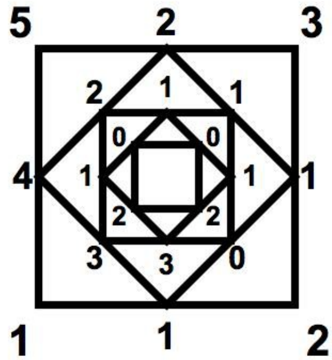
Un cuadrado, cuatro números

Carlos D'Andrea & Adrián Paenza



Resumen: *Presentamos una curiosidad aritmética muy sencilla de enunciar y fácil de experimentar, cuya resolución involucra herramientas matemáticas elementales "y de las otras". Exploramos varias preguntas asociadas a este enunciado, y dejamos varias más planteadas para ejercicio del lector.*

Palabras clave: *juego, estrategias, principio del mínimo, iteraciones, sucesión de Tribonacci, números de Ducci.*

Imagínese en un lugar en donde no le queda más alternativa que sentarse y esperar: en una estación de tren o de autobús, en un aeropuerto, o incluso adentro de un avión o del propio tren. O quizás en la sala de espera de un dentista o de un médico. Usted está entre aburrida/aburrido y tranquila/tranquilo. Tiene un lápiz y un papel y quisiera encontrar algo que la/lo entretenga, algo que le ayude a que 'el tiempo pase más rápido'.

Entonces se encuentra con un problema como el que sigue, y sin ofrecer demasiada resistencia, se propone a seguir las instrucciones. En definitiva, ¿qué se puede perder? Tiempo es lo que 'me/le' sobra. Hagámoslo juntos.

- *"Tome un cuadrado".* Lo tomo.
- *"Ponga un número cualquiera en cada vértice".* Lo pongo.
- *"Concéntrese en un lado cualquiera del cuadrado. Ahora hay solamente dos vértices involucrados. Cada uno tiene un número asociado. Reste el número más pequeño del más grande y anote el resultado en el punto medio de ese lado (si son iguales, anotará un 0)."*
- *"Repita este proceso con los 4 lados del cuadrado".* Me lleva un poco de tiempo (poco), pero me sale fácil (es que había elegido números pequeños).
- "*Ahora usted tiene otros 4 números que están ubicados en los puntos que marcan la mitad de cada uno de los lados del cuadrado original. Con estos 4 puntos, uno puede imaginar un nuevo cuadrado incluido en el cuadrado original."*

- *“Repita ahora el proceso con los 4 nuevos números”.* Lo hago. Como no sabía que tendría que escribir tantos números y trazar tantos segmentos, tuve que empezar de nuevo. Elegí ahora un cuadrado más grande. No me importó demasiado porque tenía (y aún tengo) mucho tiempo por delante.... ¿Y ahora, qué?
- *“Siga con el proceso que en cada paso le sirve para obtener un nuevo cuadrado y 4 nuevos números. ¿Alcanza a ver algún patrón? ¿Algo que le llame la atención?”.*

Sí, acabo de ‘descubrir algo’. Voy a empezar de nuevo, con otro cuadrado y otros 4 números porque lo que apareció me parece muy raro.

Después de intentar con varios cuadrados, aunque esencialmente lo que resulta obvio es que no son los cuadrados sino los números con los que etiqueté cada vértice, empiezo a sospechar que hay algo que me sorprende. ¿Será verdad? ¿No habrá dependido *fuertemente* de los números que elegí? Y sí.. depende... dependió seguro, pero... me asaltan muchísimas preguntas. El tiempo empezó a pasar más rápido pero ni siquiera me di cuenta. No sé si tengo suficiente papel y no tengo claro si quiero que ésto me distraiga demasiado de la actividad por la que estoy aquí (avión, tren, autobús, dentista, doctor, oculista... lo que sea)... pero ahora no quiero interrumpir. Esto que acabo de ver me tiene perplejo: ¡no puede ser cierto *siempre!* ¿O sí?

Lo fascinante de este problema es que se presenta con total *ingenuidad.* Lo más probable es que uno no le preste demasiada atención. Sin embargo, ‘pica’... o ‘muerde’... y después, ‘no suelta’. Hay muchísimas preguntas asociadas; nosotros enumeraremos algunas. Pero si hay algo que podemos proponerle (a usted... sí, a usted) es que más allá de lo que nosotros escribamos más abajo, el verdadero *placer* está en descubrir los miles de caminos que se presentan delante suyo en soledad. Podemos asegurarle que hay varias conclusiones que uno estaría dispuesto a apostar dinero que son ciertas y que no lo son, y quizás otras, que parecen imposibles, pasan. Pero, ¿qué gracia tiene si se las contamos nosotros?

En todo caso, le proponemos un trato: el artículo que sigue contesta *algunas* preguntas... solo algunas. Lo que **no** podemos hacer, es contestar las suyas. Y el trato consiste en que nos tenga confianza y nos crea: solamente recurra a leer lo que escribimos nosotros si llega a un punto en donde siente que está ‘metida (o metido) en el barro y no puede salir’, o si quiere comparar cómo resolvimos nosotros algo que quizás usted resolvió probablemente mucho más fácilmente. Y una última observación: escribir lo que sigue, nos llevó muchísimo tiempo, pero no por el tiempo de escritura propiamente dicho, sino por el tiempo que tuvimos que invertir para *pensar cómo resolver el problema.* Y ese placer solamente se lo puede proveer uno mismo. No se lo pierda.

Una solución (para números enteros)

Supongamos que usted razonablemente decidió que su universo de *números disponibles* para este *juego* son los números enteros {...,-2, -1, 0, 1, 2, 3,...}. Una primera observación es que aunque hayamos comenzado con uno o algunos números negativos en los vértices del cuadrado, todos los otros números que aparezcan después en el juego serán positivos o cero, así que bien podríamos suponer que estamos "jugando" siempre con enteros no negativos, lo cual es una gran ventaja ya que este conjunto es el lugar natural donde el principio del mínimo (o su equivalente, el principio de inducción) puede ser utilizado para "acabar" con ciertos procesos en un número finito de pasos. Vamos a ver cómo -aplicando este principio con cierto cuidado- podremos encontrar una respuesta.

Pero para *resolver* un problema, primero necesitamos un *enunciado*, y el que proponemos (y esperamos que usted haya llegado a la misma conclusión o a alguna equivalente a ella) es el siguiente: *"sin importar cuáles fueron los 4 números iniciales que pusimos en los vértices del primer cuadrado, en una cantidad finita de pasos, conseguiremos un cuadrado que tendrá 4 ceros en sus vértices."* Y a partir de allí, claro, el juego se habrá acabado porque habremos llegado a una situación estable, todos los cuadrados que le sigan tendrán 4 ceros en sus vértices.

Una manera de utilizar el principio del mínimo para resolver este problema podría ser la siguiente: dado que los números iniciales que hay en los vértices del cuadrado -que de aquí en adelante llamaremos **a**,**b**,**c** y **d**- son todos enteros no negativos, decir que son todos iguales a cero es lo mismo que decir que el máximo entre ellos es igual a cero,

$$\max\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}=0.$$

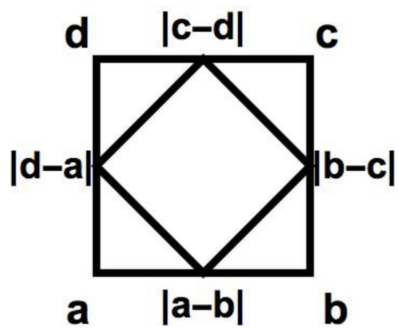
Hecha esta observación, llamemos **a'**,**b'**,**c'** y **d'** a los nuevos números que aparecen -en algún orden- en el cuadrado formado por los puntos medios de los lados del que tenía **a**,**b**,**c** y **d** en los vértices. Si uno pudiera demostrar lo siguiente:

$$\max\{\mathbf{a'},\mathbf{b'},\mathbf{c'},\mathbf{d'}\} < \max\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\} \qquad (*)$$

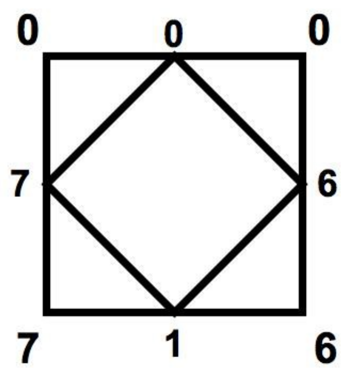
(siempre y cuando el número de la derecha sea estrictamente positivo), entonces el problema estaría resuelto, e incluso sabríamos que a lo sumo en max{**a**,**b**,**c**,**d**} pasos habríamos llegado a tener (0,0,0,0).

Calculando explícitamente **a'**,**b'**,**c'** y **d'** en función de **a**, **b**, **c** y **d** (ver figura) se deduce fácilmente que

$$\max\{\mathbf{a'},\mathbf{b'},\mathbf{c'},\mathbf{d'}\}\leq \max\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}.$$



Pero es muy fácil construirse una situación donde no hay una desigualdad estricta, por ejemplo la siguiente:



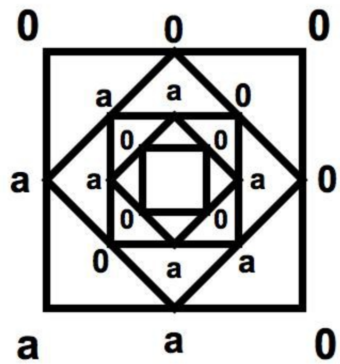
O sea que nuestra “pista inicial” no va a ser tan fácil de seguir a menos que tengamos un cierto cuidado en el análisis de los casos que hacen que la desigualdad se convierta en igualdad. Y esto es lo que haremos. Lo invitamos a pensar primero cuáles son esos casos, y cómo se podrían resolver. Lo que sigue es nuestro camino, pero seguro que hay otros más elegantes, simples e interesantes que el nuestro. Por eso le sugerimos que no se pierda la oportunidad de conocerlos intentándolos usted en soledad antes de continuar leyendo esta nota.

Y aquí vamos nosotros. Comencemos por el caso “genérico”, el que aparecerá con más frecuencia por ejemplo si uno elige sus números enteros al azar, que es cuando **a**,**b**,**c** y **d** son todos distintos de cero. Aquí sí que la desigualdad será estricta, como le será fácil de demostrar viendo cómo se escriben los números **a'**, **b'**, **c'** y **d'** que aparecen en la figura de arriba. Así que en esta situación no hay nada que nos complique la vida, la desigualdad deseada (*) se cumple, y el máximo “baja”.

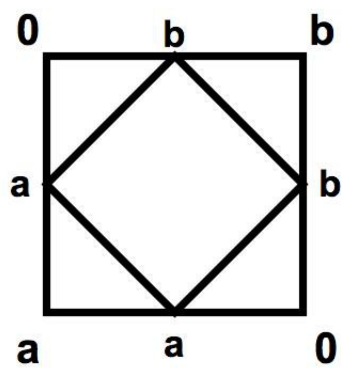
El problema se nos presenta cuando nos aparece algún cero entre los vértices. ¿Cómo se “sale de allí”? Analicemos los posibles casos:

<u>3 ceros:</u> en esta situación, como se ve en la figura que sigue, es fácil verificar que 4 cuadrados más adelante habremos llegado a tener ceros en todos los vértices. Con lo cual, no solamente conseguimos “bajar” el máximo (que es **a** en

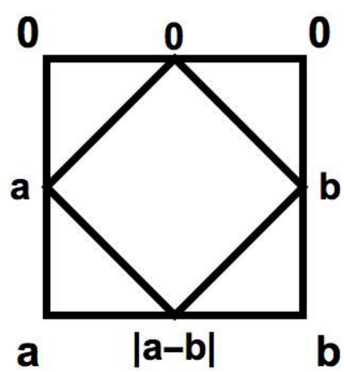
este caso) sino que en realidad... ¡el juego se acaba 4 pasos más adelante! Esto es una gran ventaja.



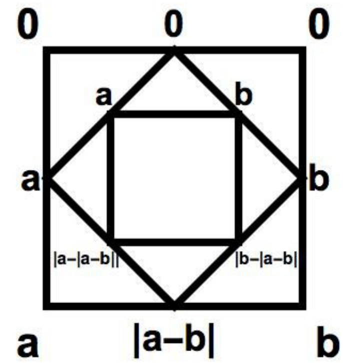
<u>2 ceros:</u> aquí se ha de distinguir si los ceros son “consecutivos” o no. En el caso en que no lo sean, la situación es fácil de resolver ya que como se ve en la figura que sigue, el cuadrado siguiente tendrá en sus vértices 4 números estrictamente positivos, así que en un paso más habrá “bajado” el máximo como vimos en el caso “genérico” tratado más arriba.



Si los ceros son consecutivos, el siguiente cuadrado será así:

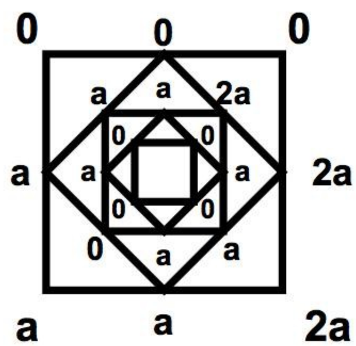


Si **a**=**b**, estaremos en la misma situación que el caso anterior -dos ceros no consecutivos- con lo cual el máximo bajará dos cuadrados más adelante.
Si **a**≠**b**, un cuadrado más adelante nos encontraremos con lo siguiente:



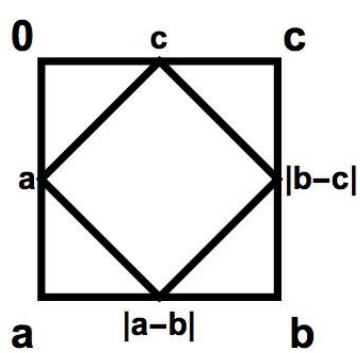
Observe que como estamos asumiendo **a**≠**b**, todos los números en los vértices del cuadrado más pequeño serán ahora distintos de cero excepto en los casos en que 2**a**=**b** o 2**b**=**a**. Si no estamos en esta situación singular (es decir, si todos los vértices del tercer cuadrado son estrictamente positivos), en el próximo cuadrado conseguiremos bajar el máximo.

Si ocurriera que 2**a**=**b** (el otro caso se resuelve de manera análoga), entonces en 4 pasos más habremos acabado el juego, como se ve en la figura siguiente:



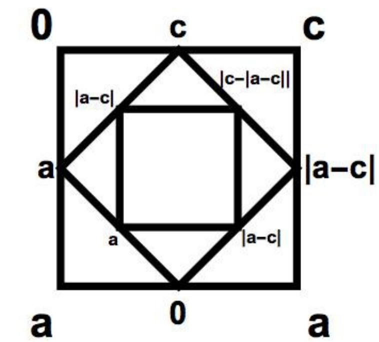
O sea que estos dos casos singulares también están cubiertos, y con ello hemos mostrado que en la situación en la que hay dos ceros entre los vértices del cuadrado, siempre en un número finito de pasos (menor que 5) se consigue bajar el máximo.

<u>1 cero:</u> en este caso, el siguiente cuadrado será:

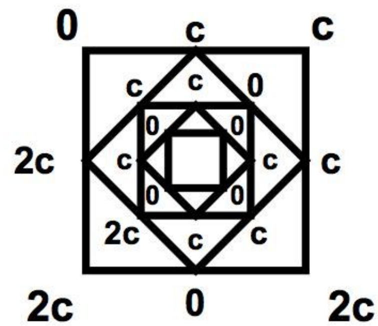


Si **a**≠**b** y **b**≠**c**, el cuadrado más pequeño tendrá 4 números estrictamente positivos, y tal como razonamos al principio de esta sección, en el próximo paso conseguiremos bajar el máximo de estos números. Por otro lado, si **a**=**b**=**c**, obtendremos un cuadrado con dos ceros consecutivos, que ya hemos estudiado antes, y el análisis hecho para ese caso nos dice ahora que 4 cuadrados más adelante a partir del segundo, habremos conseguido bajar el máximo.

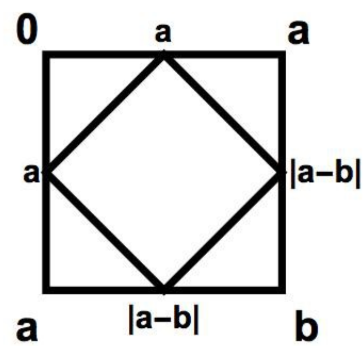
Solamente resta analizar qué pasa si **a**=**b**≠**c** (que tiene el mismo análisis que **c**=**b**≠**a**), o **a**=**c**≠**b**. En el primer caso, se tiene este esquema:



Como antes, si 2**c**≠**a**, los 4 números del cuadrado más pequeño en la figura serán todos positivos, y por lo tanto en el cuarto cuadrado el máximo bajará. El caso 2**c**=**a** nos dice que 4 cuadrados más adelante habremos conseguido bajar el máximo (y en el quinto paso acabaremos), ya que se tendrá:



Finalmente, para **a**=**c**≠**b**, se tiene el siguiente diagrama:



y aquí se ve fácilmente que el segundo cuadrado tiene sus 4 vértices positivos, así que en un paso más su máximo bajará.

Luego de este largo y minucioso análisis podemos concluir con el siguiente

*<u>Teorema:</u> Comenzando con 4 números enteros no negativos **a**,**b**,**c**,**d** en los vértices del cuadrado, si no son todos iguales a cero, denotando con **a'**,**b'**,**c'**,**d'** los números que aparecerán en los vértices del cuadrado (en algún orden) que se encuentra 5 veces más adelante en el juego, se tendrá*

$$\max\{a',b',c',d'\} < \max\{a,b,c,d\}.$$

*<u>Corolario:</u> Comenzando con cualquier cuaterna de números enteros (**a**,**b**,**c**,**d**) sobre los vértices de un cuadrado, en 5 veces $\max\{|a|,|b|,|c|,|d|\}$ obtendremos la situación estable (0,0,0,0).*

¿Solamente números enteros?

El argumento de arriba se puede adaptar bien a números racionales, ya que multiplicando por el denominador común de **a**,**b**,**c** y **d** uno podría llevar los números de los vértices del cuadrado inicial a ser todos enteros, y se llegará a (0,0,0,0) en la misma cantidad de pasos que con los números racionales del principio. Esto no es más que una manifestación de la "homogeneidad" del juego, ya que se ve fácilmente que si uno multiplica todos los números del cuadrado inicial por un escalar cualquiera (real o complejo), los números que aparecen en todos los cuadrados que siguen se multiplican por el valor absoluto de este escalar. Y si este escalar es no nulo, la situación estable (0,0,0,0) aparece al mismo tiempo en el juego original que en el "re-escalado".

Yendo más en general aún, se nos ocurren varias preguntas asociadas a este juego, y seguramente a usted se le ocurrirán varias más. He aquí algunas de ellas:

- ¿será verdad que el juego "se acaba siempre" si comenzamos con números reales o complejos cualesquiera?
- Si es así, ¿en cuántos pasos acabaremos?
- ¿Hay un número **N**>0 para el cual sea cierto lo siguiente: "con cualquier dato inicial (**a**,**b**,**c**,**d**), luego de **N** pasos estaremos en (0,0,0,0)"?
- Si lo anterior no es cierto.... ¿podría usted dado un **N**>0 cualquiera, construirse un dato inicial (a_N, b_N, c_N, d_N) tal que luego de **N** pasos todavía no hayamos llegado al (0,0,0,0) comenzando con estos valores?

Con la ayuda de alguna calculadora o programa de cálculo simbólico, pruebe usted utilizando sus números irracionales favoritos ($\sqrt{2}$, e, π,...) y saque sus propias conclusiones. Nosotros en lo que sigue le vamos a dar unas pistas más, pero por favor no se prive usted de experimentar antes.

Números de Tribonacci

Aquí volvemos con más, y fíjese la aparición inesperada de esta sucesión de la cual quizás nunca haya oído hablar en su vida: definimos $\{\mathbf{t_n}\}_{n\geq 0}$ como sigue:

$$\mathbf{t_0}=0,\ \mathbf{t_1}=1,\ \mathbf{t_2}=1 \text{ y } \mathbf{t_n}=\mathbf{t_{n-1}}+\mathbf{t_{n-2}}+\mathbf{t_{n-3}} \text{ para } n\geq 3.$$

Por motivos que esperamos no le resulten extraños, esta secuencia se llama "de Tribonacci", y sorprendentemente cumple con esta propiedad que no le será difícil de demostrar usando inducción (ver [Web1982]):

"Comenzando con *($\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$,$\mathbf{d}$)=($\mathbf{t_n}$,$\mathbf{t_{n-1}}$,$\mathbf{t_{n-2}}$,$\mathbf{t_{n-3}}$) para n≥3, recién se arriba al (0,0,0,0) luego de 3[n/2] pasos*".

¿Sorprendente, verdad? Igual usted todavía puede dudar sobre la "finitud" del juego. Esto es, el enunciado que acabamos de mostrarle no contradice el hecho de que, comience donde comience, en un número finito de pasos (ahora ya sabemos que puede ser un número tan grande como a uno se le pueda ocurrir) el juego se acabará. De hecho, todos los números de Tribonacci son enteros así que el teorema que enunciamos más arriba ya nos garantizaba que en algún momento íbamos a llegar al (0,0,0,0). ¿Ocurrirá ésto también si comenzamos con cualquier cuaterna (**a**,**b**,**c**,**d**) de números reales? De momento ya sabemos que hay un conjunto denso de $\mathbf{R}^4$ (el de las cuaternas racionales) donde sabemos que el problema se resuelve en un número finito de pasos. ¿Será verdad esta propiedad para todo $\mathbf{R}^4$?

Con un poco más de esfuerzo se puede demostrar que lamentablemente (o afortunadamente dependiendo de cual haya sido su conjetura) ésto último no es cierto. De hecho, gracias a la homogeneidad del problema comentada más arriba, y "pasando al límite" del cociente $\mathbf{t_n}/\mathbf{t_{n-1}}$ (con el mismo proceso con el cual uno demuestra que el límite del cociente de 2 términos consecutivos en la sucesión de Fibonacci es el número de oro $(1+\sqrt{5})/2$), se obtendrá la única raíz positiva del polinomio x^3-x^2-x-1. Llamemos a esa raíz $\mathbf{q}\approx 1{,}839286755...$

Lo siguiente tampoco le será difícil de demostrar, utilizando las propiedades algebraicas del número **q** o las propiedades de la sucesión de Tribonacci que "pasan al límite" (ver [Lotan 1949]):

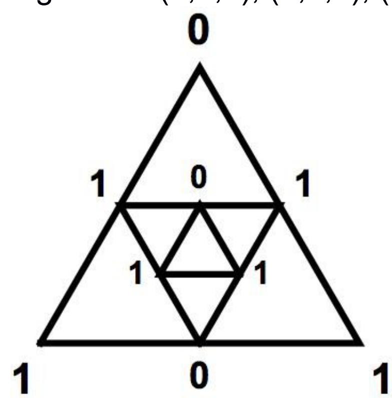
<u>Teorema:</u> *comenzando con ($\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$,$\mathbf{d}$)=(1,$\mathbf{q}$,$\mathbf{q}^2$,$\mathbf{q}^3$), sucesivamente todos los cuadrados del juego tendrán entre sus vértices un múltiplo no nulo de (1,$\mathbf{q}$,$\mathbf{q}^2$,$\mathbf{q}^3$).*

<u>Corolario:</u> *existe un "dato inicial" ($\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$,$\mathbf{d}$) para el cual el juego no se acaba nunca.*

¿Solamente cuadrados?

Este apartado nos lo sugirió Leandro Cagliero, de la Universidad de Córdoba (Argentina). Uno podría pensar en una "simplificación" del problema y reemplazar el cuadrado por un triángulo equilátero. O, si se quiere ser audaz, puede plantearse la misma situación sobre pentágonos, hexágonos,... un polígono regular de L lados, y preguntarse por la evolución del juego... Por ejemplo, podemos preguntarnos si acabaremos siempre en una situación estable al comenzar con números enteros. Y si es así, si será el vector nulo de $\mathbf{R}^L$ esta solución estacionaria.

Jugando un poco con el triángulo equilátero ya nos encontramos con una situación inesperada: si comenzamos poniendo (1,1,0) en los vértices, el juego será "cíclico" de la manera siguiente: (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0),...

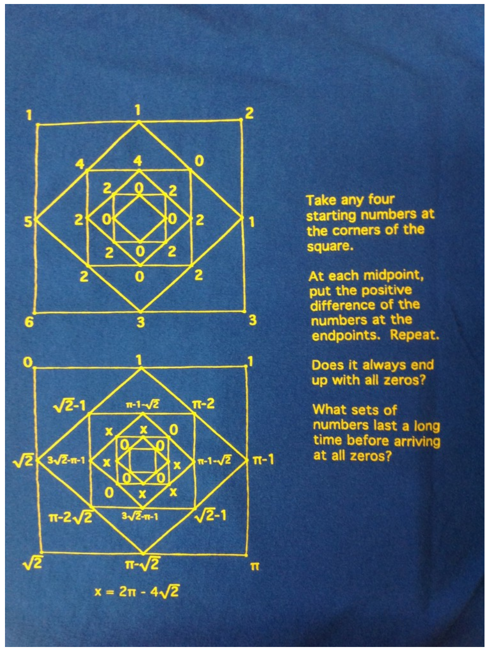


Lo invitamos a encontrar ciclos de este tipo en pentágonos, hexágonos y heptágonos.   Otro experimento que puede hacer es el siguiente: pruebe poniendo 3 números de Fibonacci consecutivos en los vértices del triángulo, y fíjese cómo evoluciona el juego... ¿No le parece sorprendente? ¿Se le ocurre cómo se debería generalizar ésto para pentágonos, hexágonos, etc?

Otras preguntas que se podría plantear son las siguientes: ¿para qué valores de L se tiene que el juego se acaba siempre en (0,0,0,0) comenzando con cualquier L-upla de números enteros o racionales? ¿Y qué pasa en general, con una L-upla de números reales cualesquiera? Si uno comienza con un dato inicial cualquiera, ¿converge siempre el juego a un ciclo o una solución estable?

Los 4 números de Ducci

Este problema cayó en nuestras manos de la mano de Emiliano Gómez, de la Universidad de California en Berkeley. Emiliano se encontró en una feria de profesores de matemática en California con esta camiseta:



Por un buen tiempo pensamos que tenía que haber una solución “simple y elemental” al problema (¿por qué si no alguien la propondría en una camiseta?), y nos lanzamos a la búsqueda de ella. En el camino nos acompañaron el mismo Emiliano, Florian Enescu de Georgia State University, y José Ignacio Burgos del ICMAT de Madrid. Todo un lujo de equipo... Fue una gran sorpresa habernos encontrado con que el planteo y la resolución del problema involucraban herramientas de álgebra lineal elementales como valores y vectores propios, números de Tribonacci y soluciones que no son estables. Averiguando más sobre el tema, nos enteramos que éste es uno de esos problemas que tiene “nombre y apellido”: *el problema de los 4 números de Ducci.* La resolución total del mismo, así como respuestas y experimentos a varias de las preguntas que le hemos propuesto durante este escrito y otras que seguramente usted se habrá hecho, las encontrará en cualquiera de las referencias que siguen, y seguro que hay mucho más escrito sobre el tema “en el aire”. ¡A disfrutar!

Agradecimientos: *Una primera versión de este manuscrito fue enriquecida con muy valiosos comentarios y correcciones hechas por Leandro Cagliero de la Universidad de Córdoba (Argentina), Teresa Cortadellas de la Universitat de Barcelona, Alicia Dickenstein de la Universidad de Buenos Aires, Emiliano Gomez de la Universidad de California en Berkeley, Juan Carlos Naranjo de la Universitat de Barcelona y Juan Pablo Pinasco de la Universidad de Buenos Aires. A todos ellos, nuestra infinita gratitud.*

Bibliografía

[BKP 2005] Antonio Behn, Christopher Kribs-Zelta, Vadim Ponomarenko. The Convergence of Difference Boxes. The American Mathematical Monthly, Vol. 112, No. 5 (May, 2005), 426-439.

[Berlekamp 1975] Elwyn R. Berlekamp, The Design of Slowly Shrinking Labelled Squares, Mathematics of Computation, Volume 29, Number 129, January 1975, 25-27.

[BM 2007] Ron Brown, Jonathan L. Merzel, The Length of Ducci's Four-Number Game. Rocky Mountain Journal of Mathematics, Volume 37, Number 1, 2007.

[Chamberland 2015] Marc Chamberland, Single Digits: In Praise of Small Numbers. Princeton University Press, 2015.

[Lotan 1949] Moshe Lotan, A Problem in Difference Sets, The American Mathematical monthly, Vol. 56, No. 8 (Oct. 1949), 535-541.

[Meyers 1982] Leroy F. Meyers, Ducci's Four-Number Problem: A Short Bibliography. Crux Mathematicorum (1982) Vol. 8, No. 9, 262-266.

[Shapiro 2005] Daniel Shapiro, The Four-Number Game. Disponible en línea: *https://people.math.osu.edu/shapiro.6/4NumbersGame.pdf*

[Webb 1982] William A. Webb, The Length of the Four-Number Game. Fibonacci Quart. 20 (1982), 33-35.

Sobre los autores:

Carlos D'Andrea *es Professor Agregat en la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. Email: cdandrea@ub.edu*

Adrián Paenza *es doctor en matemáticas y periodista. Ha recibido el Premio Leelavati de la International Mathematical Union en 2014 por su trabajo en la divulgación pública de las matemáticas. Email: paenza@elosoproducciones.com.ar*