

Sobre el Teorema de Pourchet efectivo

Carlos D'Andrea

Bariloche 04/12/25



rsme
uma
- BARILOCHE 2025 -
PATAGONIA ARGENTINA



MATEMAX

Computational Algebra, Algebraic Geometry and Applications II

Buenos Aires, Argentina, December 15-17 2025



Celebrating Alicia Dickenstein's contributions to Math and beyond



TOPICS OF THIS CONFERENCE INCLUDE BUT ARE NOT LIMITED TO
Algebraic Geometry, Toric Geometry, Tropical Geometry, and their Applications to Biology

[http://mate.dm.uba.ar/ coalaga/](http://mate.dm.uba.ar/coalaga/)

Sem. Álgebra Computacional BCN

- Ana Belén de Felipe – UPC
- Eulàlia Montoro – UB
- Joel Hurtado – UPC
- Teresa Cortadellas Benítez – URL

arXiv:2511.11783

“La” pregunta

“La” pregunta

Dado un polinomio

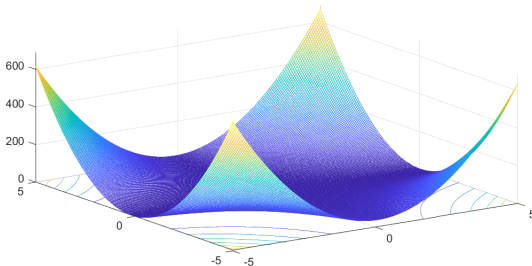
$$f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$$

“La” pregunta

Dado un polinomio

$$f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$$

¿Cómo se puede verificar si $f \geq 0$?



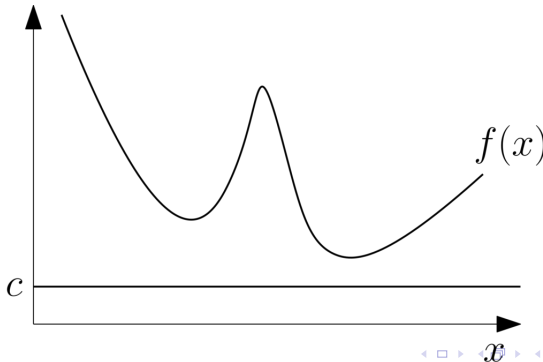
En una variable...

En una variable...

$$f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow$$

En una variable...

$$f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff f(x) = f_1(x)^2 + f_2(x)^2$$



¿Coeficientes racionales?



¿Coeficientes racionales?



$$f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow$$

¿Coeficientes racionales?



$$f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff$$

$$f(x) =$$

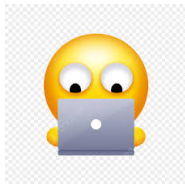
$$f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + f_3(x)^2 + f_4(x)^2 + f_5(x)^2$$

Pourchet – 1971

¿Menos de 5 cuadrados?

¿Menos de 5 cuadrados?

$$x^2 + 7 = x^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$



Pourchet efectivo

Pourchet efectivo

■ Input:

$$f(x) \in \mathbb{Q}[x], \quad f(t) \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$$

Pourchet efectivo

■ Input:

$$f(x) \in \mathbb{Q}[x], \quad f(t) \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$$

■ Output: $f_1(x), \dots, f_5(x) \in \mathbb{Q}[x]$,

$$f(x) = f_1(x)^2 + \dots + f_5(x)^2$$



La prueba de Pourchet

La prueba de Pourchet

$$f(x) = f_1(x)^2 + \dots + f_5(x)^2 \iff$$

La prueba de Pourchet

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x)^2 + \dots + f_5(x)^2 \iff \\ f(x) &= f_{1p}(x)^2 + \dots + f_{5p}(x)^2 \\ \forall p &\in \{2, 3, 5, \dots, \} \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

La prueba de Pourchet

$$\begin{aligned} f(x) = f_1(x)^2 + \dots + f_5(x)^2 &\iff \\ f(x) = f_{1p}(x)^2 + \dots + f_{5p}(x)^2 \\ \forall p \in \{2, 3, 5, \dots\} \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

■ Principio Local-global (Hasse-Minkowski)

La prueba de Pourchet

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x)^2 + \dots + f_5(x)^2 \iff \\ f(x) &= f_{1p}(x)^2 + \dots + f_{5p}(x)^2 \\ \forall p &\in \{2, 3, 5, \dots, \} \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

- Principio Local-global
(Hasse-Minkowski)
- Altamente no algorítmico

¿Se la puede hacer algorítmica?

¿Se la puede hacer algorítmica?

$$p = \infty$$

Teorema (Fácil)

$f(t) \geq 0 \iff y_1^2 + y_2^2 = f(x)$ se
puede resolver en $\mathbb{R}[x]$

¿Se la puede hacer algorítmica?

$$p = \infty$$

Teorema (Fácil)

$f(t) \geq 0 \iff y_1^2 + y_2^2 = f(x)$ se
puede resolver en $\mathbb{R}[x]$

Demostración:

$$x^2 + ax + b = (x - c)^2 + d^2 \text{ si } a^2 - 4b < 0$$

¿Se la puede hacer algorítmica?

$$p = \infty$$

Teorema (Fácil)

$f(t) \geq 0 \iff y_1^2 + y_2^2 = f(x)$ se
puede resolver en $\mathbb{R}[x]$

Demostración:

$$x^2 + ax + b = (x - c)^2 + d^2 \text{ si } a^2 - 4b < 0$$
$$(x - a)^{2k} = ((x - a)^k)^2 + 0^2$$

¿Se la puede hacer algorítmica?

$$p = \infty$$

Teorema (Fácil)

$f(t) \geq 0 \iff y_1^2 + y_2^2 = f(x)$ se
puede resolver en $\mathbb{R}[x]$

Demostración:

$$x^2 + ax + b = (x - c)^2 + d^2 \text{ si } a^2 - 4b < 0$$

$$(x - a)^{2k} = ((x - a)^k)^2 + 0^2$$

$$(u^2 + v^2) \cdot (w^2 + z^2) = \alpha^2 + \beta^2$$

Casi todo p

Casi todo p

Todo $f(x) \in \mathbb{Q}_p[x]$ es una suma de
a lo mas **cuatro** cuadrados si
 $p \notin \{2, \infty\}$

Casi todo p

Todo $f(x) \in \mathbb{Q}_p[x]$ es una suma de
a lo mas cuatro cuadrados si

$$p \notin \{2, \infty\}$$

Cinco cuadrados alcanzan si $p = 2$

Hasta 4 cuadrados es calculable

Hasta 4 cuadrados es calculable

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2)$$

Hasta 4 cuadrados es calculable

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2)$$

Teorema (Pourchet, 71)

$$f(x) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 \text{ en } K[x] \iff$$

$$\blacksquare \text{lc}(f) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \text{ en } K, y$$

Hasta 4 cuadrados es calculable

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2)$$

Teorema (Pourchet, 71)

$f(x) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2$ en $K[x] \iff$

- $\text{lc}(f) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$ en K , y
- $\forall p(x)$ divisor primo de $f(x)$ con multiplicidad impar, hay una solución no trivial de $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ en $K[x]/(p(x))$

Un criterio

Un criterio

Theorem (Pourchet, 71)

Sea $f(x) \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$. Son equivalentes:

1 $f(x) \in \sum_4 \mathbb{Q}[x]^2$

Un criterio

Theorem (Pourchet, 71)

Sea $f(x) \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$. Son equivalentes:

- 1 $f(x) \in \sum_4 \mathbb{Q}[x]^2$
- 2 $f(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$, y en $\mathbb{Q}_2[x]$ todo factor primo de $f(x)$ con multiplicidad impar tiene grado par

Criterio útil

Criterio útil

$$x^2 + 7 = (x - \alpha) \cdot (x + \alpha) \text{ en } \mathbb{Q}_2[x]$$

Criterio útil

$$x^2 + 7 = (x - \alpha) \cdot (x + \alpha) \text{ en } \mathbb{Q}_2[x] \\ \implies \notin \sum_4 \mathbb{Q}[x]^2$$

Criterio útil

$$x^2 + 7 = (x - \alpha) \cdot (x + \alpha) \text{ en } \mathbb{Q}_2[x] \\ \implies \notin \sum_4 \mathbb{Q}[x]^2$$

$$u \in \mathbb{Q}_2^2 \iff \\ u = 2^{2a}(8b + 1), \quad a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{Z}_2$$

Algoritmo

Pourchet's theorem in action: decomposing univariate nonnegative polynomials as sums of five squares

Victor Magron
CNRS LAAS & Institut de
Mathématiques de Toulouse
Toulouse, France
victor.magron@laas.fr

Przemysław Koprowski
University of Silesia in Katowice,
Institute of Mathematics
Katowice, Poland
przemyslaw.koprowski@us.edu.pl

Tristan Vaccon
Université de Limoges; CNRS, XLIM
UMR 7252
Limoges, France
tristan.vaccon@unilim.fr

ISSAC 2023

Suma de dos cuadrados

Algorithm 1 Computing a decomposition of a polynomial as a sum of two squares

Input: A polynomial $f \in \mathbb{Q}[x]$, which is a priori known to be a sum of two squares in $\mathbb{Q}[x]$.

Output: Polynomials $a, b \in \mathbb{Q}[x]$ such that $a^2 + b^2 = f$.

- 1: Construct the quadratic field extension $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$.
- 2: Solve the norm equation

$$\text{lc}(f) = N_{\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}}(x)$$

and denote a solution by $a + bi \in \mathbb{Q}(i)$.

- 3: Factor f into a product of monic irreducible polynomials

$$f = \text{lc}(f) \cdot p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}.$$

- 4: **for** every factor p_j , such that the corresponding exponent e_j is odd **do**
- 5: Factor p_j over $\mathbb{Q}(i)$ into a product $p_j = g_j \cdot h_j$ with $g_j, h_j \in \mathbb{Q}(i)[x]$.
- 6: Set

$$a_j := \frac{1}{2} \cdot (g_j + h_j), \quad b_j := \frac{1}{2i} \cdot (g_j - h_j).$$

- 7: Update a and b setting:

$$a := aa_j + bb_j \quad \text{and} \quad b := ab_j - ba_j.$$

- 8: Update a and b setting:

$$a := a \cdot \prod_{j \leq k} p_j^{2\lfloor e_j/2 \rfloor} \quad \text{and} \quad b := b \cdot \prod_{j \leq k} p_j^{2\lfloor e_j/2 \rfloor}.$$

- 9: **return** a, b .



Suma de 3 or 4 cuadrados

Algorithm 3 Initial solution: modular sum of squares

Input: An irreducible polynomial $f \in \mathbb{Q}[x]$, which is a priori known to be a sum of 3 or 4 squares.

Output: Polynomials h and $g_1, \dots, g_4$ in $\mathbb{Q}[x]$, such that $\deg h \leq \deg f - 2$ and $fh = g_1^2 + \dots + g_4^2$.

1: Construct the number fields:

$$K := \mathbb{Q}[x]/(f) \quad \text{and} \quad L := K(i).$$

2: Solve the norm equation

$$-1 = N_{L/K}(x)$$

and denote the solution by $\xi = \bar{g}_1 + \bar{g}_2 i$, where $g_1, g_2 \in \mathbb{Q}[x]$ are polynomials of degree strictly less than $\deg f$ and $\bar{g}_j$ denotes the image of g_j under the canonical epimorphism $\mathbb{Q}[x] \twoheadrightarrow K$.

3: Set $g_3 := 1, g_4 := 0$ and let $h := (g_1^2 + \dots + g_4^2)/f$.

4: **return** h, g_1, g_2, g_3, g_4 .

¿Cómo usar esto para 5 polinomios?



¿Cómo usar esto para 5 polinomios?



$$f(t) > 0$$

¿Cómo usar esto para 5 polinomios?



$$f(t) > 0 \dots f(t) - \left(\frac{1}{2^l}\right)^2 > 0$$

si $l \gg 0$

¿Cómo usar esto para 5 polinomios?



$$f(t) > 0 \dots f(t) - \left(\frac{1}{2^\ell}\right)^2 > 0$$

si $\ell \gg 0$

$$f(x) - \left(\frac{1}{2^\ell}\right)^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2??$$

Algorithm 6

Algorithm 6

Algorithm 6 Reduction to a sum of 4 squares: odd valuation case

Input: A positive square-free polynomial $f = c_0 + c_1x + \cdots + c_dx^d \in \mathbb{Q}[x]$. The 2-adic valuations of the coefficients of f are $k_j := \text{ord}_2 c_j$ for $0 \leq j \leq d$. Ensure k_d is odd. It is assumed that f is not a sum of 4 squares.

Output: A polynomial $h \in \mathbb{Q}[x]$ such that $f - h^2$ is a sum of 4 (or fewer) squares.

1: Find a positive number ε such that

$$\varepsilon < \inf \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

2: Set $l_1 := \lceil -1/2 \cdot \lg \varepsilon \rceil$.

3: Set $l_2 := \lceil -k_0/2 \rceil + 1$.

4: Set

$$l_3 := \left\lceil \max \left\{ \frac{jk_d - dk_j}{2d - 2j} \mid 0 < j < d \right\} \right\rceil.$$

5: Initialize $l := \max\{l_1, l_2, l_3\}$.

6: **while** $\gcd(d, 2l + k_d) \neq 1$ **do**

7: $l := l + 1$.

8: **return** $h := 2^{-l}$.

Suma de 6 cuadrados

Algorithm 8 Decomposition of a nonnegative univariate rational polynomial into a sum of 6 squares

Input: A nonnegative polynomial $f \in \mathbb{Q}[x]$.

Output: Polynomials $f_1, \dots, f_6 \in \mathbb{Q}[x]$ such that $f_1^2 + \dots + f_6^2 = f$.

- 1: **if** f is a square **then**
- 2: **return** $f_1 := \sqrt{f}, f_2 := \dots f_6 := 0$.
- 3: **if** f is a sum of 2 squares {Use Observation 8 to check it} **then**
- 4: Execute Algorithm 1 to obtain $f_1, f_2 \in \mathbb{Q}[x]$ such that $f_1^2 + f_2^2 = f$.
- 5: **return** f_1, f_2 and $f_3 := \dots f_6 := 0$.
- 6: **if** f is a sum of 4 squares {Use [36, Theorem 17.2] to check it} **then**
- 7: Execute Algorithm 5, to obtain $f_1, \dots, f_4 \in \mathbb{Q}[x]$ such that $f_1^2 + \dots + f_4^2 = f$.
- 8: **return** $f_1, \dots, f_4$ and $f_5 := f_6 := 0$
- 9: Compute the square-free decomposition of $f = g \cdot h^2$, where $g, h \in \mathbb{Q}[x]$ and g is square-free.
- 10: Execute Algorithm 7 with g as an input to obtain $g_1, g_2 \in \mathbb{Q}[x]$ such that $g - g_1^2 - g_2^2$ is a sum of 4 squares in $\mathbb{Q}[x]$.
- 11: Execute Algorithm 5 to decompose $g - g_1^2 - g_2^2$ into a sum of 4 squares in $\mathbb{Q}[x]$. Denote the output by $g_3, \dots, g_6$.
- 12: **return** $f_1 := g_1 h, \dots, f_6 := g_6 h$.

Conjectura

Algorithm 9 Reduction to a sum of 4 squares

Input: A positive square-free polynomial $f = c_0 + c_1x + \dots + c_dx^d \in \mathbb{Q}[x]$.

Output: A polynomial $h \in \mathbb{Q}[x]$ such that $f - h^2$ is a sum of 4 (or fewer) squares.

- 1: **if** f is a sum of 4 squares **then**
 - 2: **return** $h := 0$.
 - 3: Set $f_* := c_d + c_{d-1}x + \dots + c_0x^d$.
 - 4: Find a positive number ε such that
$$\varepsilon < \inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{and} \quad \varepsilon < \inf\{f_*(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$
 - 5: Initialize $l := \lceil -1/2 \cdot \lg \varepsilon \rceil$.
 - 6: **while** True **do**
 - 7: **if** $f - 2^{-2l}$ is irreducible in $\mathbb{Q}_2[x]$ **then**
 - 8: **return** $h := 2^{-l}$.
 - 9: **if** $f - 2^{-2l}x^d$ is irreducible in $\mathbb{Q}_2[x]$ **then**
 - 10: **return** $h := 2^{-l}x^{d/2}$.
 - 11: $l := l + 1$.
-

Nuestros resultados

(CDDHM)

Nuestros resultados

(CDDHM)

- La conjetura funciona si $\deg(f(x)) = 4k$

Nuestros resultados

(CDDHM)

- La conjetura funciona si $\deg(f(x)) = 4k$
- No funciona con esta familia:

$$f_{k,N}(x) = \frac{4x^{2(2k+1)} + x^{2k+1} + 4}{N^2}$$

$$k = 0, \dots, N \in \mathbb{N} \text{ impar}, N > 64$$

Extensión

(CDDHM)

Extensión

(CDDHM)

Teorema

Si $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado
 $d = 2(2k + 1)$, $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}$ tales
que $f(t) - \frac{1}{2^{2\ell}}(t^2 + t + 1)^{2k}t^2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$

Extensión

(CDDHM)

Teorema

Si $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado
 $d = 2(2k + 1)$, $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}$ tales
que $f(t) - \frac{1}{2^{2\ell}}(t^2 + t + 1)^{2k}t^2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$
entonces $f(x) - \frac{1}{2^{2\ell}}(x^2 + x + 1)^{2k}x^2 \in \Sigma_4 \mathbb{Q}[x]^2$
si $f(0) \notin \mathbb{Q}_2^2$

Nos falta el caso

Nos falta el caso

¿Qué hacer si $f(0) \in \mathbb{Q}_2^2$?

Nos falta el caso

¿Qué hacer si $f(0) \in \mathbb{Q}_2^2$?

$$4x^6 + 4x^3 + 9 = (1 + 2x^3)^2 + 8$$

Nos falta el caso

¿Qué hacer si $f(0) \in \mathbb{Q}_2^2$?

$$4x^6 + 4x^3 + 9 = (1 + 2x^3)^2 + 8$$

Conjetura

Si $f(x) \in \mathbb{Q}_2[x]$ es libre de cuadrados y verifica que $f(\mathbb{Q}_2^2) \subset \mathbb{Q}_2^2$ entonces es irreducible en $\mathbb{Q}_2[x]$

Idea de la prueba

Idea de la prueba

$$(*) \quad 2^{2\ell} f(x) - (x^2 + x + 1)^{2k} x^2 = \prod_{j=1}^N P_j(x)$$

Idea de la prueba

$$(*) \quad 2^{2\ell} f(x) - (x^2 + x + 1)^{2k} x^2 = \prod_{j=1}^N P_j(x)$$

$$[x^2 + x + 1]^{2k} [x^2] = \prod_{j=1}^N [P_j(x)]$$

Idea de la prueba

$$(*) \quad 2^{2\ell} f(x) - (x^2 + x + 1)^{2k} x^2 = \prod_{j=1}^N P_j(x)$$

$$[x^2 + x + 1]^{2k} [x^2] = \prod_{j=1}^N [P_j(x)]$$

$$[x^2 + x + 1]^{2k} = \prod_{j_1} [P_{j_1}(x)] \quad y$$

$$[x]^2 = \prod_{j_2} [P_{j_2}(x)]$$

Idea de la prueba

$$(*) \quad 2^{2\ell} f(x) - (x^2 + x + 1)^{2k} x^2 = \prod_{j=1}^N P_j(x)$$

$$[x^2 + x + 1]^{2k} [x^2] = \prod_{j=1}^N [P_j(x)]$$

$$[x^2 + x + 1]^{2k} = \prod_{j_1} [P_{j_1}(x)] \text{ y}$$

$$[x]^2 = \prod_{j_2} [P_{j_2}(x)] \implies P_{j_1}(x) \text{ de grado par}$$

Idea de la prueba

$$(*) \quad 2^{2\ell} f(x) - (x^2 + x + 1)^{2k} x^2 = \prod_{j=1}^N P_j(x)$$

$$[x^2 + x + 1]^{2k} [x^2] = \prod_{j=1}^N [P_j(x)]$$

$$[x^2 + x + 1]^{2k} = \prod_{j_1} [P_{j_1}(x)] \text{ y}$$

$[x]^2 = \prod_{j_2} [P_{j_2}(x)] \implies P_{j_1}(x)$ de grado par y $P_{j_2}(x)$ también sii $(*)$ no tiene raíces

Idea de la prueba

$$(*) \quad 2^{2\ell} f(x) - (x^2 + x + 1)^{2k} x^2 = \prod_{j=1}^N P_j(x)$$

$$[x^2 + x + 1]^{2k} [x^2] = \prod_{j=1}^N [P_j(x)]$$

$$[x^2 + x + 1]^{2k} = \prod_{j_1} [P_{j_1}(x)] \text{ y}$$

$[x]^2 = \prod_{j_2} [P_{j_2}(x)] \implies P_{j_1}(x)$ de grado par y $P_{j_2}(x)$ también sii $(*)$ no tiene raíces $\iff f(0) \notin \mathbb{Q}_2^2$

De manera más general...

De manera más general...

No se necesitan 5 o 6 polinomios
para certificar nonegatividad:

$$f \geq 0 \iff f = \sum_{i=1}^N f_i^2$$

De manera más general...

No se necesitan 5 o 6 polinomios
para certificar nonegatividad:

$$f \geq 0 \iff f = \sum_{i=1}^N f_i^2$$

- Optimización semidefinida
(sobre $\mathbb{R}$)

De manera más general...

No se necesitan 5 o 6 polinomios
para certificar nonegatividad:

$$f \geq 0 \iff f = \sum_{i=1}^N f_i^2$$

- Optimización semidefinida
(sobre $\mathbb{R}$)
- Sobre $\mathbb{Q}$ (Baldo-Krick-Mourrain
2025)

Varias variables: más difícil

Varias variables: más difícil

positividad vs suma de cuadrados

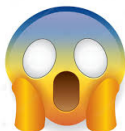
$$f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2 - 3) \geq 0$$

Varias variables: más difícil

positividad vs suma de cuadrados

$$f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2 - 3) \geq 0$$

pero este polinomio no es una suma
de ninguna cantidad de cuadrados

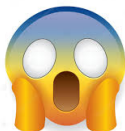


Varias variables: más difícil

positividad vs suma de cuadrados

$$f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2 - 3) \geq 0$$

pero este polinomio no es una suma
de ninguna cantidad de cuadrados



Problema 17 de Hilbert

$\mathbb{R}$ vs $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ vs $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} &40x_0^4 + 8x_0^2x_1^2 + 32x_0^2x_1x_2 + 64x_0^2x_1x_3 \\ &+ 16x_0^2x_2^2 + 16x_0^2x_2x_3 + 32x_0^2x_3^2 + 2x_1^4 \\ &+ 8x_1^2x_2^2 + 8x_1^2x_2x_3 + 16x_1x_2x_3^2 \\ &+ 8x_2^2x_3^2 + 8x_3^4 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 \end{aligned}$$

$\mathbb{R}$ vs $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} &40x_0^4 + 8x_0^2x_1^2 + 32x_0^2x_1x_2 + 64x_0^2x_1x_3 \\ &+ 16x_0^2x_2^2 + 16x_0^2x_2x_3 + 32x_0^2x_3^2 + 2x_1^4 \\ &+ 8x_1^2x_2^2 + 8x_1^2x_2x_3 + 16x_1x_2x_3^2 \\ &+ 8x_2^2x_3^2 + 8x_3^4 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 \end{aligned}$$

no se puede escribir como suma de
cuadrados en $\mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, x_3]$

Bibliografía

Bibliografía

- Koprowski, P.; Magron, V.; Vaccon, T. **Pourchet's theorem in action: decomposing univariate nonnegative polynomials as sums of five squares.** Proceedings of ISSAC 2023
- Pourchet, Y. **Sur la représentation en somme de carrés des polynômes à une indéterminée sur un corps de nombres algébriques.** Acta Arith. 19 (1971)
- CDDHM **On the effective Pourchet's Theorem.** arXiv:2511.11783

Gracias!

MATEMAX

Computational Algebra, Algebraic Geometry and Applications II

Buenos Aires, Argentina, December 15-17 2025



Celebrating Alicia Dickenstein's contributions to Math and beyond



TOPICS OF THIS CONFERENCE INCLUDE BUT ARE NOT LIMITED TO

Algebraic Geometry, Toric Geometry, Tropical Geometry, and their Applications to Biology

<http://mate.dm.uba.ar/> coalaga/

