

Cotas de grado para μ -bases de superficies paramétricas

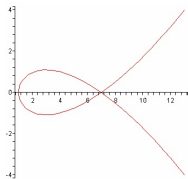
Teresa Cortadellas, **Carlos D'Andrea**, Eulàlia Montoro

virtUMA 2020



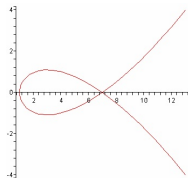
Parametrización de curvas

Parametrización de curvas



$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ (t_0 : t_1) &\mapsto (a(t_0, t_1) : b(t_0, t_1) : c(t_0, t_1)) \end{aligned}$$

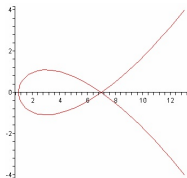
Parametrización de curvas



$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ (t_0 : t_1) &\mapsto (a(t_0, t_1) : b(t_0, t_1) : c(t_0, t_1)) \end{aligned}$$

- $a, b, c \in \mathbb{K}[T_0, T_1]$, polinomios homogéneos de grado $\delta \geq 1$

Parametrización de curvas



$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ (t_0 : t_1) &\mapsto (a(t_0, t_1) : b(t_0, t_1) : c(t_0, t_1)) \end{aligned}$$

- $a, b, c \in \mathbb{K}[T_0, T_1]$, polinomios homogéneos de grado $\delta \geq 1$
- $\gcd(a, b, c) = 1$

Un teorema de “factorización”

Un teorema de “factorización”

Existe un entero $\mu \leq \frac{\delta}{2}$

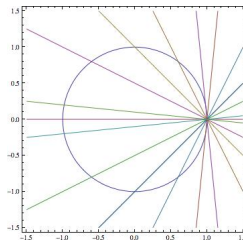
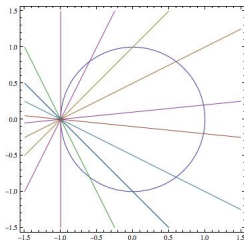
Un teorema de “factorización”

Existe un entero $\mu \leq \frac{\delta}{2}$ y dos parametrizaciones $\varphi_\mu(t_0 : t_1)$, $\psi_{\delta-\mu}(t_0 : t_1)$ de grados μ and $\delta - \mu$

Un teorema de “factorización”

Existe un entero $\mu \leq \frac{\delta}{2}$ y dos parametrizaciones $\varphi_\mu(t_0 : t_1)$, $\psi_{\delta-\mu}(t_0 : t_1)$ de grados μ and $\delta - \mu$ tal que

$$\phi(t_0 : t_1) = \varphi_\mu(t_0 : t_1) \wedge \psi_{\delta-\mu}(t_0 : t_1)$$



Ejemplo: la circunferencia unitaria

Ejemplo: la circunferencia unitaria

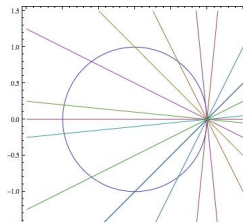
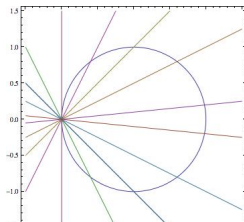
$$\begin{aligned}\varphi_1(t_0 : t_1) &= (-t_1 : -t_1 : t_0) \\ \psi_1(t_0 : t_1) &= (-t_0 : t_0 : t_1)\end{aligned}$$

Ejemplo: la circunferencia unitaria

$$\varphi_1(t_0 : t_1) = (-t_1 : -t_1 : t_0)$$

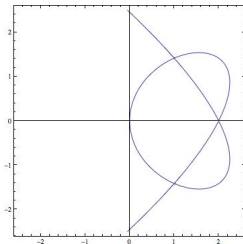
$$\psi_1(t_0 : t_1) = (-t_0 : t_0 : t_1)$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -t_1 & -t_1 & t_0 \\ -t_0 & t_0 & t_1 \end{vmatrix} = (-t_0^2 - t_1^2 : t_1^2 - t_0^2 : -2t_0t_1)$$



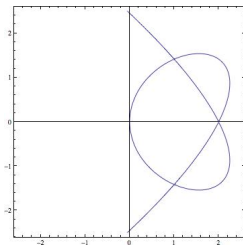
Una factorización menos trivial

$$\phi(t_0 : t_1) = (t_0^4 : 6t_0^2t_1^2 - 4t_1^4 : 4t_0^3t_1 - 4t_0t_1^3)$$



Una factorización menos trivial

$$\phi(t_0 : t_1) = (t_0^4 : 6t_0^2 t_1^2 - 4t_1^4 : 4t_0^3 t_1 - 4t_0 t_1^3)$$



$$\varphi_2(t_0, t_1) = (-2t_0 t_1 : t_0 t_1 : \frac{t_0^2}{2} - t_1^2)$$

$$\psi_2(t_0, t_1) = (-2t_1^2 : t_0^2 : -t_0 t_1)$$

Explicación algebraica

Explicación algebraica

El ideal homogéneo

$$I = \langle a(T_0, T_1), b(T_0, T_1), c(T_0, T_1) \rangle \subset \mathbb{K}[T_0, T_1]$$

Explicación algebraica

El ideal homogéneo

$$I = \langle a(T_0, T_1), b(T_0, T_1), c(T_0, T_1) \rangle \subset \mathbb{K}[T_0, T_1]$$

tiene una resolución de tipo **Hilbert-Burch**

$$0 \rightarrow \mathbb{K}[T_0, T_1]^2 \xrightarrow{(\varphi_\mu, \psi_{\delta-\mu})^t} \mathbb{K}[T_0, T_1]^3 \xrightarrow{(a,b,c)} \mathbb{K}[T_0, T_1]$$

Explicación algebraica

El ideal homogéneo

$I = \langle a(T_0, T_1), b(T_0, T_1), c(T_0, T_1) \rangle \subset \mathbb{K}[T_0, T_1]$
tiene una resolución de tipo **Hilbert-Burch**

$$0 \rightarrow \mathbb{K}[T_0, T_1]^2 \xrightarrow{(\varphi_\mu, \psi_{\delta-\mu})^t} \mathbb{K}[T_0, T_1]^3 \xrightarrow{(a,b,c)} \mathbb{K}[T_0, T_1]$$

$\{\varphi_\mu, \psi_{\delta-\mu}\}$ se llama una μ -**base** de la parametrización

Explicación algebraica

El ideal homogéneo

$$I = \langle a(T_0, T_1), b(T_0, T_1), c(T_0, T_1) \rangle \subset \mathbb{K}[T_0, T_1]$$

tiene una resolución de tipo **Hilbert-Burch**

$$0 \rightarrow \mathbb{K}[T_0, T_1]^2 \xrightarrow{(\varphi_\mu, \psi_{\delta-\mu})^t} \mathbb{K}[T_0, T_1]^3 \xrightarrow{(a,b,c)} \mathbb{K}[T_0, T_1]$$

$\{\varphi_\mu, \psi_{\delta-\mu}\}$ se llama una μ -**base** de la parametrización

Los grados $(\mu, \delta - \mu)$ están unívocamente determinados

Parametrización de superficies

Parametrización de superficies



Parametrización de superficies



$$\begin{array}{ccc} \phi : & \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow \mathbb{P}^3 \\ (t_0 : t_1 : t_2) & \mapsto & (a(\mathbf{t}) : b(\mathbf{t}) : c(\mathbf{t}) : d(\mathbf{t})) \end{array}$$

Parametrización de superficies



$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^3 \\ (t_0 : t_1 : t_2) &\mapsto (a(\mathbf{t}) : b(\mathbf{t}) : c(\mathbf{t}) : d(\mathbf{t})) \end{aligned}$$

- $a, b, c, d \in \mathbb{K}[T_0, T_1, T_2]$, homogéneos del mismo grado $\delta \geq 1$

Parametrización de superficies



$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^3 \\ (t_0 : t_1 : t_2) &\mapsto (a(\mathbf{t}) : b(\mathbf{t}) : c(\mathbf{t}) : d(\mathbf{t})) \end{aligned}$$

- $a, b, c, d \in \mathbb{K}[T_0, T_1, T_2]$, homogéneos del mismo grado $\delta \geq 1$
- $\gcd(a, b, c, d) = 1$

Álgebra

Álgebra

El teorema de Hilbert-Burch ya no se puede aplicar

Álgebra

El teorema de Hilbert-Burch ya no se puede aplicar

$$0 \rightarrow \mathbb{K}[T_0, T_1, T_2]^3 \longrightarrow \mathbb{K}[T_0, T_1, T_2]^4 \xrightarrow{(a,b,c,d)} \mathbb{K}[T_0, T_1, T_2]$$

casi nunca es exacto

De todos modos...

(Chen-Cox-Liu JSC 2005)

De todos modos...

(Chen-Cox-Liu JSC 2005)

Hay una versión “afín” de Hilbert-Burch:

De todos modos...

(Chen-Cox-Liu JSC 2005)

Hay una versión “afín” de Hilbert-Burch:

$$\underline{a} := a(1, T_1, T_2), \underline{b} := b(1, T_1, T_2), \dots \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$$

De todos modos...

(Chen-Cox-Liu JSC 2005)

Hay una versión “afín” de Hilbert-Burch:

$$\underline{a} := a(1, T_1, T_2), \underline{b} := b(1, T_1, T_2), \dots \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$$

$$0 \rightarrow \mathbb{K}[T_1, T_2]^3 \xrightarrow{(\phi, \psi, \chi)^t} \mathbb{K}[T_1, T_2]^4 \xrightarrow{(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d})} \mathbb{K}[T_1, T_2]$$

es exacto

De todos modos...

(Chen-Cox-Liu JSC 2005)

Hay una versión “afín” de Hilbert-Burch:

$$\underline{a} := a(1, T_1, T_2), \underline{b} := b(1, T_1, T_2), \dots \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$$

$$0 \rightarrow \mathbb{K}[T_1, T_2]^3 \xrightarrow{(\phi, \psi, \chi)^t} \mathbb{K}[T_1, T_2]^4 \xrightarrow{(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d})} \mathbb{K}[T_1, T_2]$$

es exacto

$\{\phi, \psi, \chi\}$ se llama también una μ -base de la parametrización afín

Aplicaciones de las μ -bases

Aplicaciones de las μ -bases

$$\phi \wedge \psi \wedge \chi = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d})$$

Aplicaciones de las μ -bases

$$\phi \wedge \psi \wedge \chi = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d})$$

Esta factorización “simplifica” la parametrización

Aplicaciones de las μ -bases

$$\phi \wedge \psi \wedge \chi = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d})$$

Esta factorización “simplifica” la parametrización

■ Implicitación

Aplicaciones de las μ -bases

$$\phi \wedge \psi \wedge \chi = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d})$$

Esta factorización “simplifica” la parametrización

- Implicitación
- Detección de puntos singulares

Aplicaciones de las μ -bases

$$\phi \wedge \psi \wedge \chi = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d})$$

Esta factorización “simplifica” la parametrización

- Implicitación
- Detección de puntos singulares
- Trazado de gráficas

Aplicaciones de las μ -bases

$$\phi \wedge \psi \wedge \chi = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d})$$

Esta factorización “simplifica” la parametrización

- Implicitación
- Detección de puntos singulares
- Trazado de gráficas
- . . .

Cota de grado

(Chen-Cox-Liu JSC 2005)

Cota de grado

(Chen-Cox-Liu JSC 2005)

$$\deg(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \leq \delta$$

Cota de grado

(Chen-Cox-Liu JSC 2005)

$$\deg(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \leq \delta$$

$$\deg(\psi, \phi, \chi) \leq ??$$



Primeros resultados

(Cid Ruiz JSC 2019)

Primeros resultados

(Cid Ruiz JSC 2019)

Es posible encontrar una μ -base con
 $\deg(\psi, \phi, \chi) = \mathcal{O}(\delta^{33})$

Primeros resultados

(Cid Ruiz JSC 2019)

Es posible encontrar una μ -base con

$$\deg(\psi, \phi, \chi) = \mathcal{O}(\delta^{33})$$

■ $\mathcal{O}(\delta^{22})$ si $V_{\mathbb{P}^2}(a, b, c, d) = \emptyset$

Primeros resultados

(Cid Ruiz JSC 2019)

Es posible encontrar una μ -base con

$$\deg(\psi, \phi, \chi) = \mathcal{O}(\delta^{33})$$

- $\mathcal{O}(\delta^{22})$ si $V_{\mathbb{P}^2}(a, b, c, d) = \emptyset$
- $\mathcal{O}(\delta^{12})$ si $\langle a, b, c, d \rangle$ es una cuasi-intersección completa general artiniana

En general se espera...

En general se espera...



que las cotas sean bastante mas bajas

Nuestra contribución

(Cortadellas -**D**- Montoro)
Proceedings ISSAC 2020

<https://doi.org/10.1145/3373207.3404039>

Nuestra contribución

(Cortadellas -**D**- Montoro)
Proceedings ISSAC 2020

<https://doi.org/10.1145/3373207.3404039>

Utilizar el **Teorema de
Quillen-Suslin efectivo** para
mejorar estas cotas

Teorema de Quillen-Suslin

Teorema de Quillen-Suslin

Conjecturado por Serre en 1955

Teorema de Quillen-Suslin

Conjecturado por Serre en 1955
Resuelto independientemente por
Quillen y por Suslin en 1976

Teorema de Quillen-Suslin

Conjecturado por Serre en 1955
Resuelto independientemente por
Quillen y por Suslin en 1976

Varias versiones efectivas en los 90's:
Fitchas-Galligo, Sturmfels,
Laubenbaucher-Woodburn

Teorema “débil” de Quillen-Suslin

Teorema “débil” de Quillen-Suslin

Si $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$ no tienen ceros en
común en $\overline{\mathbb{K}}^n$

Teorema “débil” de Quillen-Suslin

Si $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$ no tienen ceros en común en $\overline{\mathbb{K}}^n$ entonces existen

$f_{ij} \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$, $2 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$ tales que

Teorema “débil” de Quillen-Suslin

Si $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$ no tienen ceros en común en $\overline{\mathbb{K}}^n$ entonces existen

$f_{ij} \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$, $2 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$ tales que

$$\det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_m \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mm} \end{pmatrix} = 1$$

Quillen-Suslin efectivo

(Fitchas-Galligo Math. Nach. 1990)

$$\det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_m \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mm} \end{pmatrix} = 1$$

Quillen-Suslin efectivo

(Fitchas-Galligo Math. Nach. 1990)

$$\det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_m \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mm} \end{pmatrix} = 1$$

Si $\deg(f_1, \dots, f_m) \leq \delta$

Quillen-Suslin efectivo

(Fitchas-Galligo Math. Nach. 1990)

$$\det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_m \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mm} \end{pmatrix} = 1$$

Si $\deg(f_1, \dots, f_m) \leq \delta \implies \deg(f_{ij}) \leq (m\delta)^{\mathcal{O}(n)}$

Relación con μ -bases

Relación con μ -bases

Si $B = (B_1 \ B_2 \ \dots \ B_m) \in \mathbb{K}[\mathbf{T}]^{m \times m}$ son las columnas de la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_m \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mm} \end{pmatrix}$$

Relación con μ -bases

Si $B = (B_1 \ B_2 \ \dots \ B_m) \in \mathbb{K}[\mathbf{T}]^{m \times m}$ son las columnas de la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_m \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mm} \end{pmatrix}$$

$\implies \{B_2, \dots, B_m\}$ es una μ -base de $(f_1, \dots, f_m)$

Relación con μ -bases

Si $B = (B_1 \ B_2 \ \dots \ B_m) \in \mathbb{K}[\mathbf{T}]^{m \times m}$ son las columnas de la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_m \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mm} \end{pmatrix}$$

$\implies \{B_2, \dots, B_m\}$ es una μ -base de $(f_1, \dots, f_m)$
(y B_1 codifica una identidad de Bézout para estos polinomios (Nullstellensatz))

Aplicación directa

Aplicación directa

Si $(f_1, f_2, f_3, f_4) = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$

Aplicación directa

Si $(f_1, f_2, f_3, f_4) = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$

Asumiendo que $V_{\overline{\mathbb{K}}}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) = \emptyset$

Aplicación directa

Si $(f_1, f_2, f_3, f_4) = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$

Asumiendo que $V_{\overline{\mathbb{K}}}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) = \emptyset$

$$\deg(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \leq \delta$$

Aplicación directa

Si $(f_1, f_2, f_3, f_4) = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$

Asumiendo que $V_{\overline{\mathbb{K}}}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) = \emptyset$

$$\deg(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \leq \delta$$

entonces el Teorema Efectivo de Quillen-Suslin

implica que hay una μ -base $\{\phi, \psi, \chi\}$

Aplicación directa

Si $(f_1, f_2, f_3, f_4) = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$

Asumiendo que $V_{\overline{\mathbb{K}}}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) = \emptyset$

$$\deg(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \leq \delta$$

entonces el Teorema Efectivo de Quillen-Suslin
implica que hay una μ -base $\{\phi, \psi, \chi\}$ tal que

$$\deg(\phi, \psi, \chi) = \mathcal{O}(\delta^4)$$

Aplicación directa

Si $(f_1, f_2, f_3, f_4) = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \in \mathbb{K}[T_1, T_2]$

Asumiendo que $V_{\overline{\mathbb{K}}}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) = \emptyset$

$$\deg(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \leq \delta$$

entonces el Teorema Efectivo de Quillen-Suslin
implica que hay una μ -base $\{\phi, \psi, \chi\}$ tal que

$$\deg(\phi, \psi, \chi) = \mathcal{O}(\delta^4)$$

Cota previa: $\mathcal{O}(\delta^{22})$

Nuestro resultado principal

(Cortadellas -**D**- Montoro) Proceedings ISSAC 2020

<https://doi.org/10.1145/3373207.3404039>

Supongamos que $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ es un ideal radical de
dimensión cero,

Nuestro resultado principal

(Cortadellas -**D**- Montoro) Proceedings ISSAC 2020

<https://doi.org/10.1145/3373207.3404039>

Supongamos que $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ es un ideal radical de
dimensión cero, $\deg(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \leq \delta$,

Nuestro resultado principal

(Cortadellas -**D**- Montoro) Proceedings ISSAC 2020

<https://doi.org/10.1145/3373207.3404039>

Supongamos que $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ es un ideal radical de
dimensión cero, $\deg(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \leq \delta$,
entonces existe una μ -base $\{\phi, \psi, \chi\}$

Nuestro resultado principal

(Cortadellas -**D**- Montoro) Proceedings ISSAC 2020

<https://doi.org/10.1145/3373207.3404039>

Supongamos que $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ es un ideal radical de
dimensión cero, $\deg(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \leq \delta$,

entonces existe una μ -base $\{\phi, \psi, \chi\}$ tal que

$$\deg(\phi, \psi, \chi) = \mathcal{O}(\delta^{12})$$

Nuestro resultado principal

(Cortadellas -**D**- Montoro) Proceedings ISSAC 2020

<https://doi.org/10.1145/3373207.3404039>

Supongamos que $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ es un ideal radical de
dimensión cero, $\deg(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \leq \delta$,

entonces existe una μ -base $\{\phi, \psi, \chi\}$ tal que

$$\deg(\phi, \psi, \chi) = \mathcal{O}(\delta^{12})$$

Cota previa: $\mathcal{O}(\delta^{33})$

Idea de la demostración

Idea de la demostración

La prueba es algorítmica.

Idea de la demostración

La prueba es algorítmica. Utiliza

Idea de la demostración

La prueba es algorítmica. Utiliza

- Shape Lemma

Idea de la demostración

La prueba es algorítmica. Utiliza

- Shape Lemma
- Quillen-Suslin efectivo en 2 pasos

El algoritmo en acción

El algoritmo en acción

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \underline{a}(t_1, t_2) & = & 11 - 4t_1 + 3t_1^2 + 4t_2 \\ \underline{b}(t_1, t_2) & = & 5 - 4t_1 + 2t_1^2 + 4t_2 - 2t_1t_2 + t_2^2 \\ \underline{c}(t_1, t_2) & = & 1 + 3t_1^2 - t_1^3 + t_1^2t_2 \\ \underline{d}(t_1, t_2) & = & 7 - 3t_1 + t_1^2 + 3t_2 \end{array} \right.$$

Primer paso: Shape Lemma

Primer paso: Shape Lemma

$$\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle = \langle 2 - t_1 + t_2, 1 + t_1^2 \rangle$$

Primer paso: Shape Lemma

$$\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle = \langle 2 - t_1 + t_2, 1 + t_1^2 \rangle$$

Tenemos

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 - t_1 + t_2 & 1 \\ t_1^2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 - t_1 + t_2 \\ 1 + t_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \\ \underline{c} \\ \underline{d} \end{pmatrix}$$

Primer Quillen-Suslin (1 variable)

Primer Quillen-Suslin (1 variable)

La segunda columna de

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 - t_1 + t_2 & 1 \\ t_1^2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Primer Quillen-Suslin (1 variable)

La segunda columna de

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 - t_1 + t_2 & 1 \\ t_1^2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

■ solo depende de t_1

Primer Quillen-Suslin (1 variable)

La segunda columna de

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 - t_1 + t_2 & 1 \\ t_1^2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- solo depende de t_1
- y el mcd de estos elementos es 1

Simplificando

Simplificando

Aplicando Quillen-Suslin efectivo en $\mathbb{K}[t_1]$
obtenemos

$$\begin{pmatrix} 2 - t_1 + t_2 & 1 \\ -2 + 3t_1 - 3t_2 & 0 \\ 4 - 3t_1^2 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Simplificando

Aplicando Quillen-Suslin efectivo en $\mathbb{K}[t_1]$
obtenemos

$$\begin{pmatrix} 2 - t_1 + t_2 & 1 \\ -2 + 3t_1 - 3t_2 & 0 \\ 4 - 3t_1^2 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

La nueva parametrización (equivalente) $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d})$
tiene los últimos tres polinomios múltiplos de

$$2 - t_1 + t_2$$

Factorización

Factorización

Quitamos este factor.

Factorización

Quitamos este factor. Nos quedan $(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b_0}}, \underline{\underline{c_0}}, \underline{\underline{d_0}})$

Factorización

Quitamos este factor. Nos quedan $(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b_0}}, \underline{\underline{c_0}}, \underline{\underline{d_0}})$

Afirmación: $V_{\mathbb{K}}(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b_0}}, \underline{\underline{c_0}}, \underline{\underline{d_0}}) = \emptyset$

Factorización

Quitamos este factor. Nos quedan $(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b_0}}, \underline{\underline{c_0}}, \underline{\underline{d_0}})$

Afirmación: $V_{\mathbb{K}}(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b_0}}, \underline{\underline{c_0}}, \underline{\underline{d_0}}) = \emptyset$

Aplicamos el Quillen-Suslin efectivo una vez más a esta parametrización

Factorización

Quitamos este factor. Nos quedan $(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b_0}}, \underline{\underline{c_0}}, \underline{\underline{d_0}})$

Afirmación: $V_{\mathbb{K}}(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b_0}}, \underline{\underline{c_0}}, \underline{\underline{d_0}}) = \emptyset$

Aplicamos el Quillen-Suslin efectivo una vez más a esta parametrización

“Añadimos” el factor común al final

En nuestro ejemplo

En nuestro ejemplo

$$\begin{aligned} & (\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b_0}}, \underline{\underline{c_0}}, \underline{\underline{d_0}}) \\ = & (5 - 4t_1 + 2t_1^2 + 4t_2 - 2t_1t_2 + t_2^2, -2 + 3t_1 - \\ & 3t_2, 4 - 3t_1^2, -5) \end{aligned}$$

Una matriz de Quillen-Suslin para este dato es

$$(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b_0}}, \underline{\underline{c_0}}, \underline{\underline{d_0}}) \cdot B = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

Una matriz de Quillen-Suslin para este dato es
 $(\underline{a}, \underline{b_0}, \underline{c_0}, \underline{d_0}) \cdot B = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$ con

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 - \frac{150t_2}{37} + \frac{45t_1 t_2}{37} - \frac{540t_2^2}{1369} + \frac{405t_1^2 t_2^2}{1369} & \frac{135t_2}{37} & 0 \\ 0 & m_1 & 5 + \frac{150t_2}{37} - \frac{45t_1 t_2}{37} + \frac{45t_2^2}{37} & 0 \\ 0 & -\frac{60t_2}{37} + \frac{30t_1 t_2}{37} - \frac{180t_2^2}{1369} + \frac{135t_1^2 t_2^2}{1369} & \frac{45t_2}{37} & 5 \\ -\frac{1}{5} & 5 - 4t_1 + 2t_1^2 & -2 + 3t_1 & 4 - 3t_1^2 \end{pmatrix}$$

Una matriz de Quillen-Suslin para este dato es
 $(\underline{a}, \underline{b_0}, \underline{c_0}, \underline{d_0}) \cdot B = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$ con

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 - \frac{150t_2}{37} + \frac{45t_1 t_2}{37} - \frac{540t_2^2}{1369} + \frac{405t_1^2 t_2^2}{1369} & \frac{135t_2}{37} & 0 \\ 0 & m_1 & 5 + \frac{150t_2}{37} - \frac{45t_1 t_2}{37} + \frac{45t_2^2}{37} & 0 \\ 0 & -\frac{60t_2}{37} + \frac{30t_1 t_2}{37} - \frac{180t_2^2}{1369} + \frac{135t_1^2 t_2^2}{1369} & \frac{45t_2}{37} & 5 \\ -\frac{1}{5} & 5 - 4t_1 + 2t_1^2 & -2 + 3t_1 & 4 - 3t_1^2 \end{pmatrix}$$

$$m_1 = -\frac{125t_2}{37} + \frac{100t_1 t_2}{37} - \frac{2450t_2^2}{1369} + \frac{735t_1 t_2^2}{1369} + \frac{450t_1^2 t_2^2}{1369} - \frac{135t_1^3 t_2^2}{1369} - \frac{180t_2^3}{1369} + \frac{135t_1^2 t_2^3}{1369}$$

Paso siguiente

Paso siguiente

Para producir una μ -base de $(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}, \underline{\underline{d}})$

Paso siguiente

Para producir una μ -base de $(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}, \underline{\underline{d}})$

- quitamos la primer columna de B

Paso siguiente

Para producir una μ -base de $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d})$

- quitamos la primer columna de B
- Multiplicamos la primer fila por el “factor común” $2 - t_1 + t_2$

$$\left(\begin{array}{ccc} \left(5 - \frac{150t_2}{37} + \frac{45t_1t_2}{37} - \frac{540t_2^2}{1369} + \frac{405t_1^2t_2^2}{1369} \right)(2 - t_1 + t_2) & \frac{135t_2}{37}(2 - t_1 + t_2) & 0 \\ m_1 & 5 + \frac{150t_2}{37} - \frac{45t_1t_2}{37} + \frac{45t_2^2}{37} & 0 \\ -\frac{60t_2}{37} + \frac{30t_1t_2}{37} - \frac{180t_2^2}{1369} + \frac{135t_1^2t_2^2}{1369} & \frac{45t_2}{37} & 5 \\ 5 - 4t_1 + 2t_1^2 & -2 + 3t_1 & 4 - 3t_1^2 \end{array} \right)$$

Nuevo cambio de coordenadas

Nuevo cambio de coordenadas

De $(\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}, \underline{\underline{d}})$ a la parametrización original
 $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d})$

Nuevo cambio de coordenadas

De $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d})$ a la parametrización original

$(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d})$

Obtenemos ψ, ϕ, χ con

$$\begin{aligned}\psi_1 &= 5 - 4t_1 + 2t_1^2 - 5t_2 + \frac{130t_1t_2}{37} - \frac{2630t_2^2}{1369} + \frac{735t_1t_2^2}{1369} \\ &\quad + \frac{585t_1^2t_2^2}{1369} - \frac{135t_1^3t_2^2}{1369} - \frac{180t_2^3}{1369} + \frac{135t_1^2t_2^3}{1369} \\ \psi_2 &= 10 - 5t_1 + \frac{260t_2}{37} - \frac{60t_1t_2}{37} - \frac{45t_1^2t_2}{37} + \frac{720t_2^2}{1369} \\ &\quad - \frac{540t_1^2t_2^2}{13} \\ \psi_3 &= \frac{180t_2}{37} - \frac{90t_1t_2}{37} + \frac{540t_2^2}{1369} - \frac{405t_1^2t_2^2}{1369} \\ \psi_4 &= -15 + 12t_1 - 6t_1^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= 3 + 3t_1 + \frac{195t_2}{37} - \frac{45t_1t_2}{37} + \frac{45t_2^2}{37} \\
\phi_2 &= -15 - \frac{180t_2}{37} \\
\phi_3 &= -\frac{135t_2}{37} \\
\phi_4 &= 6 - 9t_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= 9 - 3t_1^2 \\
\chi_2 &= 0 \\
\chi_3 &= -15 \\
\chi_4 &= -12 + 9t_1^2
\end{aligned}$$

Comentarios

Comentarios

- Se puede extender el algoritmo al caso $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle = \langle p, q \rangle$

Comentarios

- Se puede extender el algoritmo al caso $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle = \langle p, q \rangle$ con cotas que dependen de los grados de p, q

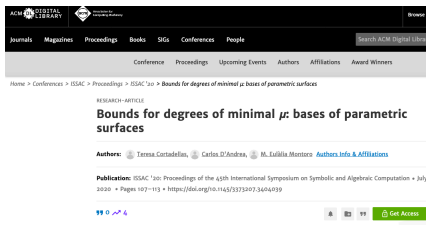
Comentarios

- Se puede extender el algoritmo al caso $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle = \langle p, q \rangle$ con cotas que dependen de los grados de p, q
- También a más polinomios, siempre en 2 variables

Comentarios

- Se puede extender el algoritmo al caso $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle = \langle p, q \rangle$ con cotas que dependen de los grados de p, q
- También a más polinomios, siempre en 2 variables
- No sabemos si las cotas son óptimas

Muchas Gracias



cdandrea@ub.edu

<http://www.ub.edu/arcades/cdandrea.html>