

Distribución de raíces de sistemas de ecuaciones polinomiales

Carlos D'Andrea



`cdandrea@ub.edu`

`http://carlos.dandrea.name`

El Origen de esta historia

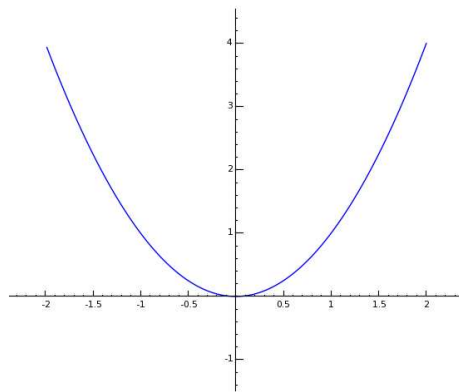
Preparando el examen de álgebra -1



La consigna

Resolver todas las parábolas con
coeficientes enteros

entre -2 y 2



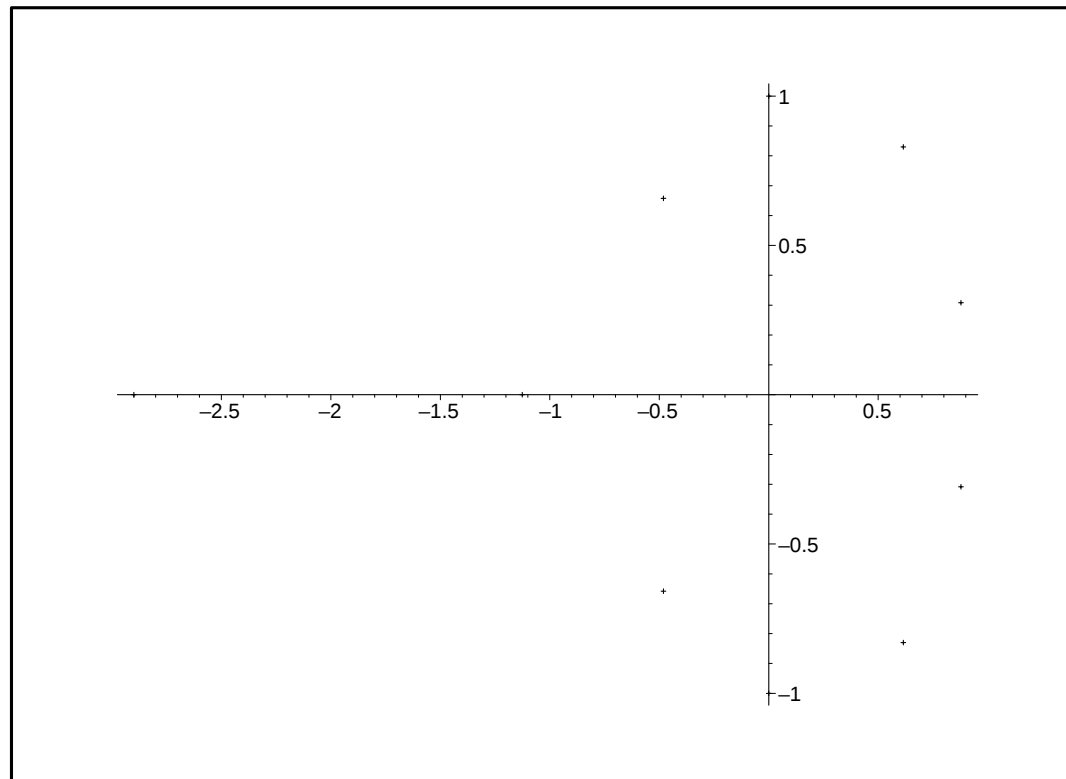
Problema general

Dado $n \in \mathbb{N}$, Encontrar las raíces de todos los polinomios de grado n con coeficientes enteros entre -2 y 2

Algunos experimentos

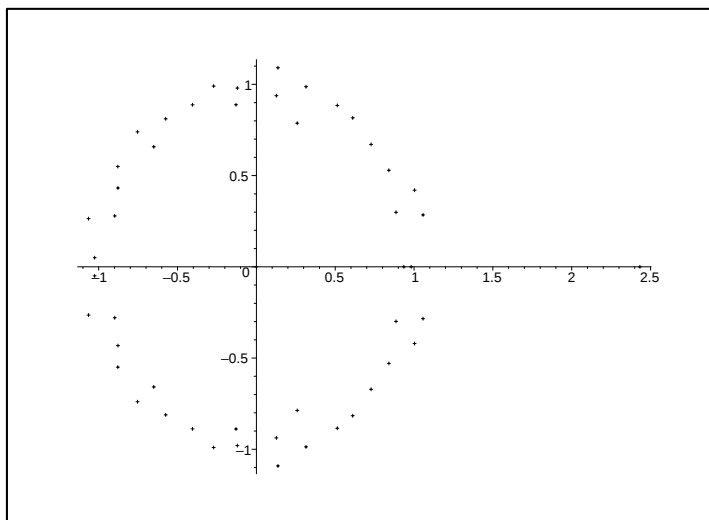
$$n = 10$$

$$f = -2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^5 - 2x^7 + 2x^8 - 2x^9 - x^{10}$$



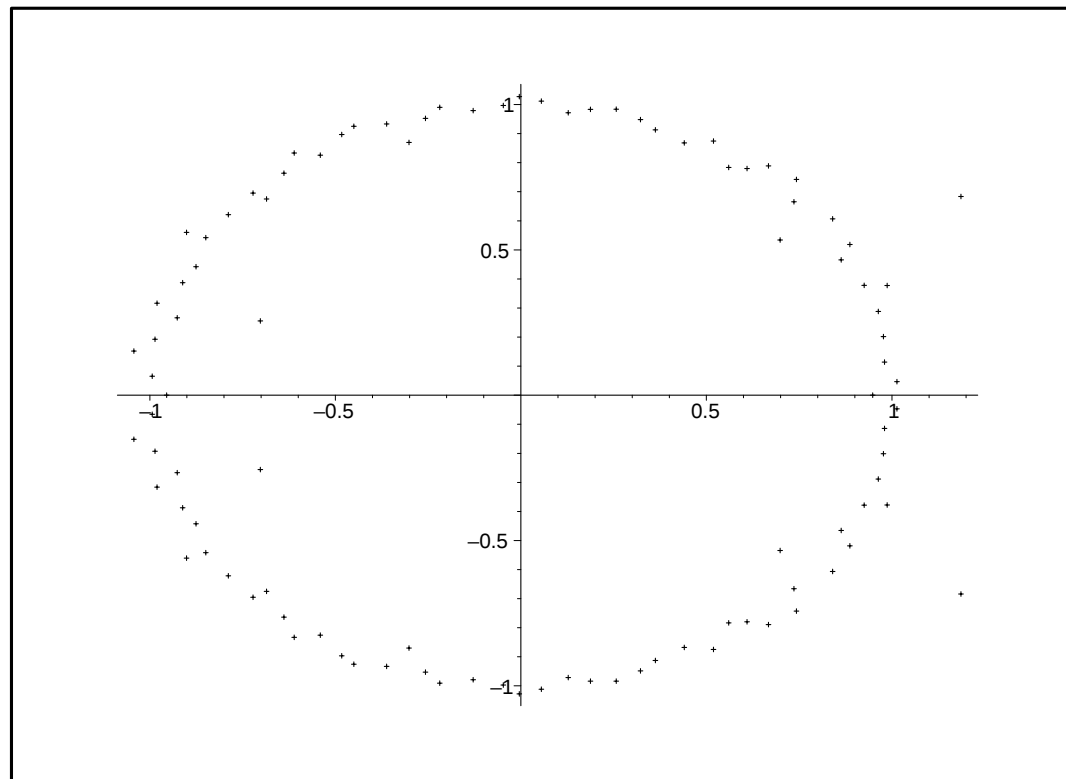
$$n = 50$$

$$f = -2x - x^{48} - 2x^{49} - x^{28} - 2x^{26} + 2x^{27} - x^{24} + x^{25} - 2x^3 + x^5 + 2x^6 + x^7 + x^8 - 2x^9 - 2x^{10} - x^{33} + 2x^{35} + x^{36} - 2x^{37} - 2x^{39} - 2x^{40} - x^{41} - x^{42} + 2x^{44} + x^{45} - x^{46} + x^{50} - 2x^{31} - x^{11} + 2x^{12} - x^{13} + 2x^{14} + 2x^{17} + x^{18} + 2x^{19} + x^{20} + 2x^{22} + 2x^{23} - 2x^{30}$$



$$n = 100$$

$$\begin{aligned} f = & 2 + 2x - 2x^{96} - 2x^{97} + x^{98} + 2x^{99} - 2x^{100} + x^{29} - 2x^{27} + x^{24} + 2x^{25} - \\ & 2x^{90} - x^{91} - x^{92} - x^2 + 2x^4 + x^5 + 2x^6 - 2x^7 - 2x^{10} - 2x^{86} + 2x^{88} - \\ & x^{89} + x^{83} - 2x^{84} + 2x^{54} + 2x^{55} - x^{79} + x^{80} + 2x^{81} + 2x^{75} + 2x^{76} + 2x^{77} + \\ & 2x^{73} - 2x^{74} + 2x^{72} - 2x^{67} - x^{68} + x^{69} - 2x^{70} - 2x^{51} - 2x^{52} - x^{53} + x^{60} - \\ & 2x^{57} - 2x^{56} - x^{95} - x^{59} + x^{61} - x^{63} - x^{64} + x^{66} + 2x^{71} + x^{78} + x^{33} + \\ & x^{34} + x^{37} - 2x^{39} - 2x^{40} - 2x^{41} + x^{44} + x^{47} - 2x^{50} + x^{31} - 2x^{32} - 2x^{11} - \\ & x^{12} - x^{13} - 2x^{14} + x^{15} + x^{16} - 2x^{17} - x^{19} - 2x^{20} - x^{22} + 2x^{23} - 2x^{30} \end{aligned}$$

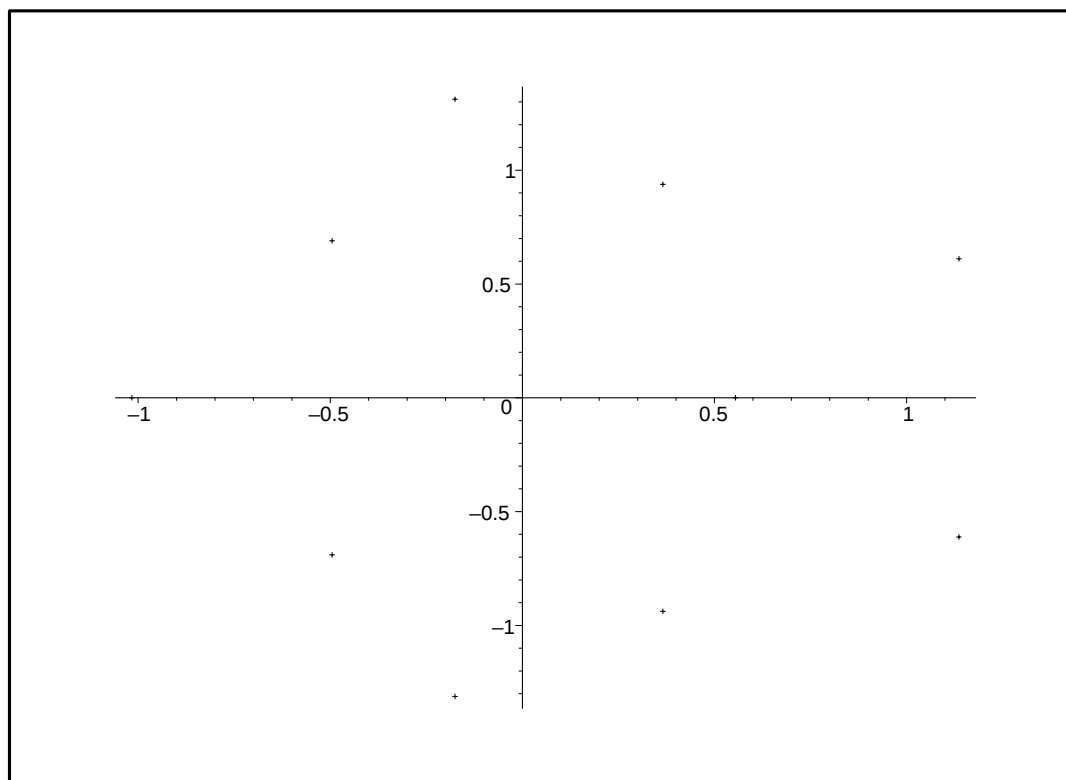


Problema más general

Dado $n \in \mathbb{N}$, Encontrar las raíces de todos los polinomios de grado n con coeficientes enteros entre $-n$ y n

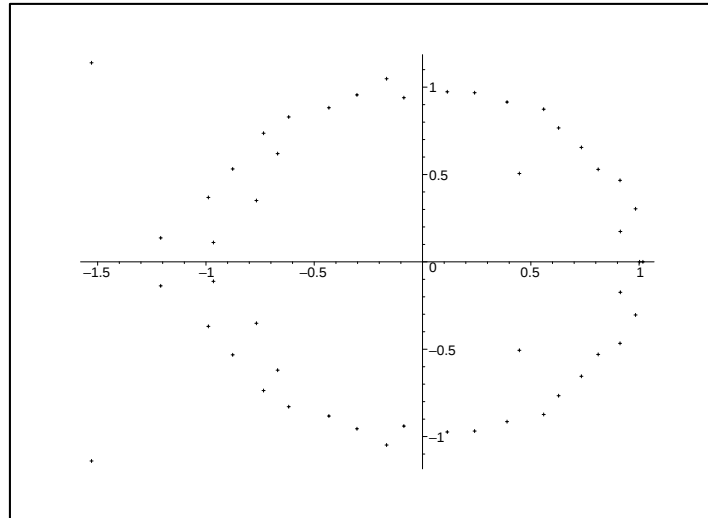
$$n = 10$$

$$f = -6 + 8x - x^2 + 10x^3 - 3x^4 + 8x^5 + 4x^6 - 9x^7 + 9x^8 - 6x^9 + 5x^{10}$$



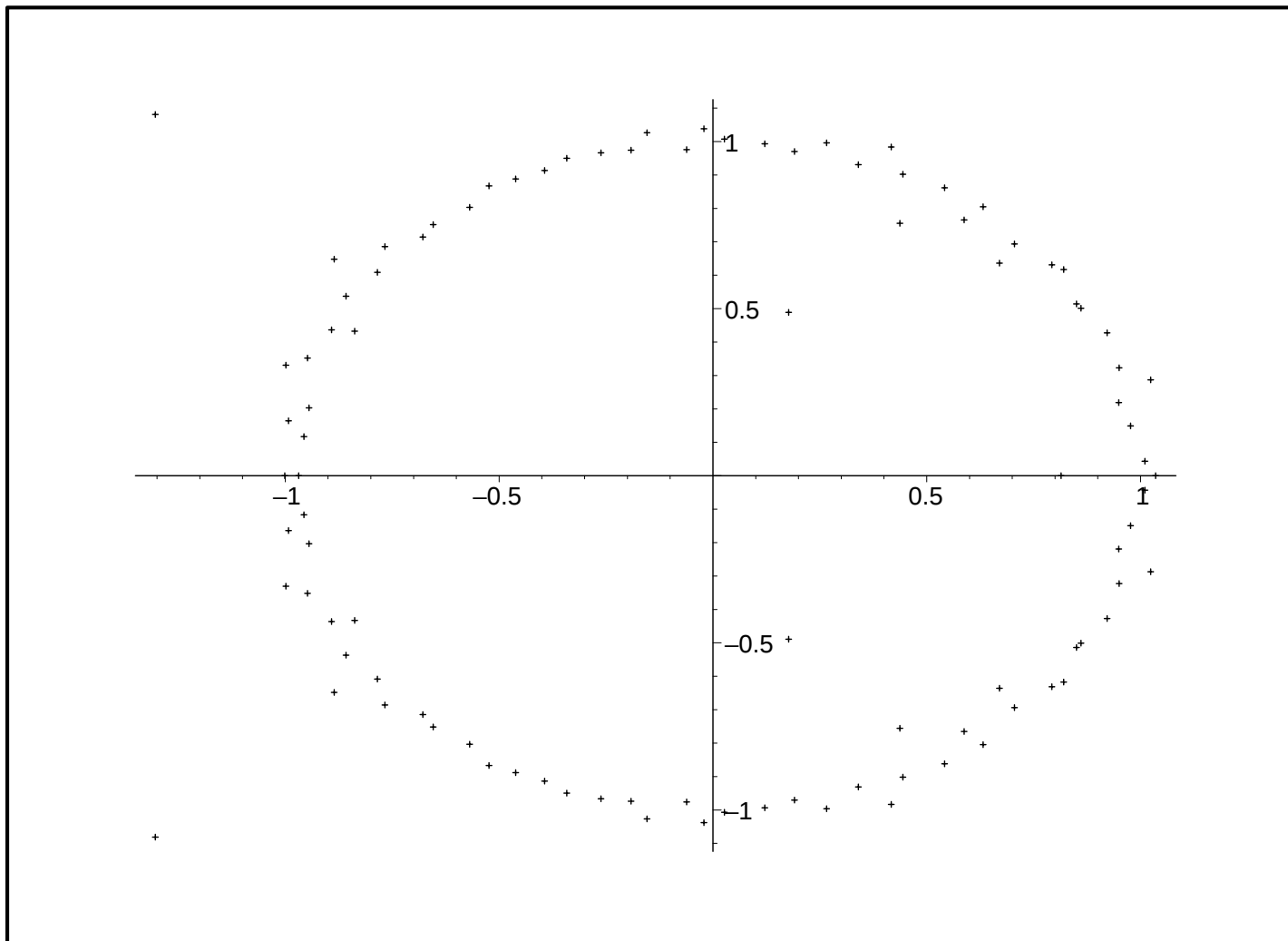
$$n = 50$$

$$\begin{aligned} f = & -24 + 12x - 44x^{48} - 48x^{49} - 42x^{28} + 15x^{29} + 34x^{26} + 22x^{27} - \\ & 24x^{24} + 29x^{25} + 14x^2 - 40x^3 - 48x^4 + 35x^5 + 24x^6 + 27x^7 - 3x^8 - \\ & 15x^9 - 21x^{10} + 12x^{14} - 15x^{50} - 14x^{33} + 38x^{34} + 10x^{35} - 23x^{36} + \\ & 48x^{37} + 30x^{38} - 23x^{39} - 31x^{40} + 2x^{41} + 24x^{42} + 9x^{43} - 15x^{44} - 29x^{45} + \\ & 45x^{46} + 40x^{47} + 40x^{31} - 40x^{32} + 38x^{11} + 8x^{12} - 16x^{13} - 39x^{15} + \\ & 2x^{16} - 38x^{17} - x^{18} + 16x^{19} - 44x^{20} - 20x^{21} + 22x^{22} + 28x^{23} + 32x^{30} \end{aligned}$$



$$n = 100$$

$$\begin{aligned} f = & 30 - 45x - 91x^{74} - 33x^{75} + 4x^{73} - 59x^{79} + 35x^{92} - 57x^{48} + 49x^{49} + \\ & 2x^{93} - 87x^{28} - 16x^{29} - 78x^{26} - 31x^{27} + 19x^{50} - 73x^{24} - 63x^{25} + 98x^2 + \\ & 29x^3 - 97x^4 + 47x^5 + 46x^6 - 88x^7 - 74x^8 - 60x^9 - 62x^{10} - 27x^{81} - 82x^{80} - \\ & 92x^{78} - 50x^{77} - 41x^{76} - 21x^{95} + 8x^{66} - 7x^{67} + 75x^{64} - 19x^{94} - 48x^{63} + \\ & 92x^{65} - 18x^{60} + 53x^{61} + 84x^{59} - 15x^{57} - 13x^{58} - 64x^{91} + 84x^{90} - 54x^{89} + \\ & 67x^{55} - 81x^{56} - 27x^{54} - 61x^{88} + 43x^{87} + 49x^{86} + 51x^{84} - 12x^{85} - 64x^{83} + \\ & 52x^{82} + 43x^{70} - 91x^{71} - 97x^{72} + 76x^{68} + 14x^{69} + 73x^{99} - 56x^{97} + 41x^{98} + \\ & 73x^{96} + 44x^{100} + 2x^{51} - 79x^{52} + 87x^{53} - 43x^{14} + 39x^{62} + 50x^{33} + 53x^{34} + \\ & 64x^{35} + 57x^{36} - 57x^{37} - 31x^{38} + 85x^{39} + 30x^{40} - 49x^{41} + 6x^{42} - 82x^{43} + \\ & 34x^{44} + 59x^{45} + 7x^{46} + 91x^{47} + 59x^{31} + 58x^{32} - 4x^{11} - 71x^{12} - 68x^{13} + \\ & 74x^{15} + 60x^{16} - 3x^{17} + 23x^{18} - 55x^{19} + 80x^{20} - 32x^{21} + 17x^{22} - 14x^{23} - 69x^{30} \end{aligned}$$



La Discrepancia

$$f = a_n(x - \rho_1 e^{i\theta_1}) \dots (x - \rho_n e^{i\theta_n})$$

- Discrepancia radial

$$\Delta_r(f, \varepsilon) := \frac{1}{n} \# \{j : 1 - \varepsilon < \rho_j < \frac{1}{1 - \varepsilon}\}$$

- Discrepancia angular

$$\Delta_a(f) := \sup_{0 \leq \alpha < \beta < 2\pi} \left| \frac{\#\{j : \alpha \leq \theta_j < \beta\}}{n} - \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \right|$$

Erdős - Turán versión “random”

$$f = f_n = \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

$$L(f_n) := \frac{\sum |a_j|}{\sqrt{|a_0 a_n|}}$$

Si $\log(L(f_n)) = o(n)$, entonces

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_a(f_n) = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_r(f_n, \varepsilon) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

Erdős - Turán versión cuantitativa

$$1 - \Delta_r(f_n, \varepsilon) \leq \frac{2}{n\varepsilon} \log L(f_n)$$

$$\Delta_a(f_n) \leq 16 \sqrt{\frac{\log L(f_n)}{n}}$$

Algunas consecuencias

Número de raíces reales

<

$$51 \sqrt{n \log(L(f_n))}$$

(Erhardt - Schur - Szego)

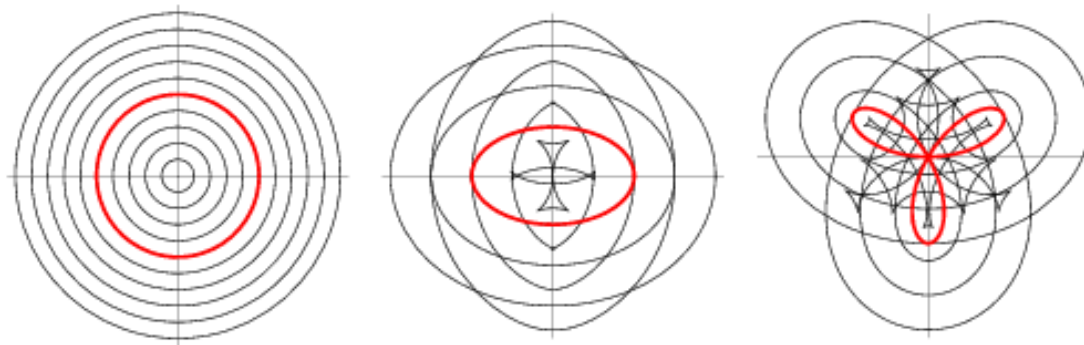
Algunas consecuencias II

si $g(z) = 1 + b_1z + b_2z^2 + \dots$ tiene
radio de convergencia 1, entonces los
ceros de la sucesión de sumas parciales
se acumulan uniformemente en la
circunferencia unitaria

(Jentzsch-Szego)

Sistemas de polinomios?

(Evidencia I)



Singularidades de curvas en el plano con coeficientes
“controlados” tienden a “equidistribuirse”

(Diaconis-Galligo)

Equidistribución

(Erdős-Turán probabilístico))

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{f_n(z)=0} \delta_z$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}} g \, d\mu_n = \int_{S^1} g \, d\mu$$

$\forall g \in C(\mathbb{C})$ de soporte compacto

La medida de Haar

$$\text{En } S^1 = \{z : |z| = 1\}$$

$$\int_{S^1} x^k d\mu = \delta_{0k}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\mu^2 := \text{la medida de Haar en } S^1 \times S^1$$

Evidencia II

Equidistribución de puntos algebraicos

Una sucesión de puntos algebraicos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^2$ tal
que

- $\deg(p_k) = k$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} h(p_k) = 0$

se equidistribuye en $S^1 \times S^1$

(Bílú)

Dos polinomios en dos variables

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

- $\deg(f_1) = n_1$
- $\deg(f_2) = n_2$
- * ¿Qué son n , a_0 y a_n ?
- * $\log L(f_i) = o(n_i) \implies$ equidistribución?

Caso particular

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(y) = 0 \end{cases}$$

$$n = n_1 n_2$$

Erdős-Turán se generaliza fácilmente

“En general”

se puede pasar de $\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$

a $\begin{cases} R_1(x) = 0 \\ R_2(y) = 0 \end{cases}$

“agregando” raíces

¿ Es verdad que

- equidistribución de $\mathbf{R}$ $\implies$
equidistribución de $\mathbf{f}$?
- $\log L(\mathbf{f}) = o(n) \implies \log L(\mathbf{R}) = o(n)$?

Equidistribución

R vs f

$$\begin{cases} f_1(x, y) = R_1(x) = 0 \\ f_2(x, y) = x - y = 0 \end{cases}$$

produce

$$\begin{cases} R_1(x) = 0 \\ R_1(y) = 0 \end{cases}$$

pero no hay equidistribución

Se necesita más
(D-Galligó-Sombra)

$$a, b \in \mathbb{Z},$$

$$R_{a,b}(\mathbf{f}) = \prod_{f_j(x_0, y_0)=0} (t - x_0^a y_0^b)$$

Equidistribución en

$$R_{a,b}(\mathbf{f}) \forall (a, b) \neq (0, 0) \implies$$

equidistribución en $\mathbf{f}$

Idea: “La tomografía”

Equidistribución en

$$R_{a,b}(\mathbf{f}) \forall (a, b) \neq (0, 0) \iff$$

$$\int_{\mathbb{C}^2} x^a y^b d\delta_n \rightarrow 0$$

como la medida de Haar!

Control del crecimiento

(D-Galligó-Sombra)

$$L(R_{a,b}(\mathbf{f})) = \mathcal{O}(\sqrt{a^2 + b^2} L(\mathbf{f}))$$

Cuando la proyección es “propia”

Todavía nos falta definir bien a L

$a_0 a_n = 0 \implies$ tengo raíces en el “infinito” de

$$\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

En dos variables, la condición es $R_\infty(\mathbf{f}) = 0$ que mide
cuando tengo raíces fuera de $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$

Erdős-Turán random generalizado

(D-Galligó-Sombra)

Si $f_1(x, y), f_2(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ tienen

- la cantidad “correcta” de raíces en $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$
- soporte “propio”
- $\log L(f_j) = o(n_j), j = 1, 2$

entonces, las raíces de $\mathbf{f} = 0$ se equidistribuyen cuando

$$n_1, n_2 \rightarrow \infty$$

Erdős-Turán random cuantitativo??

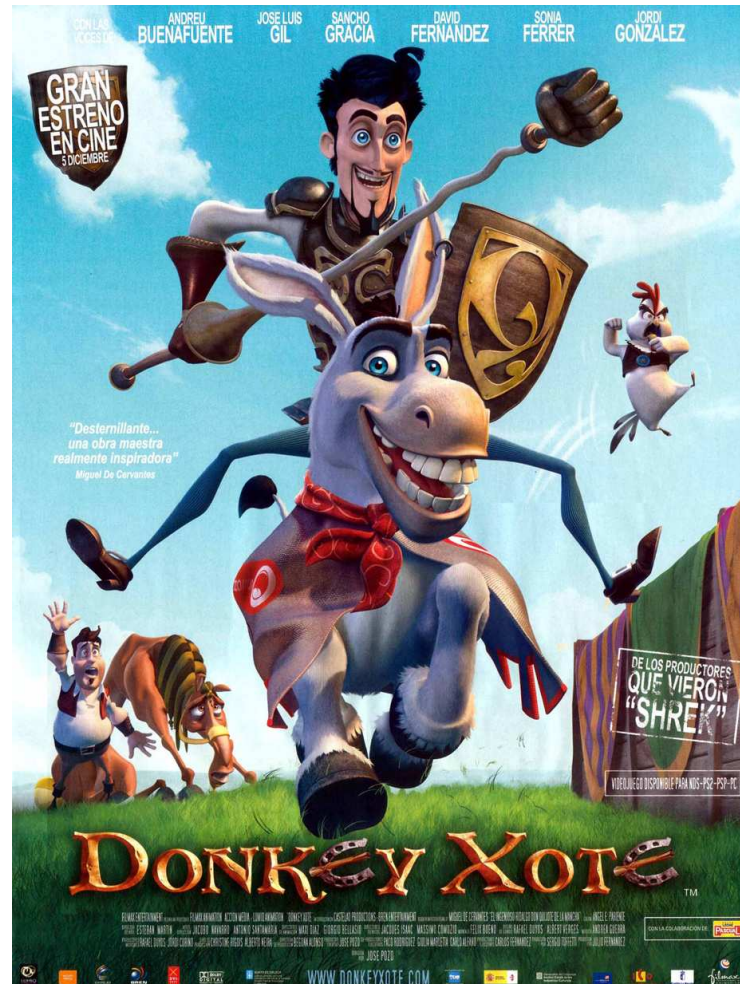
Para la discrepancia radial:

$$1 - \Delta_f(\mathbf{f}, \varepsilon) \leq \frac{2}{\varepsilon} \left(\frac{\log(L(f_1))}{n_1} + \frac{\log(L(f_2))}{n_2} \right)$$

Para la discrepancia angular:

????????

Versiones efectivas de la tomografía??



Moltes Gràcies...

