Implicitación a la Newton-Puiseux

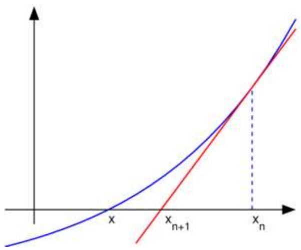
Carlos D'Andrea

UNIVERSITAT DE BARCELONA

cdandrea@ub.edu

http://carlos.dandrea.name

El “método” de Newton



De analysi per aequationes numero terminorum infinitas (1669)

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

$x \approx 2$ está “cerca de la Verdad”

$$x = 2 + p$$

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

$$\approx$$

$$10p - 1 = 0$$

$p = 0,1$ está cerca de la Verdad

$$0,1 + q = p$$

$$q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,0061 = 0$$

$$\approx$$

$$11,23q + 0,061 = 0$$

$$-0,0054 + r = q$$

$$-0,00004854 + s = r$$

$$\cdots$$

La Verdad

$$x \approx 2,0945514$$

$$= 2 + p = 2 + 0,1 + q$$

$$= 2 + 0,1 + (-0,0054) + r = \ldots$$

No todo se puede resolver así

$$x^3 - 3x^2 + 3x = 0$$

$x \approx 1$ está cerca de la Verdad

$$x = 1 + p$$

$$1 + p^3 = 0$$

$$\approx$$

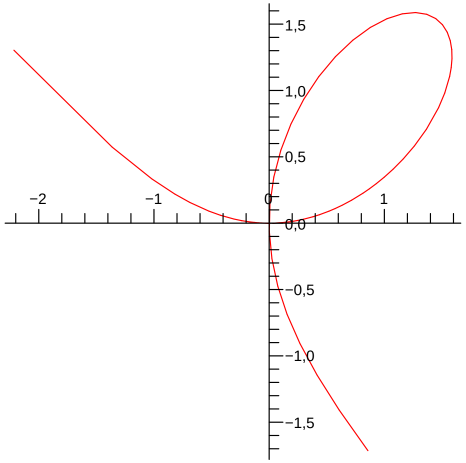
$$?? = 0$$

Víctor Alexandre Puiseux (1820 - 1883)

$$x = 1 + (-1)^{1/3}$$

Series de Puiseux:

un proyecto más ambicioso



Dada $F(x, y)$, se trata de estudiar qué ocurre en un entorno de $(0, 0)$

De Newton a Puiseux

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

$$(2 + p)^3 - 2(2 + p) - 5 = 0$$

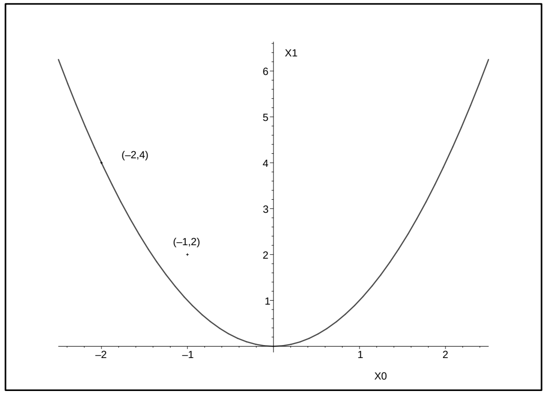
$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 =$$

$$Y := y + 1, X := x - 2$$

$$F(X, Y) = Y - X^3 - 6X^2 - 10X$$

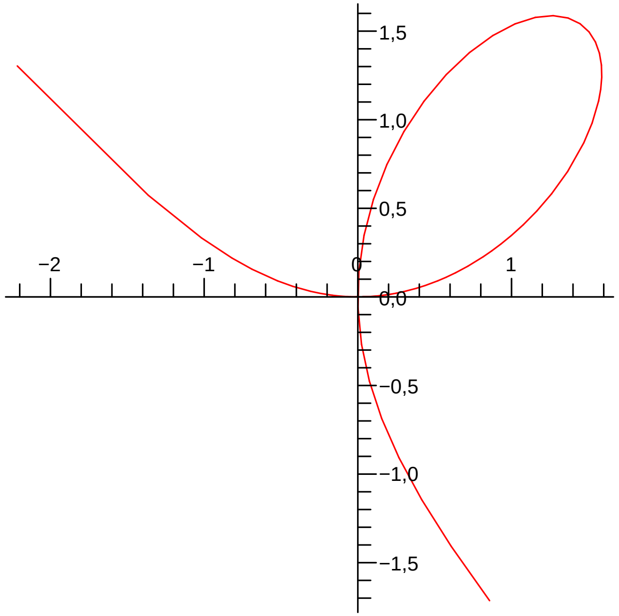
Teorema de la Función Implícita

(Real o Complejo)



Si $F_y(0,0) \neq 0,$ entonces existe $y(x) \neq 0$ analítica en un entorno de $x = 0$ tal que $F(x, y(x)) = 0$

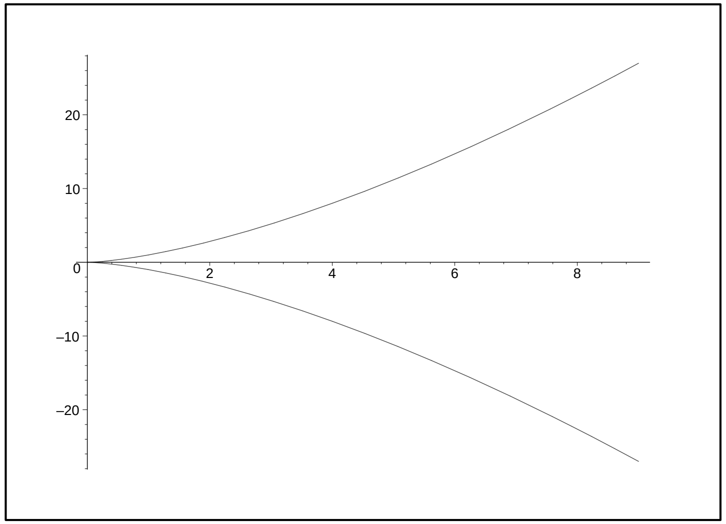
¿Qué hacer aquí?



$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$$F_x = 3x^2 - 3y \quad F_y = 3y^2 - 3x$$

¿O aquí?



$$F(x, y) = x^3 - y^2$$

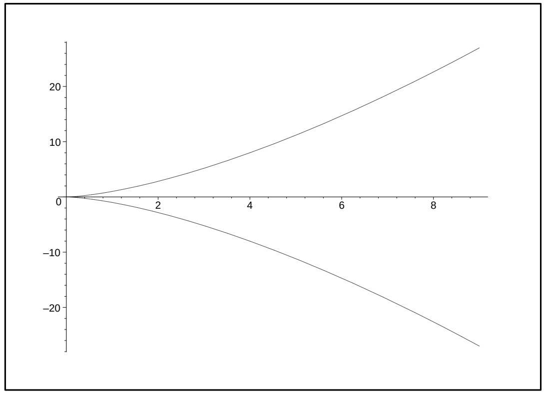
Función Implícita Generalizada

(Complejo)

Existe un número finito de pares $(x(t), y(t))$ analíticos en un entorno de $t = 0$ tales que

- $x(0) = y(0) = 0$
- $F(x(t), y(t)) = 0$
- Alrededor de $(0, 0)$:

  $\{(u, v) \neq (0, 0) : F(u, v) = 0\} = \uplus\{(x(t), y(t)),\ t \neq 0\}$



$$F(x,y) = x^3 - y^2$$

$$\begin{cases} x(t) & = & \xi\, t^2 \\ y(t) & = & \pm t^3 \end{cases}$$

$$\xi^3 = 1$$

Parametrizaciones Locales

En un sistema de coordenadas apropiado, toda parametrización es equivalente a una de la forma

$$\begin{cases} x(t) & = & t^n \\ y(t) & = & a_1 t^{n_1} + a_2 t^{n_2} + \ldots \end{cases}$$

con $0 < n$, $0 < n_1 < n_2 < \ldots$

Cuerpo de Series de Puiseux

$K((x)) := \{$series de potencias en $x^{1/n}\}$

$K((x))^* :=$ cuerpo de fracciones de $K((x))$

Teorema de Puiseux

Si K es algebraicamente cerrado,

entonces $K((x))^*$ también lo es

El método de Puiseux "a la Newton"

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Propongo una solución de la forma

$y(x) = c_0 x^{k_0} +$ términos de orden más alto

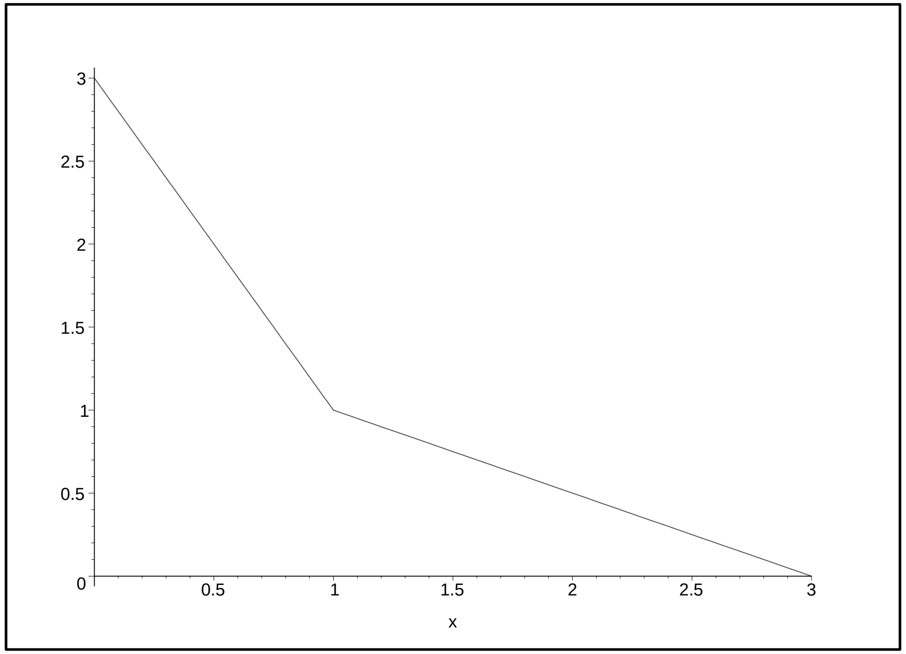
$c_0 \neq 0,\ k_0 \in \mathbb{Q}$ a determinar

$$F(x, y(x)) = x^3 + y(x)^3 - 3xy(x) = 0$$

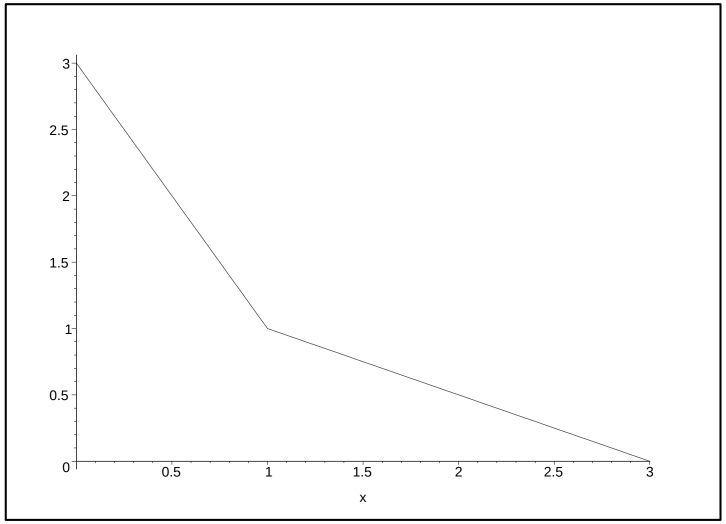
$$= x^3 + \left(c_0 x^{k_0} + t.o.m.a.\right)^3 - 3x \left(c_0 x^{k_0} + t.o.m.a.\right) = 0$$

Ecuación inicial y diagrama de Newton

$$x^3+(c_0x^{k_0})^3-3x\,(c_0x^{k_0})=0$$



$$\begin{cases} 3 = k_0 + 1 \\ 1 - 3c_0 = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 3k_0 = k_0 + 1 \\ c_0^3 - 3c_0 = 0 \end{cases}$$

Sigo "a la Newton"

$$y(x) = \frac{1}{3}x^2 + c_1 x^{k_1} + t.o.m.a$$

$$F(x, y(x)) = 0$$

- Encuentro ecuaciones para c_1 y k_1
- $\ldots$

Observación

La forma del diagrama de Newton determina la naturaleza de las parametrizaciones locales

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & \frac{1}{3}t^2 + \ldots \end{array}\right.$$

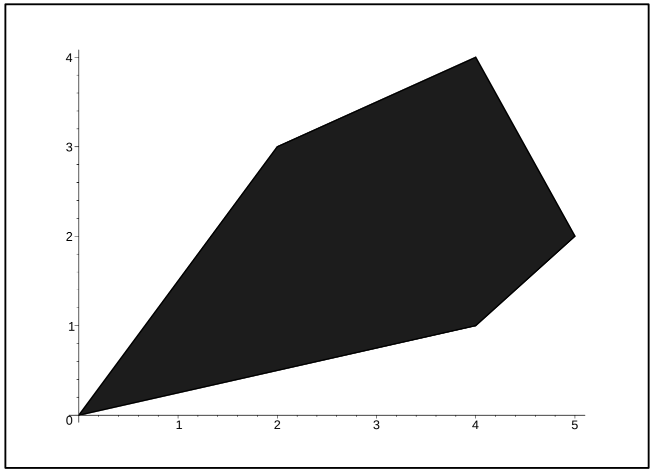
$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t^2 \\ y(t) & = & \pm\sqrt{3}t + \ldots \end{array}\right.$$

Problema Inverso

(Trabajo en conjunto con Martín Sombra)

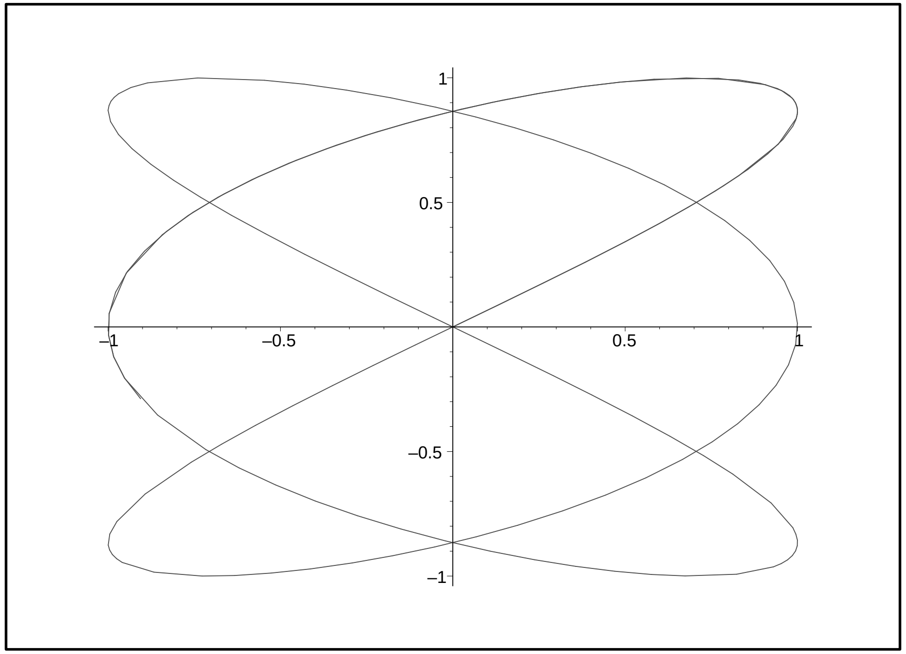
Si conozco todas las parametrizaciones locales, es posible reconstruir el diagrama de Newton si $F(x, y)$ es irreducible en $K[x, y]$

Y si conozco el diagrama de Newton de $F(x, y)$ puedo calcular su polígono de Newton



$$a_0 + a_1 X^4 Y + a_2 X^5 Y^2 + a_3 X^4 Y^4 + a_4 X^5 Y^2 + a_5 X^2 Y^3$$

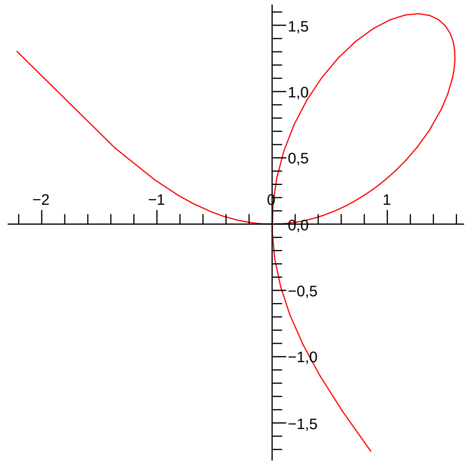
Curvas racionales en el plano



una curva racional es aquella que

admite una parametrización (racional)

Ejemplo



$$X^3 + Y^3 - 3XY = 0$$

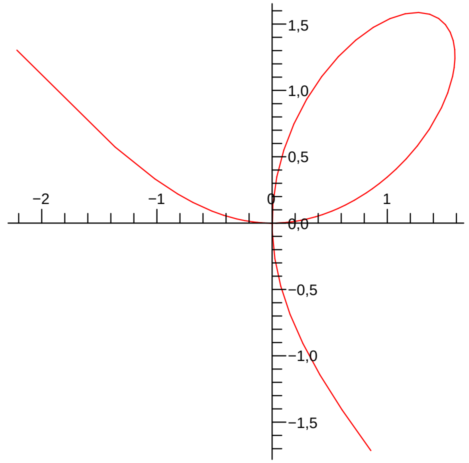
$$\rho : t \mapsto \left(\frac{3t^2}{t^3+1}, \frac{3t}{t^3+1} \right)$$

Las parametrizaciones racionales contienen información sobre todas las parametrizaciones locales

$$\Downarrow$$

puedo calcular el polígono de Newton a partir de la parametrización

Vuelta al ejemplo



$$\rho(t) = \left(\frac{3t^2}{t^3+1}, \frac{3t}{t^3+1} \right)$$

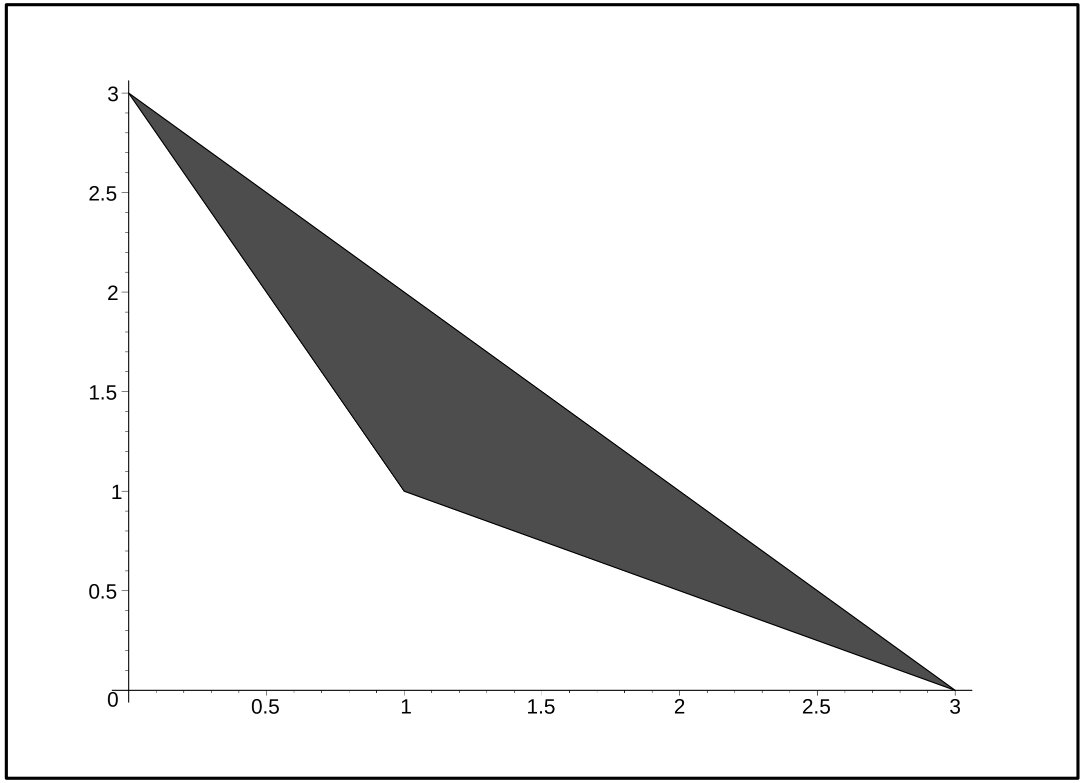
Pasa por $(0,0)$ en $t = 0$ y $t = \infty$

$$\begin{cases} x(t) &= 3t^2 + \ldots \\ y(t) &= 3t + \ldots \end{cases}$$

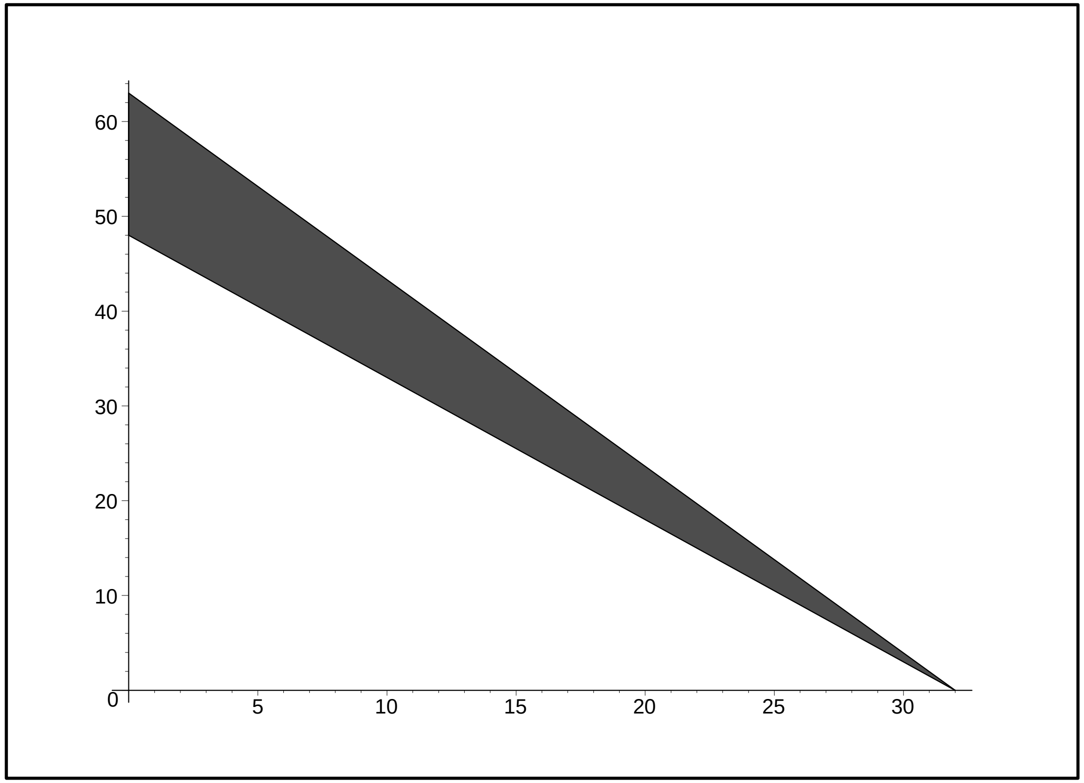
$$T := \frac{1}{t}$$

$$\begin{cases} x(T) &= 3T + \ldots \\ y(T) &= 3T^2 + \ldots \end{cases}$$

El polígono de Newton del Folio de Descarte



El Problema de la Implicitación Tropical



Dada la parametrización $\rho(t)$ **, calcular** $N\left(F(\rho)\right)$

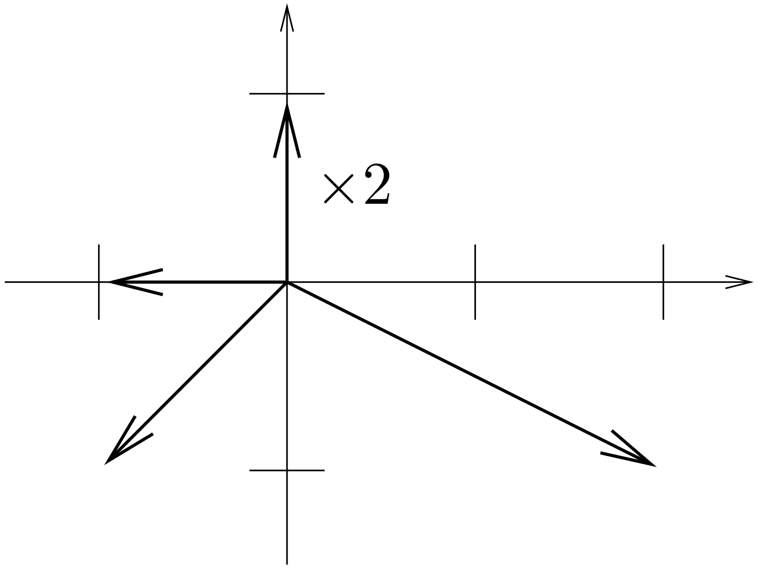
Teorema de Implicitación tropical

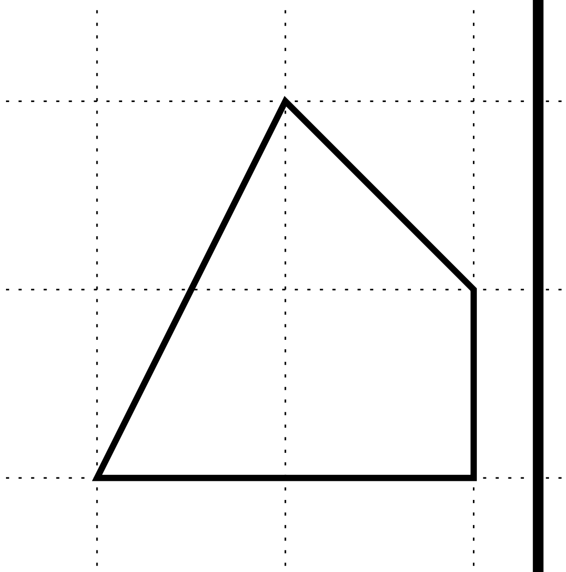
Dickenstein-Feitchner-Sturmfels 07

Sturmfels-Tevelev 07

D-Sombra 07

$$\deg(\rho) N\big(F(\rho)\big) = P\Big(\big(ord_v(\rho)\big)_{v\in\mathbb{P}^1}\Big)$$

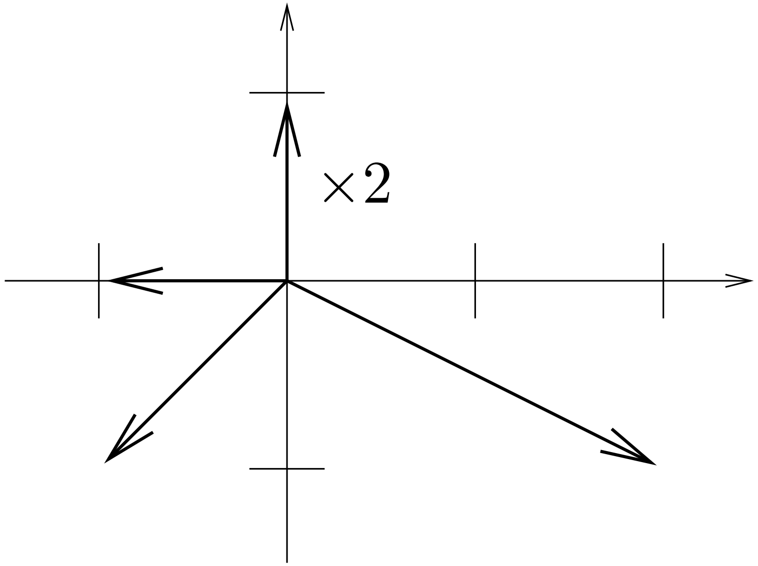


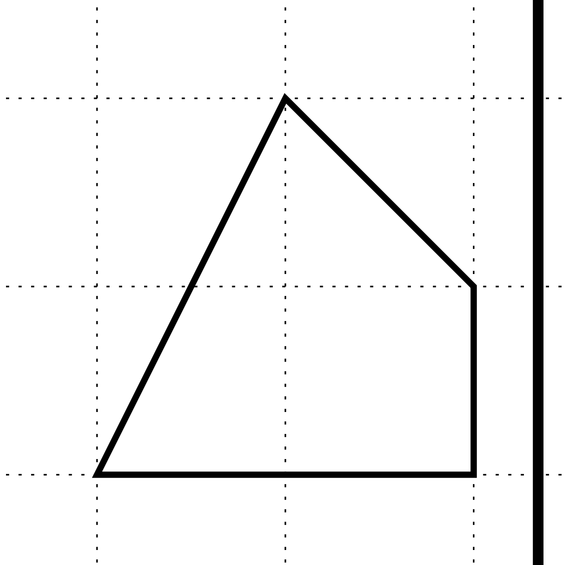


Ejemplo

$$\rho(t) = \left(\frac{1}{t(t-1)}, \frac{t^2 - 5t + 2}{t} \right)$$

- $ord_0(\rho) = (-1, -1)$
- $ord_1(\rho) = (-1, 0)$
- $ord_\infty(\rho) = (2, -1)$
- si $v^2 - 5v + 2 = 0$ $\;ord_v(\rho) = (0, 1)$



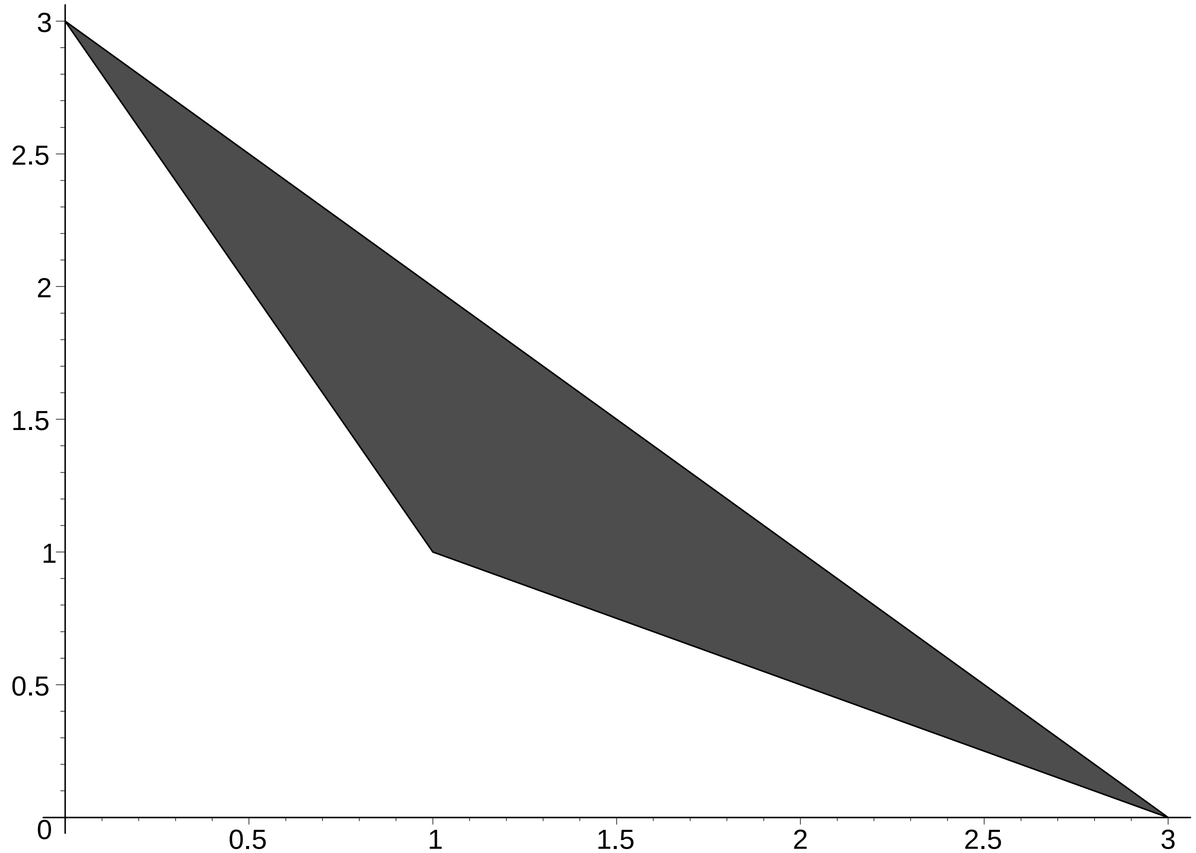


$$F(X,Y) = 1 - 16X - 4X^2 - 9XY - 2X^2Y - XY^2$$

El folio de Descartes

$$\rho(t) = \left(\frac{3t^2}{t^3+1}, \frac{3t}{t^3+1} \right)$$

- $ord_0(\rho) = (2,1)$
- $ord_\infty(\rho) = (1,2)$
- si $v^3+1=0$ $\ ord_v(\rho) = (-1,-1)$



3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

El método de Newton y la Geometría Tropica

El esquema del diagrama de Newton

puede hacerse sobre cualquier cuerpo

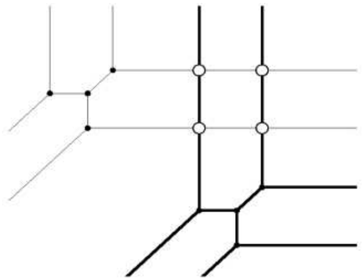
K con una valuación discreta

La Geometría Tropical estudia la

imagen de variedades bajo el morfismo

de valuación

El Teorema de Puiseux es un "Teorema tropical"



Bézout's Theroem: two tropical conics intersect in four points.*

¿Qué hay en varias variables?

Geometría Tropical

- **Sturmfels, Tevelev, Yu**
- **Itenberg, Mikhalkin, Shustin**
- **Tema especial del IMDEA...**

Teoremas de Puiseux en varias variables

- **John McDonald (2002)**
- **Pedro González-Perez (2003)**
- **...**

¿Implicitación tropical en varias variables?

Solo casos genéricos en función de algoritmos (Sturmfels-Yu 2007)

Muchas Gracias

cdandrea@ub.edu

http://carlos.dandrea.name