El Problema de Interpolación Racional y el Algoritmo de Euclides

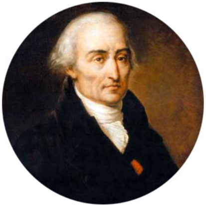
Carlos D'Andrea

Buenos Aires 25/04/19

UNIVERSITAT DE BARCELONA

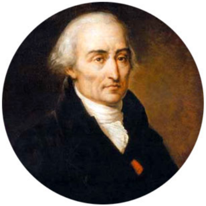
UBA - exactas
Departamento de Matemática

Una que sepamos todos...



Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

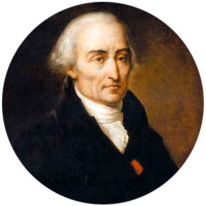
Una que sepamos todos...



Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Dados $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N) \in \mathbb{K}^2$

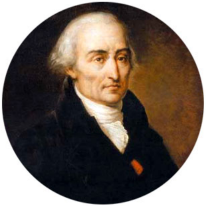
Una que sepamos todos...



Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Dados $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N) \in \mathbb{K}^2$
calcula $P \in \mathbb{K}[x]$

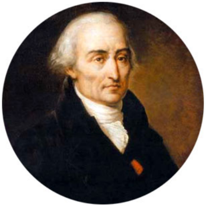
Una que sepamos todos...



Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Dados $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N) \in \mathbb{K}^2$
calcula $P \in \mathbb{K}[x]$ de **grado mínimo**

Una que sepamos todos...



Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Dados $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N) \in \mathbb{K}^2$
calcula $P \in \mathbb{K}[x]$ de **grado mínimo**
tal que $P(x_i) = y_i, i = 1, \ldots, N$

La solución "fácil"

La solución "fácil"

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

La solución "fácil"

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

$$P = \sum_{j=0}^{N-1} a_j x^j$$

La solución "fácil"

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

$$P = \sum_{j=0}^{N-1} a_j x^j = \sum_{j=1}^{N} y_j \left(\prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)$$

Interpolación “con multiplicidades”

Charles Hermite (1822-1901)

Interpolación “con multiplicidades”

Charles Hermite (1822-1901)

Dados $x_1, \ldots, x_L,$

$$y_{10}, \ldots, y_{1N_1-1}, \ldots, y_{L0}, \ldots, y_{LN_L-1}$$

Interpolación "con multiplicidades"

Charles Hermite (1822-1901)

Dados $x_1, \ldots, x_L,$

$y_{10}, \ldots, y_{1N_1-1}, \ldots, y_{L0}, \ldots, y_{LN_L-1}$
calcular $P \in \mathbb{K}[x]$ de grado mínimo

tal que $\boxed{P^{(j)}(x_i) = y_{ij}}$

¿Cómo se resuelve esto?

¿Cómo se resuelve esto?

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{N-1} \\ 0 & 1 & 2x1 & \dots & (N-1)x_1^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & *x_L^{N-N_L-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{LN_L-1} \end{pmatrix}$$

¿Cómo se resuelve esto?

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{N-1} \\ 0 & 1 & 2x1 & \dots & (N-1)x_1^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & *x_L^{N-N_L-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{LN_L-1} \end{pmatrix}$$

$$P = \sum_{j=0}^{N-1} a_j x^j$$

¿Cómo se resuelve esto?

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{N-1} \\ 0 & 1 & 2x1 & \dots & (N-1)x_1^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & *x_L^{N-N_L-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{LN_L-1} \end{pmatrix}$$

$$P = \sum_{j=0}^{N-1} a_j x^j = \sum_{j=0}^{L} P_j(x)$$

Diferencias Divididas

Diferencias Divididas

$$P[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Diferencias Divididas

$$P[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$P[x_1, x_2, x_3] = \frac{P[x_2, x_3] - P[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

Diferencias Divididas

$$P[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$P[x_1, x_2, x_3] = \frac{P[x_2, x_3] - P[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

$$\ldots$$

Diferencias Divididas

$$P[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$P[x_1, x_2, x_3] = \frac{P[x_2, x_3] - P[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

$$\ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{l} P = y_1 + (x - x_1)P[x_1, x_2] + \\ (x - x_1)(x - x_2)P[x_1, x_2, x_3] \\ + \ldots \end{array}}$$

Teorema Chino del Resto

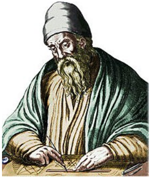
Teorema Chino del Resto

Si $P_1, \ldots, P_L \in \mathbb{K}[x]$ son coprimos dos a dos, entonces para $Q_1, \ldots, Q_L \in \mathbb{K}[x]$ cualesquiera, hay solución única del sistema

$$\begin{cases} X \equiv Q_1 \operatorname{mod} P_1 \\ X \equiv Q_2 \operatorname{mod} P_2 \\ \vdots \\ X \equiv Q_L \operatorname{mod} P_L \end{cases}$$

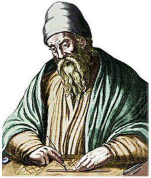
de grado menor que $\deg(P_1 \ldots P_L)$

La solución es constructiva



Euclides (-325 -265)

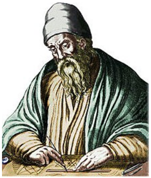
La solución es constructiva



Euclides (-325   -265)

$$R_1 P_1 + R_2 P_2 = 1$$

La solución es constructiva



Euclides (-325   -265)

$$R_1 P_1 + R_2 P_2 = 1$$

$$X = Q_2 R_1 P_1 + Q_1 R_2 P_2$$

Aplicación

Aplicación

Sin multiplicidades

$$1 = \sum_{j=1}^{N} \left(\prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)$$

Aplicación

Sin multiplicidades

$$1 = \sum_{j=1}^{N} \left(\prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \equiv \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \mod (x - x_j)$$

Aplicación

Sin multiplicidades

$$1 = \sum_{j=1}^{N} \left(\prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \equiv \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \mod (x - x_j)$$

$$P \equiv y_j$$

Aplicación

Sin multiplicidades

$$1 = \sum_{j=1}^{N} \left(\prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \equiv \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \mod (x - x_j)$$

$$P \equiv y_j \equiv y_j \left(\prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \mod x - x_j$$

Aplicación

Sin multiplicidades

$$1 = \sum_{j=1}^{N} \left(\prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \equiv \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \mod (x - x_j)$$

$$P \equiv y_j \equiv y_j \left(\prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \mod x - x_j$$

Con multiplicidades

$$1 = \sum_{j=1}^{L} Q_j,\ 1 \equiv Q_j \mod (x - x_j)^{N_j}$$

Aplicación

Sin multiplicidades

$$1 = \sum_{j=1}^{N} \left(\prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \equiv \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \mod (x - x_j)$$

$$P \equiv y_j \equiv y_j \left(\prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \mod x - x_j$$

Con multiplicidades

$$1 = \sum_{j=1}^{L} Q_j,\ 1 \equiv Q_j \mod (x - x_j)^{N_j}$$

$$P \equiv$$

$$(y_{j,0} + y_{j,1}(x - x_j) + y_{j,2}(x - x_j)^2 + \ldots) Q_j \mod (x - x_j)^{N_j}$$

“Tiempo” de cálculo

- Álgebra Lineal $\mathcal{O}(N^3)$

“Tiempo” de cálculo

- Álgebra Lineal $\mathcal{O}(N^3)$
- Teorema Chino del Resto (Hermite)

“Tiempo” de cálculo

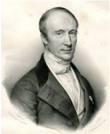
- Álgebra Lineal $\mathcal{O}(N^3)$
- Teorema Chino del Resto (Hermite)
- Diferencias Divididas

“Tiempo” de cálculo

- Álgebra Lineal $\mathcal{O}(N^3)$
- Teorema Chino del Resto (Hermite)
- Diferencias Divididas

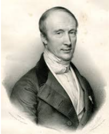
$$\mathcal{O}(N \log^2(N))$$

Interpolación Racional



Agustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Interpolación Racional

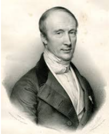


Agustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Dados $x_1, \ldots, x_L,$

$$y_{10}, \ldots, y_{1N_1-1}, \ldots, y_{L0}, \ldots, y_{LN_L-1}$$

Interpolación Racional



Agustin-Louis Cauchy (1789-1857)

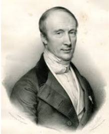
Dados $x_1, \ldots, x_L,$

$y_{10}, \ldots, y_{1N_1-1}, \ldots, y_{L0}, \ldots, y_{LN_L-1}$

calcular $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(x)$ tal que

$$\boxed{R^{(j)}(x_i) = y_{ij}}$$

Interpolación Racional



Agustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Dados $x_1, \ldots, x_L$,

$y_{10}, \ldots, y_{1N_1-1}, \ldots, y_{L0}, \ldots, y_{LN_L-1}$

calcular $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(x)$ tal que

$\boxed{R^{(j)}(x_i) = y_{ij}}$ de **grado mínimo**

¿“grado” de una función racional?

¿"grado" de una función racional?

$$\deg_{\max}\left(\frac{A}{B}\right) = \max\{\deg(A), \deg(B)\}$$

¿"grado" de una función racional?

$$\deg_{\mathsf{max}}\left(\frac{A}{B}\right) = \max\{\deg(A), \deg(B)\}$$

$$\deg_{\mathsf{sum}}\left(\frac{A}{B}\right) = \deg(A) + \deg(B)$$

¿“grado” de una función racional?

$$\deg_{\mathrm{max}}\left(\frac{A}{B}\right) = \max\{\deg(A), \deg(B)\}$$

$$\deg_{\mathrm{sum}}\left(\frac{A}{B}\right) = \deg(A) + \deg(B)$$

$$\ldots$$

Ejemplo 1

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & y_{1,0} = -2 \\ x_2 = 2 & y_{2,0} = 6 \\ x_3 = -1 & y_{3,0} = -3 \\ x_3 = -1 & y_{3,1} = 3 \end{array}$$

Ejemplo 1

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = 0 & y_{1,0} = -2 \\
x_2 = 2 & y_{2,0} = 6 \\
x_3 = -1 & y_{3,0} = -3 \\
x_3 = -1 & y_{3,1} = 3
\end{array}
$$

$$\deg_{\max} = 2$$

Ejemplo 1

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & y_{1,0} = -2 \\ x_2 = 2 & y_{2,0} = 6 \\ x_3 = -1 & y_{3,0} = -3 \\ x_3 = -1 & y_{3,1} = 3 \end{array}$$

$$\deg_{\max} = 2$$

$$\boxed{\frac{-2 - 3\lambda x^2}{\frac{-x^2}{3} + 1 - \lambda x}} \lambda \neq -\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}$$

Ejemplo 2

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = 1 & y_1 = 1 \\
x_2 = -1 & y_2 = 1 \\
x_3 = 2 & y_3 = -14 \\
x_4 = -2 & y_4 = -14 \\
x_5 = 3 & y_5 = 1 \\
x_6 = -3 & y_6 = 1
\end{array}
$$

Ejemplo 2

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1 & y_1 = 1 \\ x_2 = -1 & y_2 = 1 \\ x_3 = 2 & y_3 = -14 \\ x_4 = -2 & y_4 = -14 \\ x_5 = 3 & y_5 = 1 \\ x_6 = -3 & y_6 = 1 \end{array}$$

$$\deg_{\mathrm{sum}} = 4$$

Ejemplo 2

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = 1 & y_1 = 1 \\
x_2 = -1 & y_2 = 1 \\
x_3 = 2 & y_3 = -14 \\
x_4 = -2 & y_4 = -14 \\
x_5 = 3 & y_5 = 1 \\
x_6 = -3 & y_6 = 1
\end{array}
$$

$$\deg_{\text{sum}} = 4 \qquad \boxed{x^4 - 10x^2 + 10}$$

Ejemplo 2

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1 & y_1 = 1 \\ x_2 = -1 & y_2 = 1 \\ x_3 = 2 & y_3 = -14 \\ x_4 = -2 & y_4 = -14 \\ x_5 = 3 & y_5 = 1 \\ x_6 = -3 & y_6 = 1 \end{array}$$

$$\deg_{\text{sum}} = 4 \qquad \boxed{x^4 - 10x^2 + 10}$$

$$\boxed{\frac{4}{x^4 - 2x^2 + 3}}$$

Preguntas

Preguntas

- ¿Cómo se calculan $\deg_{\max}$ y $\deg_{\text{sum}}$?

Preguntas

- ¿Cómo se calculan $\deg_{\max}$ y $\deg_{\text{sum}}$?
- ¿Cuántas soluciones "óptimas" hay?

Preguntas

- ¿Cómo se calculan $\deg_{max}$ y $\deg_{sum}$?
- ¿Cuántas soluciones "óptimas" hay?
- ¿Se pueden "parametrizar" todas las soluciones del problema de interpolación?

Sub-Problema

Sub-Problema

Fijado $0 \leq n \leq N - 1$

Sub-Problema

Fijado $0 \leq n \leq N - 1$ calcular

$A \in \mathbb{K}[x]_{\leq n}$, $B \in \mathbb{K}[x]_{\leq N-n-1}$

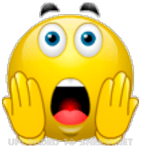
Sub-Problema

Fijado $0 \leq n \leq N-1$ calcular $A \in \mathbb{K}[x]_{\leq n}$, $B \in \mathbb{K}[x]_{\leq N-n-1}$ tales que $R = \frac{A}{B}$ resuelve el problema de interpolación

“Problema” con el Sub-Problema

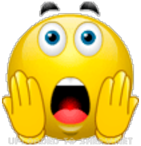
“Problema” con el Sub-Problema

`No siempre tiene solución!`



“Problema” con el Sub-Problema

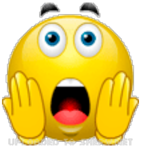
No siempre tiene solución!



$$N = 3,\ n = 1,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$$
$$y_{1,0} = 1,\ y_{1,1} = 0,\ y_{2,0} = 0$$

"Problema" con el Sub-Problema

No siempre tiene solución!



$$N = 3,\ n = 1,\ x_1 = 1, x_2 = 2$$

$$y_{1,0} = 1, y_{1,1} = 0, y_{2,0} = 0$$

$$\cancel{\frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x}}$$

El problema es el denominador

El problema es el denominador

Se necesita $B(x_i) \neq 0 \, \forall i = 0, \ldots, L$

El problema es el denominador

Se necesita $B(x_i) \neq 0 \, \forall i = 0, \ldots, L$

Para datos "genéricos", hay una única solución

El problema es el denominador

Se necesita $B(x_i) \neq 0 \; \forall i = 0, \ldots, L$

Para datos "genéricos", hay una única solución

The set of unattainable points for the Rational Hermite Interpolation Problem

Cortadellas-**D**-Montoro

`Linear Algebra Appl (2018)`

El problema débil

El problema débil

Dados x_i, y_{ij}

El problema débil

Dados x_i, y_{ij} calcular

$$A \in \mathbb{K}[x]_{\leq n},\ B \in \mathbb{K}[x]_{\leq N-n-1}$$

El problema débil

Dados x_i, y_{ij} calcular $A \in \mathbb{K}[x]_{\leq n}$, $B \in \mathbb{K}[x]_{\leq N-n-1}$ tales que $A(x_i) = y_i B(x_i)$

El problema débil

Dados x_i, y_{ij} calcular $A \in \mathbb{K}[x]_{\leq n}$, $B \in \mathbb{K}[x]_{\leq N-n-1}$ tales que $A(x_i) = y_i B(x_i)$

$$A^{(j)}(x_i) = \sum_{s=0}^{j} (j)_s y_{is} B^{(j-s)}(x_i)$$

Problema de Álgebra Lineal!!

Problema de Álgebra Lineal!!

- El problema débil siempre se puede resolver

Problema de Álgebra Lineal!!

- El problema débil siempre se puede resolver
- La solución es "única"

Problema de Álgebra Lineal!!

- El problema débil siempre se puede resolver
- La solución es "única"
- El denominador de "la solución" no se anula en ningún x_i 's $\Longleftrightarrow$ el sub-problema tiene solución

Métodos de resolución

Métodos de resolución

- Álgebra Lineal

Métodos de resolución

- Álgebra Lineal
- Funciones Simétricas/Subresultantes

Métodos de resolución

- Álgebra Lineal
- Funciones Simétricas/Subresultantes
- **Algoritmo de Euclides**

Métodos de resolución

- Álgebra Lineal
- Funciones Simétricas/Subresultantes
- **Algoritmo de Euclides**
- Coordenadas Baricéntricas

Métodos de resolución

- Álgebra Lineal
- Funciones Simétricas/Subresultantes
- **Algoritmo de Euclides**
- Coordenadas Baricéntricas
- “Método de Jacobi” (Residuos)

Métodos de resolución

- Álgebra Lineal
- Funciones Simétricas/Subresultantes
- **Algoritmo de Euclides**
- Coordenadas Baricéntricas
- "Método de Jacobi" (Residuos)
- ...

Algoritmo de Euclides

Algoritmo de Euclides

$$f := \prod_{i=1}^{L} (x - x_i)^{N_i}$$

Algoritmo de Euclides

$$f := \prod_{i=1}^{L}(x - x_i)^{N_i}$$
$$g \in \mathbb{K}[x]_{\leq N-1},\ g^{(j)}(x_i) = y_{ij}$$

Algoritmo de Euclides

$$f := \prod_{i=1}^{L}(x - x_i)^{N_i}$$

$$g \in \mathbb{K}[x]_{\leq N-1},\ g^{(j)}(x_i) = y_{ij}$$

$$\gamma^{(\ell)} f + \beta^{(\ell)} g = \alpha^{(\ell)},\ \ell = 1, \ldots$$

Algoritmo de Euclides

$$f := \prod_{i=0}^{L} (x - x_i)^{N_i}$$
$$g \in \mathbb{K}[x]_{\leq N-1},\; g^{(j)}(x_i) = y_{ij}$$

$$\gamma_{\ell-1}^{(\ell)} f + \beta_{\ell}^{(\ell)} g = \alpha_{N-1-\ell}^{(\ell)},\; \ell = 1, \ldots$$

Algoritmo de Euclides

$$f := \prod_{i=0}^{L}(x - x_i)^{N_i}$$

$$g \in \mathbb{K}[x]_{\leq N-1},\ g^{(j)}(x_i) = y_{ij}$$

$$\gamma_{\ell-1}^{(\ell)} f + \beta_{\ell}^{(\ell)} g = \alpha_{N-1-\ell}^{(\ell)},\ \ell = 1, \ldots$$

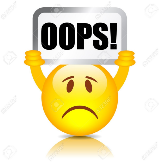
$$\ell = N - n - 1,\ \boxed{A = \alpha^{(\ell)},\ B = \beta^{(\ell)}}$$

es "la" solución débil

Pero...

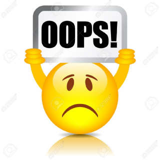
Pero...

podría ocurrir $\alpha^{(\ell)} = \beta^{(\ell)} = 0$!



Pero...

podría ocurrir $\alpha^{(\ell)} = \beta^{(\ell)} = 0$!



Aun así el ℓ más próximo a $N - n - 1$ da la solución débil...

Coordenadas Baricéntricas

(Schneider - Werner 86)

Coordenadas Baricéntricas

(Schneider - Werner 86)

Cualquier elección de $a_1, \ldots, a_N$ en

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i y_i}{(x - x_i)}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{(x - x_i)}}$$

da una solución del problema débil

Coordenadas Baricéntricas

(Schneider - Werner 86)

Cualquier elección de $a_1, \ldots, a_N$ en

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i y_i}{(x - x_i)}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{(x - x_i)}}$$

da una solución del problema débil

Problema fuerte $\iff$ $a_i \neq 0 \; \forall i$

Método de Jacobi (Residuos)

(Egecioglu-Koc 89)

Método de Jacobi (Residuos)

(Egecioglu-Koc 89)

Bézout: $C\,f + B\,g = A$

Método de Jacobi (Residuos)

(Egecioglu-Koc 89)

Bézout: $C\,f + B\,g = A$

Pasamos a $x^k C + x^k \frac{B}{f} g = \frac{x^k A}{f}$

Método de Jacobi (Residuos)

(Egecioglu-Koc 89)

Bézout: $C\,f + B\,g = A$

Pasamos a $x^k C + x^k \frac{B}{f} g = \frac{x^k A}{f}$ Si

$k + \deg(A) \leq N - 2$, $\mathrm{Res}_\infty(\frac{x^k A}{f}) = 0$

Método de Jacobi (Residuos)

(Egecioglu-Koc 89)

Bézout: $C\,f + B\,g = A$

Pasamos a $x^k C + x^k \frac{B}{f} g = \frac{x^k A}{f}$ Si

$k + \deg(A) \leq N - 2$, $\mathrm{Res}_\infty(\frac{x^k A}{f}) = 0$

da ecuaciones "separadas" para A y B!

Complejidad: Euclides

Complejidad: Euclides

- Cálculo de f, g : $\mathcal{O}(N \log^2 N)$

Complejidad: Euclides

- Cálculo de f, g : $\mathcal{O}(N \log^2 N)$
- Una "línea" del Algoritmo de Euclides:

$$\mathcal{O}(M(N)\log(N))$$

Complejidad: Euclides

- Cálculo de f, g : $\mathcal{O}(N \log^2 N)$
- Una "línea" del Algoritmo de Euclides:

$$\mathcal{O}(M(N)\log(N)) = \mathcal{O}(N \log^2 N)$$

Complejidad: otros métodos

Complejidad: otros métodos

- Álgebra Lineal: $\mathcal{O}(N^3)$

Complejidad: otros métodos

- Álgebra Lineal: $\mathcal{O}(N^3)$
- Coordenadas Baricéntricas:

Complejidad: otros métodos

- **Álgebra Lineal**: $\mathcal{O}(N^3)$
- **Coordenadas Baricéntricas:** más estables numéricamente, pero aún así $\mathcal{O}(N^3)$

Complejidad: otros métodos

- **Álgebra Lineal**: $\mathcal{O}(N^3)$
- **Coordenadas Baricéntricas:** más estables numéricamente, pero aún así $\mathcal{O}(N^3)$
- **Jacobi:** (Cortadellas-**D**-Montoro) $\mathcal{O}(n\log^2(n) + N\log(N))$

¿Se puede mejorar esto?

¿Se puede mejorar esto?

Problema de Interpolación débil

$$\Updownarrow$$

una "línea" del algoritmo de Euclides

¿Se puede mejorar esto?

Problema de Interpolación débil

$$\updownarrow$$

una "línea" del algoritmo de Euclides

$$\mathcal{O}(M(N)\log N)$$

¿Se puede mejorar esto?

Problema de Interpolación débil

$$\updownarrow$$

una "línea" del algoritmo de Euclides

$$\mathcal{O}(M(N)\log N) = \mathcal{O}(N\log^2 N)$$

Y ya que estamos...

El algoritmo para multiplicar enteros de la escuela tiene complejidad $\mathcal{O}(N^2)$

Y ya que estamos...

El algoritmo para multiplicar enteros de la escuela tiene complejidad $\mathcal{O}(N^2)$

Algoritmo de Karatsuba(1960): $\mathcal{O}(N^{1,585})$

Multiplication of large numbers					
X	9876256719 8712349865				
	0054739234 5643218574				Y
Decomposition					
X	L	9876256719 * 0054739234		L	Y
	R	+ 8712349865 * 5643218574 +		R	
	S	= 18588606584 * 5697957808 =		S	
Partial multiplications					
P	1	540618727585413246	=	X_L * Y_L	
	2	49165694581354392510	=	X_R * Y_R	
	3	105917096025143007872	=	X_S * Y_S	
Result					
P_1 * 10 ^ N + (P_3 - P_2 - P_1) * 10 ^ (N/2) + P_2					
N = Max(Length_X, Length_Y) and if N odd then N = N + 1					

Mejorando...

Toom-Cook (1966):

$$\mathcal{O}(N^{\log(2k-1)/\log k}),\ k \geq 3$$

Mejorando...

Toom-Cook (1966):

$$\mathcal{O}(N^{\log(2k-1)/\log k}),\ k \geq 3$$

Schönhage-Strassen (1971):

$$\mathcal{O}(N \log N \log \log N)$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & & \omega^{2n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & & \omega^{4n-2} \\ & & & & \\ 1 & \omega^{2n-1} & \omega^{4n-2} & & \omega^{2n^2-n} \end{pmatrix}$$

Mejorando....

Fürer's algorithm (2007):

$$\mathcal{O}(N \log N \, 2^{\mathcal{O}(\log^* N)})$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & & \omega^{2n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & & \omega^{4n-2} \\ & & & & \\ 1 & \omega^{2n-1} & \omega^{4n-2} & & \omega^{2n^2-n} \end{pmatrix}$$

Mejorando?

"We use [the fast Fourier transform] in a much more violent way, use it several times instead of a single time, and replace even more multiplications with additions and subtractions"

¿Y el problema minimal?

¿Y el problema minimal?

Dados $x_1, \ldots, x_L,$

$y_{10}, \ldots, y_{1N_1-1}, \ldots, y_{L0}, \ldots, y_{LN_L-1}$
calcular $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(x)$ tal que

$$\boxed{R^{(j)}(x_i) = y_{ij}}$$

¿Y el problema minimal?

Dados $x_1, \ldots, x_L$,

$y_{10}, \ldots, y_{1N_1-1}, \ldots, y_{L0}, \ldots, y_{LN_L-1}$

calcular $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(x)$ tal que

$\boxed{R^{(j)}(x_i) = y_{ij}}$ de grado mínimo

Problema débil (Lagrange)

(Ravi 97)

Problema débil (Lagrange)

(Ravi 97)

Todo par (A, B) resuelve el problema débil

Problema débil (Lagrange)

(Ravi 97)

Todo par (A, B) resuelve el problema débil $\iff$

$$\begin{pmatrix} x - x_1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & x - x_2 & \dots & 0 & 1 & -y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x - x_N & 1 & -y_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ A \\ B \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Hilbert's Syzygy's Theorem

Hilbert's Syzygy's Theorem

- El núcleo de esa matriz es libre de rango 2

Hilbert's Syzygy's Theorem

- El núcleo de esa matriz es libre de rango 2
- Hay dos generadores de grados $\mu \leq N - \mu$

Hilbert's Syzygy's Theorem

- El núcleo de esa matriz es libre de rango 2
- Hay dos generadores de grados $\mu \leq N - \mu$
- μ es el $\deg_{\max}$ mínimo

¡No hacen falta las resoluciones!

(Cortadellas-**D**-Montoro)

arXiv:1808.02575

¡No hacen falta las resoluciones!

(Cortadellas-**D**-Montoro)

arXiv:1808.02575

- μ es el grado de uno de los restos en el AEE más próximos a $\frac{N}{2}$
- La "μ-base" son dos filas consecutivas del AEE

Cálculo de $\text{min-deg}_{\text{sum}}$

(Cortadellas-**D**-Montoro)

`arXiv:1808.02575`

Cálculo de $\text{min-deg}_{\text{sum}}$

(Cortadellas-**D**-Montoro)
arXiv:1808.02575

$$\text{min-deg}_{\text{sum}}$$
$$=$$
$$\min_k\{N-\deg q_k(x),\; s_k(x_j)\neq 0\;\forall j\}$$

Cálculo de min-deg$_{\text{sum}}$

(Cortadellas-**D**-Montoro)

`arXiv:1808.02575`

$$\text{min-deg}_{\text{sum}}$$
$$=$$
$$\min_k\{N - \deg q_k(x),\ s_k(x_j) \neq 0\ \forall j\}$$

$$r_i(x) = q_{i+1}(x)r_{i+1}(x) + r_{i+2}(x) = f(x)s_i(x) + g(x)t_i(x)$$

Más aún...

(Cortadellas-**D**-Montoro) arXiv:1808.02575

Más aún...

(Cortadellas-**D**-Montoro) `arXiv:1808.02575`

- Todas las soluciones débiles se pueden parametrizar via el AEE

Más aún...

(Cortadellas-**D**-Montoro) `arXiv:1808.02575`

- Todas las soluciones débiles se pueden parametrizar via el AEE
- Encontrar y describir las soluciones minimales se puede hacer constructivamente

Gracias