \times n$ , ja que cada coeficient d'aquesta matriu és lineal respecte de  $(x, y)$ , i el grau de  $E(x, y)$  és genèricament  $n$ . Llavors, el valor de  $\delta$  esperat és  $\delta = n - 1$ , i precisament la matriu de Sylvester del parell  $\mathcal{P}_\mu(t, x, y)$ ,  $\mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)$  és una d'aquestes matrius.

Es pot calcular la resultant entre dos polinomis  $f(t)$  i  $g(t)$  amb matrius més petites que la presentada en (5). De fet, es pot reduir la dimensió d'aquesta matriu fins a gairebé a la meitat utilitzant un enginyós mètode donat pel Bézout i que consisteix en el següent: donats  $f(t)$  i  $g(t)$  tots dos de grau fitat per  $n$ , fem

$$\frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{x - y} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} x^i y^j.$$

Resulta que la resultant entre  $f$  i  $g$  també és el determinant de la matriu  $(a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n-1}$ . Aquesta matriu es coneix com a matriu de Bézout.

Hi ha connexions interessants entre totes aquestes formulacions. De fet, si denotem per  $\text{Sylv}_t$  (resp.  $\text{Bez}_t$ ) la matriu de Sylvester (resp. Bézout) per calcular la resultant de dos polinomis en la variable  $t$ , en [BD12, Proposition 6.1] vam demostrar amb Laurent Busé el següent:

5 TEOREMA *Existeix una matriu invertible  $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$  tal que*

$$\text{Sylv}_t(\mathcal{P}_\mu(t, x, y), \mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)) = M \cdot \text{Bez}_t(x \cdot x_D(t) - x_N(t), y \cdot y_D(t) - y_N(t)).$$

Aquest resultat mostra que essencialment les  $\mu$ -bases contenen la mateixa informació que la parametrització (6), i que la seva utilització pot simplificar formulacions ja conegudes per a les altres. També les  $\mu$ -bases codifiquen bastant bé propietats geomètriques de la parametrització, veure per exemple [CKPU13, CA15].

## 2 Còniques mòbils, cúbiques mòbils...

Qualsevol de les matrius que apareixen a l'enunciat del Teorema 5 té dimensió  $n$ , la qual cosa ens dóna una cota inferior pel mètode de implicitació per rectes mòbils. Es podrà aconseguir calcular l'equació implícita amb matrius més petites?

Una resposta a aquesta pregunta ve donada per formulacions més compactes per calcular la resultant com el determinant d'una matriu més petita. Per exemple, podríem utilitzar la matriu de Bézout del Teorema 5

$$\text{Bez}_t(\mathcal{P}_\mu(t, x, y), \mathcal{Q}_{n-\mu}(t, x, y)),$$

que té mida més petita ( $n - \mu$  files i columnes) que la matriu de Sylvester d'aquests polinomis. Notem que els coeficients d'aquesta matriu més compacta ja no codifiquen rectes mòbils com en el cas de la matriu de Sylvester, ja que seran quadràtics en  $x, y$ .

De tota manera, a causa de l'estructura especial de la matriu de Bézout (veure per exemple [SGD97]), es poden llegir en les files d'aquesta matriu els coeficients d'un polinomi que també s'anul·la quan s'especialitzen les variables  $x, y$  en la parametrització  $\phi$ . Això motiva la següent definició. Homogeneïtzarem totes les variables per poder controlar millor els graus i els invariants geomètrics del problema. Així doncs, nostra parametrització  $\phi$  vindrà donada per

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ (t_0 : t_1) &\mapsto (u_0(t_0, t_1) : u_1(t_0, t_1) : u_2(t_0, t_1)), \end{aligned} \quad (15)$$

on  $\mathbb{P}^1$  i  $\mathbb{P}^2$  denoten la recta i el pla projectiu sobre  $\mathbb{K}$  respectivament, i  $u_i(t_0, t_1)$ ,  $0 \leq i \leq 2$ , són polinomis homogenis del mateix grau sense factors comuns en  $\mathbb{K}[t_0, t_1]$ .

**6 DEFINICIÓ** Una corba mòbil de bi-grau  $(\delta, \nu)$  que segueix a la parametrització  $\phi$  donada en (15) és un polinomi homogeni en  $X_0, X_1, X_2$  de grau  $\nu$ , i també homogeni en  $t_0, t_1$  de grau  $\delta$ , tal que

$$\mathcal{L}(t_0, t_1, u_0(t_0, t_1), u_1(t_0, t_1), u_2(t_0, t_1)) = 0.$$

Si fem  $\nu = 1$ , recuperarem la definició de rectes mòbils que vam donar en (1). Si  $\nu = 2$ , el polinomi es diu una *cònica mòbil* que segueix a  $\phi$  ([ZCG99]). De la mateixa manera, denominarem *cúbiques mòbils* a les corbes amb  $\nu = 3$ , i així seguint.

Una sèrie de formulacions realitzades en els 90 pel Sederberg i seus col·laboradors va posar en evidència un fet interessant: es pot calcular l'equació implícita d'aquesta corba, que anomenarem  $\mathcal{C}$ , com el determinant d'una matriu de coeficients de corbes mòbils que segueixen a la parametrització. Aquest fet és fàcil de comprovar, el sorprenent és que les singularitats de la corba aparentment ajuden a determinar quina classe de corbes mòbils triar, i com més singular sigui la corba (és a dir, com més “complicades” siguin les singularitats), més simple és la descripció d'aquestes corbes mòbils. Per exemple, el següent resultat apareix en [SC95]:

**7 TEOREMA** L'equació implícita d'una corba racional de grau 4 parametritzada per polinomis “sense punts de base” (i.e. sense factors en comú) es pot expressar com el determinant de una matriu de  $2 \times 2$ . Si la corba no té un punt triple, llavors cada element del determinant és una cònica mòbil. Altrament, una fila és lineal i l'altra és cúbica.

Per il·lustrar aquest resultat, considerem els següents exemples.

**EXAMPLE** Signin

$$u_0(t_0, t_1) = t_0^4 - t_1^4, \quad u_1(t_0, t_1) = -t_0^2 t_1^2, \quad u_2(t_0, t_1) = t_0 t_1^3. \quad (16)$$

Aquests polinomis defineixen una parametrització  $\phi$  com en (15). Estudiant les singularitats de la corba definida per aquest polinomi, es veu fàcilment que  $(1 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^2$  és un punt de multiplicitat 3, veure Figura 4. En aquest cas, tenim -en

el llenguatge de les  $\mu$ -bases introduït abans- que  $\mu = 1$ , i es pot verificar també fàcilment que

$$\mathcal{L}_{1,1}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) = t_0 X_2 + t_1 X_1$$

és una recta mòbil que segueix a  $\phi$ . El lector pot també verificar fàcilment que la següent cúbica mòbil de bi-grau  $(1, 3)$  segueix a la parametrització:

$$\mathcal{L}_{1,3}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) = t_0(X_1^3 + X_0 X_2^2) + t_1 X_2^3,$$

i la matriu  $2 \times 2$  del Teorema 7 es pot construir amb els coeficients de les formes  $\mathcal{L}_{1,1}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2)$  i  $\mathcal{L}_{1,3}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2)$ , expressades com a polinomis en  $t_0, t_1$ :

$$\begin{pmatrix} X_2 & X_1 \\ X_1^3 + X_0 X_2^2 & X_2^3 \end{pmatrix}.$$

El determinant d'aquesta matriu ens dona l'equació implícita:  $X_2^4 - X_1^4 - X_0 X_1 X_2^2 = 0$ .

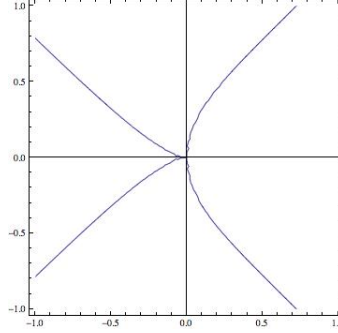


FIGURA 4: Gràfica de la corba parametritzada per (16)

EXEMPLE Reproduïm aquí l'Exemple 2.7 que apareix en [Cox08]. Considerem

$$u_0(t_0, t_1) = t_0^4, u_1(t_0, t_1) = 6t_0^2 t_1^2 - 4t_1^4, u_2(t_0, t_1) = 4t_0^3 t_1 - 4t_0 t_1^3. \quad (17)$$

Aquesta parametrització dóna una corba de grau 4 amb 3 nodes, veure Figura 5. Es pot verificar fàcilment que les dos següents còniques mòbils de grau 1 segueixen a la parametrització:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1,2}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) &= t_0(X_1 X_2 - X_0 X_2) + t_1(-X_2^2 - 2X_0 X_1 + 4X_0^2) \\ \tilde{\mathcal{L}}_{1,2}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) &= t_0(X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2 - 2X_0 X_1) + t_1(X_0 X_2 - X_1 X_2). \end{aligned}$$

Com en l'exemple anterior, la matriu  $2 \times 2$  dels coeficients d'aquestes còniques mòbils és una de les matrius del Teorema 7, i calculant explícitament el seu determinant, obtenim l'equació implícita:

$$X_2^4 + 4X_0 X_1^3 + 2X_0 X_1 X_2^2 - 16X_0^2 X_1^2 - 6X_0^2 X_2^2 + 16X_0^3 X_1 = 0.$$

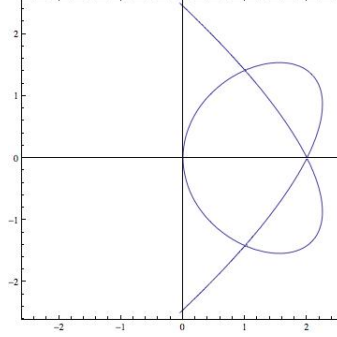


FIGURA 5: Gràfica de la corba parametritzada per (16)

### 3 L'ideal de corbes mòbils de $\phi$

Aquest és un bon moment per introduir algunes eines de l'àlgebra que ens ajudaran a comprendre les construccions geomètriques que hem presentat abans. Per exemple, el conjunt de totes les corbes mòbils que segueixen a una parametrització donada genera un ideal bihomogeni en  $\mathbb{K}[t_0, t_1, X_0, X_1, X_2]$  que anomenarem *l'ideal de les corbes mòbils* d'aquesta parametrització.

Tal com ho hem explicat anteriorment, el mètode de corbes mòbils per calcular l'equació implícita d'una corba donada per una parametrització racional, com en (15), busca proveir “receptes” de determinants de matrius les entrades de les quals són els coeficients de corbes mòbils que segueixen a la parametrització i que tenen grau baix en  $t_0, t_1$ . Per fer això, és d'utilitat tenir una descripció com en el Teorema 2 d'un conjunt de corbes mòbils “minimals”, a partir de les quals es puguin expressar tots els altres elements de l'ideal de corbes mòbils.

Afortunadament, l'àlgebra commutativa proveeix del llenguatge i les eines adequades per encarar aquest problema. En [Cox08], el David Cox va demostrar que buscar un conjunt minimal de corbes mòbils és el mateix que calcular un conjunt minimal de generadors del nucli  $\mathcal{K}$  del següent morfisme d'anells:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[t_0, t_1, X_0, X_1, X_2] & \longrightarrow & \mathbb{K}[t_0, t_1, z] \\ t_i & \longmapsto & t_i \quad i = 0, 1, \\ X_j & \longmapsto & u_j(t_0, t_1) z \quad j = 0, 1, 2. \end{array} \quad (18)$$

En aquesta definició,  $z$  és una nova variable. El següent resultat apareix en [Cox08, Nice Fact 2.4] (veure també [BJ03] per al cas en el qual  $\phi$  no és “genèricament” injectiva):

8 TEOREMA  $\mathcal{K}$  és l'ideal de corbes mòbils de  $\phi$ .

Analitzem una mica més d'aprop l'aplicació (18). Denotem amb  $I \subset \mathbb{K}[t_0, t_1]$  l'ideal generat per  $u_0(t_0, t_1), u_1(t_0, t_1), u_2(t_0, t_1)$ . La imatge de (18) és de fet isomorfa a l'objecte que en àlgebra commutativa s'anomena *l'àlgebra de Rees d'I*.

Per ser més precisos, donat un anell commutatiu  $R$  qualsevol i un ideal  $I \subset R$ , l'àlgebra de Rees d' $I$  es defineix com

$$\text{Ress}(I) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n \cdot z^n \subset R[z],$$

amb  $z$  una nova variable. Tornant a la nostra situació concreta de més amunt, utilitzant els teoremes de isomorfia estàndards de l'àlgebra, tenim que  $\mathbb{K}[t_0, t_1, X_0, X_1, X_2]/\mathcal{K}$  és isomorf a l'àlgebra de Rees de l'ideal  $I$ .

Des d'un punt de vista geomètric, l'àlgebra de Rees d'un ideal està associada segons el diccionari ideals  $\leftrightarrow$  varietats algebraïques, amb l'anomenat “blow-up” de la varietat definida per  $I$ . En el nostre cas, com els polinomis no tenen factors comuns,  $V(I)$  es en realitat la “varietat buida” que no té molt interès geomètric, però seria interessant entendre aquesta àlgebra per acabar confirmant matemàticament el que es veu experimentalment: en presència de singularitats molt especials de la corba parametritzada, la descripció de  $\mathcal{K}$  es simplifica.

Vegem amb més claredat això que hem dit sense molta precisió amb un exemple: el cas  $\mu = 1$  va ser exhaustivament estudiat per diversos autors: [HSV08, CHW08, Bus09, CD10]. Es té que  $\mu = 1$  si i solament si la parametrització és pròpia (és a dir la antiimatge de la fibra genèrica de (15) té cardinal 1) i hi ha un punt sobre la corba  $\mathcal{C}$  amb multiplicitat  $n - 1$ , que és la màxima multiplicitat que un punt pot tenir sobre una corba de grau  $n$ . Si és aquest el cas, llavors  $\mathcal{K}$  té exactament  $n + 1$  generadors minimals, una quantitat lineal en el grau de la corba.

Per  $\mu = 2$ , en Laurent Busé va demostrar en [Bus09], utilitzant tècniques de dualitat desenvolupades per Jouanolou en [Jou97], que per a tota parametrització d'una corba de grau  $n$  que té  $\mu = 2$  i solament punts dobles com a singularitats, el nucli  $\mathcal{K}$  es pot generar amb  $\frac{(n+1)(n-4)}{2} + 5$  elements i no menys. En l'altra situació, en un treball conjunt amb Teresa Cortadellas ([CD14], veure també [KPU13]), hem demostrat que si hi ha un punt de multiplicitat major que 2 (es pot demostrar que solament pot haver-hi un tal punt singular), llavors el nombre de generadors de  $\mathcal{K}$  es redueix a  $\lfloor \frac{n+6}{2} \rfloor$ , és a dir que la descripció d'aquest ideal és més simple en aquest cas. En ambdues situacions (sol punts dobles o un sol punt de multiplicitat molt alt) s'han calculat explícitament aquests generadors, veure [Bus09, CD14, KPU13].

A més a més, en tots dos casos ( $\mu = 1, 2$ ), s'han explicitat conjunts de generadors minimals de  $\mathcal{K}$  en funció de la parametrització  $\phi$ . Però per  $\mu \geq 3$ , sabem molt poc sobre la seva quantitat i els seus bi-graus. Denotem amb  $n_0(\phi)$  el *nombre zero de Betti* de  $\mathcal{K}$  (és a dir, el cardinal de qualsevol conjunt minimal de generadors d'aquest ideal). En [D'A15] vam proposar el següent problema del que tenim encara pocs resultats:

**PROBLEMA** Descriure tots els possibles valors de  $n_0(\phi)$  i els paràmetres dels quals depèn aquesta funció per a una parametrització pròpia  $\phi$  com en (15).

Per evitar confusions, recordem aquí que “propi”, en aquest context, significa que  $\phi$  és genèricament injectiva. Com a il·lustració d'aquest problema, hem explicat més amunt que per  $\mu = 1$ ,  $n_0(\phi) = n + 1$ , i si  $\mu = 2$ , el valor de  $n_0(\phi)$  depèn de si

hi ha un punt molt singular o no. Ens preguntem si  $n_0(\phi)$  és una funció que depèn únicament de  $n$ ,  $\mu$  i l'estructura de punts múltiples de  $\mathcal{C}$  o si hi ha encara altres paràmetres més intrínsecs dels quals depèn aquest valor.

Un problema més ambiciós que refina l'anterior és el següent: denotem amb  $\mathcal{B}(\phi) \subset \mathbb{N}^2$  el conjunt (contats amb “multiplicitats”) dels bi-graus d'un sistema minimal de generadors de  $\mathcal{K}$ .

**PROBLEMA** Descriure tots els valors possibles de  $\mathcal{B}(\phi)$ .

Per exemple, si  $\mu = 1$ , tenim (veure [CD10, Theorem 2.9]),

$$\mathcal{B}(\phi) = \{(0, n), (1, 1), (1, n-1), (2, n-2), \dots, (n-1, 1)\}.$$

També es té una descripció explícita de  $\mathcal{B}(\phi)$  en el cas  $\mu = 2$ , veure [Bus09, CD14, KPU13]. En aquesta situació, aquest conjunt depèn essencialment d'existència d'una singularitat de multiplicitat major que 2.

Per  $\mu = 3$ , la situació és més complexa, com mostra el següent exemple que apareix en [CD14]: considerem les parametritzacions  $\phi_1$  i  $\phi_2$  tel que que les seves  $\mu$ -bases són, respectivament,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{3,1}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) &= t_0^3 X_0 + (t_1^3 - t_0 t_1^2) X_1 \\ \mathcal{Q}_{7,1}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) &= (t_0^8 t_1 - t_0^2 t_1^5) X_0 + (t_0^4 t_1^3 + t_0^2 t_1^5) X_1 + (t_0^7 + t_1^7) X_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{3,2}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) &= (t_0^3 - t_0^2 t_1) X_0 + (t_1^3 + t_0 t_1^2 - t_0^2 t_1) X_1 \\ \mathcal{Q}_{7,2}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) &= (t_0^8 t_1 - t_0^2 t_1^5) X_0 + (t_0^4 t_1^3 + t_0^2 t_1^5) X_1 + (t_0^7 + t_1^7) X_2. \end{aligned}$$

Cadascuna d'aquestes parametritzacions descriu pròpiament una corba en el pla de grau 10 que té al punt  $(0 : 0 : 1)$  amb multiplicitat 7. La resta d'ells són o bé punts dobles o triples. Calculant explícitament, tenim:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\phi_1) &= \{(3, 1), (7, 1), (2, 3), (2, 3), (4, 2), (2, 4), (1, 6), (1, 6), (1, 6), (0, 10)\}, \\ \mathcal{B}(\phi_2) &= \{(3, 1), (7, 1), (2, 3), (2, 3), (4, 2), (2, 4), (\mathbf{1}, \mathbf{5}), (1, 6), (1, 6), (0, 10)\}. \end{aligned}$$

L'exemple posa en evidència que en general els paràmetres sobre els quals depenen  $n_0(\phi)$  i  $\mathcal{B}(\phi)$  i són més fins que solament el grau de la corba,  $\mu$  i les singularitats de la mateixa. Un altre exemple curiós que va ser estudiat en [CD13] és quan hi ha un generador minimal de bi-grau  $(1, 2)$  en  $\mathcal{K}$ . Allí es mostra que en aquesta situació, si  $\phi$  està parametritzada per polinomis de grau  $n$ , el conjunt  $\mathcal{B}(\phi)$  és “constant” i igual a

$$\begin{cases} \{(0, n), (1, 2), (1, n-2), (2, n-4), \dots, (\frac{n-1}{2}, 1), (\frac{n+1}{2}, 1)\} & \text{si } n \text{ és imparell} \\ \{(0, n), (1, 2), (1, n-2), (2, n-4), \dots, (\frac{n}{2}, 1), (\frac{n}{2}, 1)\} & \text{si } n \text{ és parell.} \end{cases}$$

També en [CD15] s'estudia amb detall  $n_0(\phi)$ ,  $\mathcal{B}(\phi)$  i altres invariants més profunds de parametritzacions de corbes “monomials”. En cada cas s'obtenen resultats molt particulars i bastant diferents entre sí. Seria interessant tenir un “diccionari global” que ens permeti entendre com canvien aquestes funcions  $n_0$  i  $\mathcal{B}$ , a mesura que els coeficients de la parametrització  $\phi$  va canviant.

Per definir pròpiament aquest “diccionari”, procedim com en [CSC98, Section 3]: per  $n \geq 1$ , denotem amb  $\mathbb{V}_n \subset \mathbb{K}[t_0, t_1]_n^3$  el conjunt de triplets de polinomis homogenis  $(u_0(t_0, t_1), u_1(t_0, t_1), u_2(t_0, t_1))$  definint una parametrització pròpia com en (15). Notarem que es pot considerar  $\mathbb{V}_n$  com un obert en una varietat algebraica a l’espai de paràmetres de la parametrització  $\phi$ . És més,  $\mathbb{V}_n$  podria prendre’s essencialment com el quocient d’un obert dens en  $\mathbb{K}[t_0, t_1]_n^3$  via l’acció de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{K})$  sobre els monomis  $t_0, t_1$ .

**PROBLEMA** Descriure els subconjunts de  $\mathbb{V}_n$  on  $\mathcal{B}(\phi)$  és constant.

Notem que naturalment la  $\mu$ -base està continguda en  $\mathcal{K}$ , i a més a més, es té ([BJ03, Proposition 3.6]):

$$\mathcal{K} = \langle \mathcal{P}_\mu(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2), \mathcal{Q}_{n-\mu}(t_0, t_1, X_0, X_1, X_2) \rangle : \langle t_0, t_1 \rangle^\infty,$$

o sigui que el rol de la  $\mu$ -base és crucial per estudiar  $\mathcal{K}$  i els seus generators. De fet, es sap que tot conjunt minimal de generators de  $\mathcal{K}$  conté una  $\mu$ -base, així que els parells  $(1, \mu)$ ,  $(1, n - \mu)$  són sempre elements de  $\mathcal{B}(\phi)$ . També ho és  $(0, n)$  que és el bi-grau de l’equació implícita. L’estudi de la geometria de  $\mathbb{V}_n$  com a funció del paràmetre  $\mu$  s’ha fet en [CSC98, Section 3] (veure també [Iar13, CI15]). A més a més, un molt interessant anàlisi de la  $\mu$ -base d’una parametrització amb  $\mu$  genèric ( $\mu = \lfloor n/2 \rfloor$ ) i punts singulars de molta multiplicitat s’ha fet en [CKPU13]. Seria interessant tenir resultats similars per a  $\mathcal{K}$ .

En aquest context, una possible manera de modelar una resposta a l’evidència experimental proveïda per Sederberg i els seus col·laboradors sobre el fet que com més singular és la corba, més simple és la descripció de  $\mathcal{K}$  es la següent: per  $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}_n$  denotem amb  $\overline{\mathbb{W}}$  la clausura de  $\mathbb{W}$  en la topologia de Zariski d’aquest espai.

**CONJETURA** Si  $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2 \subset \mathbb{V}_n$  són tals que  $n_0|_{\mathbb{W}_i}$  és constant per  $i = 1, 2$ , i  $\overline{\mathbb{W}}_1 \subset \overline{\mathbb{W}}_2$ , llavors

$$n_0|_{\mathbb{W}_1} \leq n_0|_{\mathbb{W}_2}.$$

Demostrar aquesta conjectura és equivalent a verificar que la funció  $n_0(\phi)$  és *semi-continua superiorment* en  $\mathbb{V}_n$  amb la topologia de Zariski. Com a conseqüència d’aquesta afirmació podríem demostrar el següent fet, que encara és un problema obert:

**CONJETURA** Sigui  $\mathbb{W}_\mu \subset \mathbb{V}_n$  l’obert de totes les parametritzacions pròpies de corbes amb  $\mu = \lfloor n/2 \rfloor$  i tal que totes les seves singularitats són punts dobles. Llavors,  $n_0(\phi)$  és constant en  $\mathbb{W}_\mu$ , i assoleix el seu valor màxim en aquesta varietat.

Noteu que un refinament de la primera conjectura que hem fet abans amb  $\mathcal{B}(\mathbb{W}_1) \subset \mathcal{B}(\mathbb{W}_2)$  no pot ser cert en general, com ho mostren els exemples calculats per  $\mu = 2$  en [Bus09, CD14, KPU13]: els bi-graus dels generators minimals de  $\mathcal{K}$  en el cas menys genèric no apareixen en el conjunt de bi-graus del cas general.

#### 4 Solament corbes racionals planes?

Al llarg d'aquest text hem treballat amb parametritzacions de corbes racionals planes, però el disseny assistit per ordinador també manipula corbes i superfícies a l'espai tridimensional, i la majoria dels conceptes, mètodes i propietats que hem mostrat fins ara es poden estendre en aquestes dues vies. La primera d'elles consisteix en considerar parametritzacions de superfícies racionals a l'espai, és a dir aplicacions de la forma

$$\begin{array}{ccc} \phi_S : & \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow \mathbb{P}^3 \\ (t_0 : t_1 : t_2) & \mapsto & (u_0(t_0, t_1, t_2) : u_1(t_0, t_1, t_2) : u_2(t_0, t_1, t_2) : u_3(t_0, t_1, t_2)) \end{array} \quad (19)$$

on  $u_i(t_0, t_1, t_2) \in \mathbb{K}[t_0, t_1, t_2]$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , són polinomis homogenis del mateix grau i sense factors comuns. Òbviament es pot estudiar també aplicacions com (19) en dimensions superiors, però restringirem la presentació a aquest cas. El motiu pel qual  $\phi_S$  no està necessàriament definida en tot  $\mathbb{P}^2$  és perquè tot i les condicions imposades en els polinomis  $u_i(t_0, t_1, t_2)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , l'aplicació pot no estar definida en tot el pla projectiu. Per exemple, si

$$u_0(t_0, t_1, t_2) = t_1 t_2, \quad u_1(t_0, t_1, t_2) = t_0 t_2, \quad u_2(t_0, t_1, t_2) = t_0 t_1, \quad u_3(t_0, t_1, t_2) = t_0 t_1 + t_1 t_2,$$

$\phi_S$  no estarà definida en el conjunt  $\{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}$  ja que en aquests punts s'anul·len tots els polinomis  $u_i(t_0, t_1, t_2)$ ,  $0 \leq i \leq 3$ .

Per a aquesta situació també hi ha mètodes per calcular l'equació implícita de la clausura de Zariski de la imatge de  $\phi_S$ , anàlegs als presentats abans per a corbes en el pla. Per exemple, es pot utilitzar una *resultant multivarada* o una resultant *sparse* (tal com es defineixen en [CLO05]) per calcular aquesta equació implícita. Altres eines de la teoria de l'eliminació com els *determinants de complexos* també poden ser utilitzats per produir matrius tals que el seu determinant (o quocient o màxim comú divisor d'alguns subdeterminants) dona aquest polinomi ([BJ03, BCJ09]). En els últims anys s'han estudiat també *matrius de representació* ([Bus14, ?]) d'aquestes parametrizacions, que són matrius no necessàriament quadrades, d'entrades polinomials, amb rang màxim, tals que al ser especialitzades les variables en punts de  $\mathbb{P}^3$ , el rang d'aquesta matriu decreix si i solament si el punt està en la superfície.

El mètode de les rectes i corbes mòbils presentat abans per a corbes en el pla té una versió denominada *mètode de plans i superfícies mòbils* que segueixen a  $\phi_S$ , i tant la seva descripció com l'anàlisi de la seva utilitat per la implicatització és bastant més complicat, ja que tant l'àlgebra com la geometria involucrats en aquesta situació tenen més dificultats, veure [SC95, CGZ00, Cox01, BCD03, KD06].

Per il·lustrar un d'aquests problemes, vegem un dels primers obstacles que ens apareixen en aquestes generalitzacions: encara que s'ha demostrat en [CCL05] que existeix un equivalent a les  $\mu$ -bases en aquest context, el càlcul d'elles no sembla ser tan fàcil de descriure com ho era en el cas de les corbes en el pla. Part del motiu d'aquesta dificultat és que el mòdul de syzygies o relacions dels polinomis

$u_i(t_0, t_1, t_2)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , ja no és lliure com en el cas de corbes, així que no té sentit parlar d'una *base* tal com la teníem en l'altre cas.

Tot i així, sorprenentment, si es fa  $t_0 = 1$  i es consideren aquests polinomis com a “afins” en 2 variables, el mòdul de syzygies sí que és lliure, però encara no és possible controlar els graus dels elements d'una  $\mu$ -base, es poden veure els detalls en [CCL05, Proposition 2.1]. Algunes descripcions explícites d'aquesta situació s'han fet per a parametritzacions de baix grau o amb certa estructura, veure per exemple [CSD07, WC12, SG12, SWG12], però el panorama general encara està sent explorat.

Una generalització de l'aplicació (18) associada a (19) també és directa, i podríem considerar l'ideal de definició de l'àlgebra de Rees associada a  $\phi_S$ . Molt poc es coneix sobre els generadors minimal del nucli  $\mathcal{K}$  en aquest context. En [CD10] vam estudiar el cas de *superfícies monoids*, que són aquelles superfícies racionals que tenen un punt amb la major multiplicitat possible (aquesta situació pot ser considerada com una generalització del cas  $\mu = 1$  per a corbes en el pla), i aquests resultats van ser generalitzats a parametritzacions denominades *de Jonquières* en [HS12].

També vam treballar en [CD10] (veure també [HW10]) amb el cas en el qual hi ha dos plans mòbils linealment independents de grau 1 que segueixen a la parametrització, amb altres condicions geomètriques (una altra possible generalització del cas  $\mu = 1$  per a corbes), però la descripció general de l'ideal de definició de l'àlgebra de Rees per al cas de superfícies és avui dia un àrea fèrtil plena de problemes oberts que conviden a la seva recerca.

L'altra possible direcció en la generalització de parametritzacions de corbes en el pla, és considerar corbes a l'espai, això vol dir aplicacions de la forma

$$\begin{aligned} \phi_C : \quad \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ (t_0 : t_1) &\longmapsto (u_0(t_0, t_1) : u_1(t_0, t_1) : u_2(t_0, t_1) : u_3(t_0, t_1)), \end{aligned}$$

on  $u_i(t_0, t_1) \in \mathbb{K}[t_0, t_1]$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , homogenis del mateix grau en  $t_0, t_1$ , i sense factors en comú. En aquest cas, la imatge de  $\phi_C$  és una corba en  $\mathbb{P}^3$ , i s'ha de reemplaçar “la” equació implícita d'abans (corbes en el pla) per “les” equacions implícites, ja que hi haurà més d'una (de la mateixa manera que les equacions implícites de la recta que passa per  $(1 : 0 : 0 : 1)$  i  $(0 : 0 : 0 : 1)$  en  $\mathbb{P}^3$  són  $X_1 = 0$  i  $X_2 = 0$ ).

Tal com va ser explicat en [CSC98], hi ha un anàleg dels teoremes 2 i 8 per aquesta situació, així que aquí hi ha més eines teòrics i computacionals per estudiar invariants de  $\phi_C$ . Per exemple, en [CKPU13], les singularitats d'una corba espacial es van estudiar com a funció d'una certa “forma canònica” de la  $\mu$ -base. Altres càlculs van ser realitzats en [KPU09] per explorar generalitzacions del cas  $\mu = 1$  per a corbes espacials i produir generadors de  $\mathcal{K}$  en aquest cas. Però aquests generadors no són minimal, i estan molt lluny de ser-ho.

Més abordatges del problema s'han fet en [JG09, HWJG10, JWG10] per alguns valors específics de graus dels generadors de la  $\mu$ -base, i en els treballs recents [Iar13, CI15], s'ha fet una primera estratificació en funció de  $\mu$  per estudiar certs

invariants d'aquestes parametritzacions en l'esperit dels problemes que hem proposat més amunt.

En conclusió, com el lector ha pogut segurament apreciar llegint aquest text, hi ha molt treball recent en aquest tema, i encara moltes preguntes obertes i problemes per resoldre. Esperem que en un futur no gaire llunyà puguem entendre de manera més global i profunda aquest tema, i ser capaços d'aplicar aquests resultats al disseny assistit per ordinador i altres àrees de la informàtica.

**AGRAÏMENTS** Agraïixo a Núria Fagella per haver-me convidat a escriure aquest article, i a Teresa Cortadellas Benítez per comentaris i correccions a una primera versió d'aquest text. Tots els gràfics en aquest text han estat realitzats per l'autor utilitzant el programa *Mathematica* ([Wol10]). Aquest treball ha estat finançat pel projecte MTM2014-56142-REDT del Ministerio de Economía y Competitividad de l'estat espanyol.

## Referències

- [AJ06] Apéry, F.; Jouanolou, J.-P. *Élimination: le cas d'une variable*. Collection Méthodes. Hermann Paris, 2006.
- [BCJ09] Busé, Laurent; Chardin, Marc; Jouanolou, Jean-Pierre. *Torsion of the symmetric algebra and implicitization*. Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), no. 6, 1855–1865.
- [BCD03] Busé, Laurent; Cox, David; D'Andrea, Carlos. *Implicitization of surfaces in  $\mathbb{P}^3$  in the presence of base points*. J. Algebra Appl. 2 (2003), no. 2, 189–214.
- [BD12] Busé, Laurent; D'Andrea, Carlos. *Singular factors of rational plane curves*. J. Algebra 357 (2012), 322–346.
- [BD15] Botbol, Nicolás; Dickenstein, Alicia. *Implicitization of rational hypersurfaces via linear syzygies: a practical overview*. J. Symbolic Comput., 74 (2016), 493–512.
- [BJ03] Busé, Laurent; Jouanolou, Jean-Pierre. *On the closed image of a rational map and the implicitization problem*. J. Algebra 265 (2003), no. 1, 312–357.
- [Bus09] Busé, Laurent. *On the equations of the moving curve ideal of a rational algebraic plane curve*. J. Algebra 321 (2009), no. 8, 2317–2344.
- [Bus14] Busé, Laurent. *Implicit matrix representations of rational Bézier curves and surfaces*. Comput. Aided Geom. Design, 46(0):14–24, 2014.
- [CA15] Casas-Alvero, Eduardo. *Syzygies and projective generation of plane rational curves*. J. Algebra 427 (2015), 183–214.
- [CCL05] Chen, Falai; Cox, David; Liu, Yang. *The  $\mu$ -basis and implicitization of a rational parametric surface*. J. Symbolic Comput. 39 (2005), no. 6, 689–706.

- [CD10] Cortadellas Benítez, Teresa; D’Andrea, Carlos. *Minimal generators of the defining ideal of the Rees Algebra associated to monoid parametrizations*. Comput. Aided Geom. Design 27 (2010), no. 6, 461–473.
- [CD13] Cortadellas Benítez, Teresa; D’Andrea, Carlos. *Rational plane curves parametrizable by conics*. J. Algebra 373 (2013) 453–480.
- [CD14] Cortadellas Benítez, Teresa; D’Andrea, Carlos. *Minimal generators of the defining ideal of the Rees Algebra associated to a rational plane parameterization with  $\mu = 2$* . Canad. J. Math. 66 (2014), no. 6, 1225–1249.
- [CD15] Cortadellas Benítez, Teresa; D’Andrea, Carlos. *The Rees Algebra of a monomial plane parametrization*. J. Symbolic Comput. 70 (2015), 71–105.
- [CDNR97] Capani, A.; Dominicis, G. De; Niesi, G.; Robbiano, L. *Computing minimal finite free resolutions. Algorithms for algebra (Eindhoven, 1996)*. J. Pure Appl. Algebra 117/118 (1997), 105–117.
- [CSD07] Chen, F.; Shen, L.; Deng, J. *Implicitization and parametrization of quadratic and cubic surfaces by  $\mu$ -bases*. Computing 79 (2007), no. 2-4, 131–142.
- [CGZ00] Cox, David; Goldman, Ronald; Zhang, Ming. *On the validity of implicitization by moving quadrics of rational surfaces with no base points*. J. Symbolic Comput. 29 (2000), no. 3, 419–440.
- [CHW08] Cox, David; Hoffman, J. William; Wang, Haohao. *Syzygies and the Rees algebra*. J. Pure Appl. Algebra 212 (2008), no. 7, 1787–1796.
- [CI15] Cox, David; Iarrobino, Anthony. *Rational strata of space curves*. Comput. Aided Geom. Design 32 (2015), issue C, 50–68.
- [CKPU13] Cox, David; Kustin, Andrew; Polini, Claudia; Ulrich, Bernd. *A study of singularities on rational curves via syzygies*. Mem. Amer. Math. Soc. Volume 222, Number 1045 (2013)
- [CLO05] Cox, David A.; Little, John; O’Shea, Donal. *Using algebraic geometry*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 185. Springer, New York, 2005.
- [CLO07] Cox, David; Little, John; O’Shea, Donal. *Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. Third edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2007.
- [Cox08] Cox, David A. *The moving curve ideal and the Rees algebra*. Theoret. Comput. Sci. 392 (2008), no. 1-3, 23–36.
- [Cox01] Cox, David A. *Equations of parametric curves and surfaces via syzygies*. Symbolic computation: solving equations in algebra, geometry, and engineering (South Hadley, MA, 2000), 1–20, Contemp. Math., 286, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

- [CSC98] Cox, David A.; Sederberg, Thomas W.; Chen, Falai. *The moving line ideal basis of planar rational curves*. Comput. Aided Geom. Design 15 (1998), no. 8, 803–827.
- [D'A15] D'Andrea, Carlos. *Moving curve ideals of rational plane parametrizations*. Lecture Notes in Computer Science, Vol 8942 “Computer Algebra and Polynomials”, 30–49 (2015).
- [HS12] Hassanzadeh, Seyed Hamid; Simis, Aron. *Implicitization of the Jonquières parametrizations*. J. Commut. Algebra 6 (2014), no. 2, 149–172.
- [HSV08] Hong, Jooyoun; Simis, Aron; Vasconcelos, Wolmer V. *On the homology of two-dimensional elimination*. J. Symbolic Comput. 43 (2008), no. 4, 275–292.
- [HSV09] Hong, Jooyoun; Simis, Aron; Vasconcelos, Wolmer V. *Equations of almost complete intersections*. Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 43 (2012), no. 2, 171–199.
- [HW10] Hoffman, J. William; Wang, Haohao. *Defining equations of the Rees algebra of certain parametric surfaces*. Journal of Algebra and its Applications, Volume: 9, Issue: 6(2010), 1033–1049
- [HWJG10] Hoffman, J. William; Wang, Haohao; Jia, Xiaohong; Goldman, Ron. *Minimal generators for the Rees algebra of rational space curves of type  $(1, 1, d - 2)$* . Eur. J. Pure Appl. Math. 3 (2010), no. 4, 602–632.
- [Iar13] Iarrobino, Anthony. *Strata of vector spaces of forms in  $k[x, y]$  and of rational curves in  $\mathbb{P}^k$* . Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 45 (2014), no. 4, 711–725.
- [JG09] Jia, Xiaohong; Goldman, Ron.  *$\mu$ -bases and singularities of rational planar curves*. Comput. Aided Geom. Design 26 (2009), no. 9, 970–988.
- [Jou97] Jouanolou, J. P. *Formes d'inertie et résultant: un formulaire*. Adv. Math. 126 (1997), no. 2, 119–250.
- [JWG10] Jia, Xiaohong; Wang, Haohao; Goldman, Ron. *Set-theoretic generators of rational space curves*. J. Symbolic Comput. 45 (2010), no. 4, 414–433.
- [KD06] Khetan, Amit; D'Andrea, Carlos. *Implicitization of rational surfaces using toric varieties*. J. Algebra 303 (2006), no. 2, 543–565.
- [KPU09] Kustin, Andrew R.; Polini, Claudia; Ulrich, Bernd. *Rational normal scrolls and the defining equations of Rees Algebras*. J. Reine Angew. Math. 650 (2011), 23–65.
- [KPU13] Kustin, Andrew; Polini, Claudia; Ulrich, Bernd. *The bi-graded structure of Symmetric Algebras with applications to Rees rings*. [arXiv:1301.7106](https://arxiv.org/abs/1301.7106) .
- [SC95] Sederberg, Thomas; Chen, Falai. *Implicitization using moving curves and surfaces*. Proceedings of SIGGRAPH, 1995, 301–308.

- [SG12] Shi, Xiaoran; Goldman, Ron. *Implicitizing rational surfaces of revolution using  $\mu$ -bases*. Comput. Aided Geom. Design 29 (2012), no. 6, 348–362.
- [SGD97] Sederberg, Thomas; Goldman, Ron; Du, Hang. *Implicitizing rational curves by the method of moving algebraic curves*. Parametric algebraic curves and applications (Albuquerque, NM, 1995). J. Symbolic Comput. 23 (1997), no. 2-3, 153–175.
- [STD94] Sederberg, Thomas W., Takafumi Saito, Dongxu Qi, and Krzysztof S. Klimaszewski. *Curve Implicitization using Moving Lines*. Computer Aided Geometric Design, 11:687–706, 1994.
- [SW91] Sendra, J. Rafael; Winkler, Franz. *Symbolic parametrization of curves*. J. Symbolic Comput. 12 (1991), no. 6, 607–631.
- [SWG12] Shi, Xiaoran; Wang, Xuhui; Goldman, Ron. *Using  $\mu$ -bases to implicitize rational surfaces with a pair of orthogonal directrices*. Comput. Aided Geom. Design 29 (2012), no. 7, 541–554.
- [SWP08] Sendra, J. Rafael; Winkler, Franz; Pérez-Díaz, Sonia. *Rational algebraic curves. A computer algebra approach*. Algorithms and Computation in Mathematics, 22. Springer, Berlin, 2008.
- [Syl53] Sylvester, James Joseph. *On a theory of syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's function and that of the greatest algebraical common measure*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Part III (1853), 407–548. Appears also in Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester, Vol. 1, Chelsea Publishing Co. (1973) 429–586.
- [vH95] van Hoeij, Mark. *Rational parametrizations of algebraic curves using a canonical divisor*. Parametric algebraic curves and applications (Albuquerque, NM, 1995). J. Symbolic Comput. 23 (1997), no. 2–3, 209–227.
- [WC12] Wang, Xuhui; Chen, Falai. *Implicitization, parameterization and singularity computation of Steiner surfaces using moving surfaces*. J. Symbolic Comput. 47 (2012), no. 6, 733–750.
- [Wol10] Wolfram Research, Inc. *Mathematica*, Version 8.0, Champaign, IL (2010).
- [ZCG99] Zhang, Ming; Chionh, Eng-Wee; Goldman, Ronald N. *On a relationship between the moving line and moving conic coefficient matrices*. Comput. Aided Geom. Design 16 (1999), no. 6, 517–527.

<http://atlas.mat.ub.es/personals/dandrea>