Cálculo de Raíces Reales de Polinomios

Carlos D'Andrea
Departament d'Àlgebra i Geometria
Universitat de Barcelona
`carlos@dandrea.name`

Agosto de 2006

1. Introducción

El propósito de estas notas es el de contestar las siguientes preguntas. Dado un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ con coeficientes reales,

1. ¿Cuántas raíces reales tiene?
2. Dado un intervalo real $[a, b]$. ¿Cuántas raíces reales tiene $p(x)$ en ese intervalo?
3. ¿Es posible dar a priori un intervalo $[a, b]$ donde $p(x)$ tenga *todas* sus raíces en ese intervalo?

Queremos abordar este problema desde un punto de vista computacional. Esto es, dados los coeficientes del polinomio $a_0, a_1, \ldots, a_n$, intentaremos responder a estas preguntas con respuestas *computables*, es decir que dependan de realizar finitos cálculos elementales sobre los coeficientes de $p(x)$. Por *cálculos elementales* entenderemos las cuatro operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división de números reales) y además, por tratarse de números reales, el *signo* de estos números será de vital importancia.

Notar que si uno puede responder estas tres preguntas, entonces se puede diseñar un *algoritmo* para estimar las raíces de un polinomio cualquiera con tanta precisión como se quiera. El algoritmo sería el siguiente:

Algoritmo 1.1.

Entrada: $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.
Salida: $N \in \mathbb{N}$, $I_1, \ldots, I_N$ *intervalos reales de longitud menor que* ϵ *tales que*

- $p(x)$ *tiene* N *raíces reales;*
- *Para cada* $i = 1, \ldots, N$ *existe* $x_i \in I_i$ *tal que* $p(x_i) = 0$.

Algoritmo:

i) Calcular N *(usando* 1.*).*

ii) Calcular un intervalo I *donde* $p(x)$ *tenga todas sus raíces en* I *(usando* 3.*).*

iii) Dividir I *en dos intervalos de igual longitud* I_1 *e* I_2.

iv) Calcular el número de raíces que tiene $p(x)$ *en* I_1 *y en* I_2 *(usando* 2.*).*

v) Repetir iii) y iv) con I_1 *e* I_2*, e iterar esta proceso hasta obtener intervalos de longitud menor que* ϵ *donde la cantidad de raíces en cada intervalo sea* 0 *o* 1.

La presentación de este trabajo será la siguiente: en la sección 2 fijaremos la notación que usaremos y mostraremos algunos resultados preliminares. En la sección 3 demostraremos la regla de los signos de Descartes, que si bien no resuelve completamente ninguna de las cuestiones planteadas al principio, tiene la ventaja de ser una herramienta sencilla y práctica a la hora de hacer cálculos, además de poder ser demostrada con técnicas elementales. En la sección 4 estimaremos el tamaño de las raíces reales y complejas de polinomios con coeficientes reales y complejos en función del tamaño de los coeficientes. Esto servirá para contestar la tercer pregunta planteada arriba. En la sección siguiente introduciremos algunas herramientas elementales de análisis que permitirán realizar cálculos sencillos para estimar el tamaño de las raíces reales, y también serán útiles más adelante..

La regla de los signos se generaliza naturalmente en el Teorema de Budan-Fourier (sección 6). En la sección 7 presentaremos el Teorema de Sturm, que calcula el número de raices que tiene un polinomio en un intervalo cerrado. En la última sección mostraremos la implementación de estos resultados en el software `Maple`.

2. Primeras definiciones y resultados preliminares

A lo largo de estas notas consideraremos solamente polinomios con coeficientes *reales*. En algunos casos, cuando los razonamientos valgan con mayor generalidad, entonces usaremos el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Como estamos interesados en calcular sus *raíces* o *ceros*, abusaremos del lenguaje identificando polinomios con *funciones polinomiales*.

Asumimos que el lector está familiarizado con el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, y con el orden total $<$ de los números reales. Usaremos algunas de las propiedades de continuidad de funciones a valores reales más adelante.

Definición 2.1. *Un polinomio o función polinomial* $p(x)$ *a valores reales es una función* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *para la cual se cumple que existen* $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

A veces nos referiremos al polinomio $p(x)$ simplemente como p, siempre y cuando quede en claro cuál es la variable que toma los valores reales. Denotaremos con $\mathbb{R}[x]$ al conjunto de todos los polinomios a valores reales.

Definición 2.2. *Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. El grado de p, que denotaremos con* $\deg(p)$ *se define como*

$$\deg(p) := \text{máx}\{j : \ a_j \neq 0\}.$$

Si p es el polinomio idénticamente cero, definimos su grado como $-\infty$. Así, cada vez que hablemos de polinomios de grado menor o igual que un número entero k, siempre estaremos incluyendo al polinomio nulo.

Lamentablemente, con la definición que hemos dado de polinomio arriba, no queda claro que haya unicidad en la escritura de un polinomio, es decir que podría ser que existan $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ tal que

$$p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n = b_0 + \ldots + b_m x^m \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esto atentaría contra la definición de grado que hemos dado también, ya que por un lado (si $a_n \neq 0$) el grado de p sería n y por el otro (si $b_m \neq 0$) sería m.

Proposición 2.3. *Supongamos que existen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ tal que*

$$p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n = b_0 + \ldots + b_m x^m \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

con $a_n \neq 0 \neq b_m$. Entonces $n = m$ y $a_j = b_j \forall j = 0, \ldots, n$.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad $m \leq n$. Restando las dos expresiones polinomiales que definen a p en (2), resulta

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x^i = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

con $c_i := a_i - b_i$ si $i = 0, \ldots, m$, y $c_i := a_i$ si $m + 1 \leq i \leq n$. El enunciado quedará demostrado si conseguimos mostrar que $c_i = 0 \ \forall i = 0, \ldots, n$.

Demostremos entonces ahora que si $q(x) := \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $c_i = 0 \forall i = 0, \ldots, n$. La demostración la hacemos por inducción en n. Para $n = 0$, se tiene que $q(x) = c_0 = 0 \forall x \in \mathbb{R}$, y esto naturalmente implica que $c_0 = 0$.

Veamos el caso general. supongamos el enunciado cierto para sumas con n sumandos, y veamos cómo de alli se deduce el caso general. Como $q(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j = 0 \forall x \in \mathbb{R}$, entonces también vale que $q(x+1) = \sum_{j=0}^{n} c_j (x+1)^j = 0$. Restamos estas dos expresiones y tenemos

$$\begin{aligned}
0 \quad := \quad & q(x+1) - q(x) = \textstyle\sum_{j=0}^{n} c_j \left((x+1)^j - x^j\right) = \sum_{j=0}^{n} c_j \left(\sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} x^i\right) \\
= \quad & \textstyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} c_j \binom{j}{i} x^i \\
= \quad & \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(c_{i+1}\binom{i+1}{i} + c_{i+2}\binom{i+2}{i} + \ldots + c_n \binom{n}{i}\right) x^i.
\end{aligned}$$

La última expresión solamente involucra potencias de x hasta orden $n-1$. Usando la hipótesis inductiva, nos queda

$$c_{i+1}\binom{i+1}{i} + c_{i+2}\binom{i+2}{i} + \ldots + c_n\binom{n}{i} = 0 \quad \forall i = 0, \ldots, n-1.$$

En notación matricial,

$$\begin{bmatrix} \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \ldots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{2}{1} & \ldots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \binom{n}{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz del sistema es triangular superior, luego su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal: $\prod_{i=0}^{n}\binom{i+1}{i} \neq 0$. Luego, el sistema admite la solución única $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, por lo tanto $q(x) = c_0 \forall x \in \mathbb{R}$ y esto trivialmente implica que c_0 también es igual a cero. $\square$

Ejercicio 2.4. *Demostrar que*

$$(x+1)^j = \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}x^i.$$

Corolario 2.5. *El grado de un polinomio está bien definido.*

El coeficiente no nulo que acompaña a la potencia más alta de x será de importancia para nosotros.

Definición 2.6. *Si* $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ *es un polinomio de grado* n, *entonces* a_n *se llama el coeficiente principal de* $p(x)$.

Ahora vamos a definir lo que será para nosotros la *raíz* o *cero* de un polinomio.

Definición 2.7. *Un número real* $x_0 \in \mathbb{R}$ *se dice raíz o cero de un polinomio* $p(x)$ *si y solo si* $p(x_0) = 0$.

Proposición 2.8. x_0 *es raíz de* $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ *si y solo si existe* $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ *tal que* $p(x) = (x - x_0)q(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Veamos la implicación fácil. Si $p(x) = (x - x_0)q(x)$, entonces se tiene trivialmente $p(x_0) = (x_0 - x_0)q(x_0) = 0$, que era lo que queríamos ver.

Ahora veamos la otra implicación. Supongamos $p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$ y que $p(x_0) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x) - p(x_0) \\ &= \sum_{j=0}^{n} c_j \left(x^j - x_0^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} c_j (x - x_0) x^i {x_0}^{j-1-i} \\ &= (x - x_0)\left(\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} c_j x^i {x_0}^{j-1-i}\right), \end{aligned}$$

y el resultado vale haciendo $q(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=i}^{n} c_j {x_0}^{j-1-i} \right) x^i$. $\square$

De la escritura de $q(x)$ al final de la demostración de la proposición se deduce

Corolario 2.9. *Si $p(x)$ tiene grado n y x_0 es raíz de $p(x)$, entonces $p(x) = (x - x_0)q(x)$ con $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado $n - 1$.*

Haciendo ahora inducción sobre el grado de un polinomio, tenemos nuestra primer cota sobre la cantidad de ceros de polinomios con coeficientes reales:

Corolario 2.10. *Si el grado de $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ es n, entonces $p(x)$ tiene a lo más n raíces en $\mathbb{R}$.*

Como consecuencia de este corolario, tenemos un resultado que será de utilidad más adelante.

Corolario 2.11. *Un polinomio con coeficientes reales que se anula en infinitos puntos es necesariamente el polinomio nulo.*

Un concepto principal en el estudio de las raíces de un polinomio es el de "multiplicidad". Introduciremos aquí su definición, y estudiaremos algunas propiedades más adelante.

Definición 2.12. *Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) = 0$. Decimos que x_0 es raíz de $p(x)$ con multiplicidad s si y solo si $p(x) = (x - x_0)^s q(x)$ con $q(x_0) \neq 0$.*

De la definición debería quedar claro que la multiplicidad está bien definida. En efecto, si

$$(x - x_0)^s q(x) = (x - x_0)^{\overline{s}} \overline{q}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

con $s > \overline{s}$ (podemos suponer esto sin pérdida de generalidad) y $q(x_0) \neq 0 \neq \overline{q}(x_0)$, entonces se tendrá

$$(x - x_0)^{s-\overline{s}} q(x) = \overline{q}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}.$$

El polinomio $h(x) := (x - x_0)^{s-\overline{s}} q(x) - \overline{q}(x)$ se anula en $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ que es un conjunto infinito. Por el corolario 2.11, se tiene que $h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, lo cual implica que $h(x_0) = \overline{q}(x_0) = 0$, una contradicción.

2.1. Polinomios y números reales

Hasta ahora todas las propiedades que hemos enunciado valen si remplazamos el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales y en su lugar utilizamos un cuerpo $\mathbb{K}$ cualquiera de característica cero. Lo que distingue al cuerpo de los números reales de otros cuerpos es la noción de "orden" que existe entre sus elementos, y la noción de "completitud" de la recta real. Veremos cómo se manifiesta esto en términos de polinomios. Los siguientes enunciados son clásicos, y su demostración puede encontrarse en cualquier libro de análisis básico. Enunciaremos y demostraremos los resultados solamente para polinomios para no salirnos de los objetivos de estas notas.

Teorema 2.13. *Sea* $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ *y* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Si* $p(x_0) < 0$ *(resp.* $p(x_0) > 0$*) entonces existe* $\delta > 0$ *tal que* $p(x) < 0$ *(resp.* $p(x) > 0$*) en el intervalo abierto* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad $p(x_0) < 0$, el otro caso sale multiplicando el polinomio por -1. Escribimos $p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$. Como $p(x_0) \neq 0$, alguno de los coeficientes de p es distinto de cero. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a_n \neq 0$ (es decir, n es el grado de p).

Sea $h := p(x_0) < 0$. Escribimos

$$p(x) = (p(x) - p(x_0)) + p(x_0) = (p(x) - p(x_0)) + h.$$

Notar que si podemos mostrar que $p(x) - p(x_0) < -h/2$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces se tendrá

$$p(x) \leq -h/2 + h = h/2 < 0$$

en ese intervalo.

Tenemos entonces

$$p(x) - p(x_0) = \sum_{j=0}^{n} a_j \left(x^j - x_0^j\right) = (x - x_0) \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} a_j x^i x_0^{j-i-1}.$$

Sean $A := \max\{|a_0|, \ldots, |a_n|\}$ y $\delta_0 < 1$. Entonces, si $|x - x_0| < \delta_0$, se tiene $|x| < \delta_0 + |x_0|$ y podemos acotar:

$$\left| \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} a_j x^i x_0^{j-i-1} \right| < (n+1)^2 A \left(|x_0| + \delta_0\right)^n.$$

Tomemos entonces $0 < \delta < \min\left\{\delta_0, \frac{|h|}{2(n+1)^2 A(|x_0| + \delta_0)^n}\right\}$. Para ese valor de δ vale que si $|x - x_0| < \delta$,

$$|p(x) - p(x_0)| = |x - x_0| \left| \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} a_j x^i x_0^{j-i-1} \right| < \delta \, (n+1)^2 A \left(|x_0| + \delta_0\right)^n < |h|/2$$

si $|x - x_0| < \delta$, y ésto es lo que queríamos demostrar. □

Ejercicio 2.14. *Mostrar que*

$$x^j - x_0^j = (x - x_0) \left(\sum_{i=0}^{j-1} x^i x_0^{j-1-i} \right).$$

Notar que no hemos usado aquí ninguna propiedad de completitud de los números reales, solamente que es un cuerpo ordenado y arquimediano. El teorema 2.13 también vale para polinomios con coeficientes racionales., y el resultado que sigue también.

Corolario 2.15. *Sea $p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ con $a_n \neq 0$. Entonces, existe $M > 0$ tal que el signo de $p(x)$ es el mismo que el signo de a_n (resp. $(-1)^n a_n$) si $x > M$ (resp. $x < -M$).*

Demostración. Escribimos

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = x^n \left(a_0 \frac{1}{x^n} + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + \ldots + a_n \right) = x^n q\left(\frac{1}{x}\right),$$

con $q(t) := a_n + a_{n-1} t + \ldots + a_0 t^n$. Notar que si $x > 0$ (resp. $x < 0$) entonces el signo de $p(x)$ es el mismo que el signo de $q(\frac{1}{x})$ (resp. $(-1)^n q(\frac{1}{x})$). Como $q(0) = a_n \neq 0$, entonces se tiene por el teorema 2.13 que existe $\delta > 0$ tal que $q(t)$ tiene el mismo signo que a_n si $|t| < \delta$

Sea entonces $M := \frac{1}{\delta}$. Si $x > M$ (resp. $x < -M$) entonces $\frac{1}{x} < \delta$, y de aquí se deduce que $q(\frac{1}{x})$ tendrá el mismo signo que a_n. $\square$

Ejercicio 2.16. *Demostrar que el razonamiento épsilon-delta también vale para polinomios en $\mathbb{R}[x]$: dado $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|p(x) - p(x_0)| < \epsilon$ si $|x - x_0| < \delta$. ¿Vale también para polinomios en $\mathbb{Q}[x]$?*

Teorema 2.17 (Teorema de Bolzano). *Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que existen x_0, x_1 con $x_0 < x_1$, $p(x_0) < 0$ y $p(x_1) > 0$. Entonces existe $r \in (x_0, x_1)$ tal que $p(r) = 0$.*

Notar que este resultado ya no es válido en $\mathbb{Q}[x]$. En efecto, el polinomio $p(x) := x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ satisface $p(1) = -1 < 0$ y $p(2) = 2 > 0$. Sin embargo, no tiene ninguna raíz racional.

Demostración. Para demostrar el teorema de Bolzano, usaremos el teorema 2.13 junto con la propiedad de conexion de la recta real. Supongamos que para todo $r \in (x_1, x_2)$, $p(r) \neq 0$. Entonces se tendrá que $p(r) > 0$ o $p(r) < 0$. Hagamos la siguiente partición del intervalo (x_1, x_2) :

$$\begin{aligned} I^+ &:= \{r \in (x_1, x_2) : \ p(r) > 0\}, \\ I^- &:= \{r \in (x_1, x_2) : \ p(r) < 0\}. \end{aligned}$$

Se tiene lo siguiente:

- Tanto I^+ como I^- son distintos de vacío, ya que en un entorno de x_1 (resp. x_2), se tiene $p(r) < 0$ (resp. $p(r) > 0$).
- Tanto I^+ como I^- son conjuntos abiertos, ya que en virtud del teorema 2.13, si $r \in I^+$ entonces en un entorno de r se tendrá $p > 0$.

Luego, resulta que el intervalo abierto (x_1, x_2) se escribe como una unión disjunta de dos conjuntos abiertos I^+ e I^-, lo cual contradice el hecho de que el intervalo sea conexo. La contradicción proviene de suponer que no existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $p(r) = 0$. $\square$

3. La regla de los Signos de Descartes

En 1636 Descartes -en su libro “Geométrie” (cf. [5])- describió una regla para acotar el número de raices positivas de un polinomio con coeficientes reales. La regla es muy sencilla, lo cual la hace de mucha utilidad. Antes de enunciar la regla, veamos una definición preliminar.

Definición 3.1. *Dada una sucesión finita de números reales* $x_1, \ldots, x_n$*, llamaremos número de variaciones de signo de esta sucesión, y denotaremos con* $V(x_1, \ldots, x_n)$ *a la cantidad de “cambios” en el signo de la secuencia* $x_1, \ldots, x_n$*.*

Ejemplo 3.2.

- $V(1, 3, -2, 1, -4, -8, -3, 4, 1) = 4.$
- $V(4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4) = 0.$
- $V(2, 5, 0, -2, 0, -2, 0) = 1.$

De los ejemplos anteriores se deduce que la presencia de elementos nulos en la sucesión no influye en el número de variaciones de signo (uno podría sacarlos de la sucesión y obtener el mismo resultado).

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar el resultado de Descartes.

Teorema 3.3 (Regla de los signos de Descartes).
Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ *un polinomio con coeficientes reales. El número de raíces positivas de* $p(x)$*, contada cada una de ellas tantas veces como indica su multiplicidad, es menor o igual que* $V(a_0, \ldots, a_n)$*. En todos los casos, es congruente a* $V(a_0, \ldots, a_n)$ *módulo* 2.

Ejemplo 3.4.

- *De acuerdo a la regla de los signos, el polinomio* $x^k + x^u - x - 1$ $k, u > 1$ *tiene exactamente una raíz real positiva. De hecho, es fácil ver que* $x_0 = 1$ *es esa raíz. Del teorema se deduce también (sin hacer ningún cálculo auxiliar) que esta raíz es simple.*
- *En general, si* A *y* B *son números reales positivos, entonces* $Ax^k + Bx^u - x - 1$ *tendrá una sola raíz real positiva.*

Veamos cómo se lee la regla de los signos de Descartes en los casos donde el grado del polinomio es bajo.

Ejemplo 3.5. *Sea* $p(x) := a_0 + a_1 x \in \mathbb{R}[x]$ *de grado uno. En este caso, la única raiz real es igual a* $-a_0/a_1$*, que será positiva y si solo* $V(a_0, a_1) = 1$*. En este caso, la regla de los signos se cumple con exactitud.*

Ejemplo 3.6. *Sea* $p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ *un polinomio de grado* 2 *con coeficientes reales. Veámos caso por caso las distintas situaciones*

- *$a_0 \geq 0, a_1 \geq 0, a_2 \geq 0$ (notar que es el mismo caso que $a_0 \leq 0, a_1 \leq 0, a_2 \leq 0$). En este caso, está claro que $p(x) \geq 0 \ \forall x > 0$ con igualdad solo cuando $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. La regla de los signos dice que no hay raíces reales en este caso.*

- *$a_0 \leq 0$, $a_2 \geq 0$ (mismo caso que $a_0 \geq 0, a_2 \leq 0$). Independientemente del valor de a_1, aqui el número de variación de signos será igual a uno, y es fácil ver que $p(0) \leq 0$ y que $p(x)$ tiende a infinito cuando $x \to \pm\infty$. Así que por continuidad habrá una raíz negativa y otra positiva de $p(x)$. La regla de los signos es exacta en estos casos.*

- *$a_0 \geq 0$, $a_1 \leq 0$, $a_2 \geq 0$ ($a_0 \leq 0$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \leq 0$). En este caso, la cantidad de cambios de signos es dos, y la regla de los signos dice que o bien hay una raíz real positiva doble, o bien dos raices reales positivas, o bien ninguna. Esto puede verse sabiendo que tanto $p(0)$ como los valores de $p(x)$ para $|x|$ "grande" tienen el mismo signo, o sea que la parabola "cae" o bien totalmente a la derecha del eje y o bien totalmente a la izquierda. Es fácil construirse ejemplos donde hayan dos raices reales positivas, una sola doble o ninguna cumpliendo con esta condición.*

Observación 3.7. *Si uno quiere estimar los ceros negativos de $p(x)$, lo puede hacer usando la regla de los signos de Descartes con $p(-x)$.*

La demostración del teorema 3.3 se basa en el siguiente lema.

Lema 3.8. *Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ y $c > 0$. Escribimos $(x-c)p(x) = b_0+b_1x+\ldots+b_{n+1}x^{n+1}$. Entonces $V(a_0, \ldots, a_n) \leq V(b_0, \ldots, b_{n+1})$ y además*

$$V(a_0, \ldots, a_n) = V(b_0, \ldots, b_{n+1}) + 1 \mod 2.$$

Demostración. Supongamos sin perder generalidad que $b_{n+1} > 0$ y que $a_0 \neq 0$. Sea $k \leq n+1$ tal que el signo de $b_{n+1}, b_n, \ldots, b_k$ es positivo o cero, y b_{k-1} es negativo. Usaremos el esquema de "la regla de Ruffini" para ver cómo se relacionan los signos de los a_i con los b_j.

Tenemos entonces

$$\begin{array}{c|cccccccc} & b_{n+1} & b_n & \ldots & b_k & b_{k-1} & \ldots & b_1 & b_0 \\ c & & & & & & & & \\ \hline & b_{n+1} & b_{n+1}c + b_n & \ldots & (*)c + b_k & (*)c + b_{k-1} & \ldots & (*)c + b_1 & 0 \\ & & & & & & & & \\ & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_{k-1} & a_{k-2} & \ldots & a_0 & \end{array}.$$

De este esquema se deduce lo siguiente:

- Como $b_{n+1}, \ldots, b_k$ son positivos o cero, entonces $a_n, \ldots, a_{k+1}$ son positivos.

- No sabemos si a_k es negativo o no, pero lo que SI sabemos es que si a_n, a_{n-1}, …, a_j son positivos y a_{j+1} es negativo, entonces b_{j-1} es negativo.
- Recíprocamente, si a_j es negativo y a_{j+1} es positivo, entonces b_{j-1} es positivo.

De aquí se deduce intuitivamente (y se puede hacer una demostración inductiva de este hecho) que cada cambio de signo de la secuencia $a_n, \ldots, a_0$ viene inducido por un cambio de signo en la secuencia $b_{n+1}, \ldots, b_0$. Luego,

$$V(a_0, \ldots, a_n) \leq V(b_0, \ldots, b_{n+1}).$$

Para culminar, solo hay que chequear la paridad, pero esto es trivial si se tiene en cuenta que $a_n = b_{n+1} > 0$ y que $b_0 = -c\, a_0 \neq 0$, asi que $V(a_0, \ldots, a_n)$ tiene distinta paridad que $V(b_0, \ldots, b_{n+1})$. $\square$

Ejercicio 3.9. *Demostrar que* $V(a_0, \ldots, a_n)$ *es par si y solo si* $a_0\, a_n > 0$.

3.1. Demostración de la regla de los signos de descartes (teorema 3.3)

Supongamos que $x_1, \ldots, x_k$ son todas las raíces positivas de $p(x)$ contadas con su multiplicidad. Entonces, usando iteradamente el corolario 2.9, se tiene que

$$p(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_k) q(x) \tag{3}$$

con $q(x)$ un polinomio con coeficientes reales sin ninguna raíz positiva. Escribimos $q(x) = x^k(q_0 + q_1 x + \ldots + q_s x^s)$ con q_0 y q_s distintos de cero.

Notar que el producto $q_0\, q_s$ tiene que ser positivo, sino se tendría $q(0)$ y $q(M)$ con signos distintos, para M grande (por el corolario 2.15)y eso implicaría, por el teorema de Bolzano (teorema 2.17), que $q(x)$ tiene una raíz positiva.

Entonces, por el ejercicio 3.9, resulta que $V(q_0, \ldots, q_s)$ es par. El teorema resulta aplicando V a los coeficientes de $p(x)$, usando la identidad (3), el lema 3.8 e inducción.

Ejemplo 3.10. *Consideremos el polinomio*

$$p(x) := x^{11} + x^8 - 3x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

La variación de signos de los coeficientes de $p(x)$ *es* 5. *Por otro lado,*

$$p(-x) := -x^{11} + x^8 + 3x^5 + x^4 - x^3 - 2x^2 - x - 2,$$

que tiene como variación de signos 2. *Luego, podemos concluir lo siguiente:*

- *La cantidad de ceros positivos de* p *es uno, tres o cinco.*

- *La cantidad de ceros negativos de p es cero o dos.*
- *p tiene al menos cuatro raíces complejas no reales.*

Más adelante estudiaremos las raíces de este polinomio con más detalle.

Ejercicio 3.11. *Verificar la regla de los signos de Descartes con cada una de los siguientes polinomios de grado dos:*

- $8x^2 - 8x + 1$,
- $4x^2 - 4x + 1$,
- $x^2 - x + 1$.

4. Cotas sobre el tamaño de las raices

En esta sección vamos a ocuparnos de resolver el problema de encontrar una estimación sobre el tamaño de las raíces de un polinomio antes de comenzar a calcularlos. La idea es dar cotas superiores para el tamaño de las raíces en función de los coeficientes. Las dos proposiciones siguientes también valen para polinomios con coeficientes complejos donde se debe reemplazar la función "valor absoluto" por la función "módulo". Los enunciaremos y demostraremos con toda generalidad.

Proposición 4.1. *Sea $p(z) := a_0 + \ldots + a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$ con $a_n \neq 0$. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ es una raíz de p, entonces*

$$|z_0| \leq \text{máx}\left\{1, \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|}{|a_n|}\right\}. \tag{4}$$

Esta cota es bastante razonable ya que por ejemplo si uno toma el polinomio lineal $p(z) := z - M$, entonces para valores grandes de M la única raíz de p coincide con la cota superior de (4)

Demostración. Vamos a usar la desigualdad triangular para números complejos que dice que para todo par de números complejos z_1, z_2, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Más en general, se tendrá $|z_1 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + \ldots + |z_n|$ para n números complejos $z_1, \ldots, z_n$.

Supongamos $z_0 \neq 0$ sino el resultado es trivial. Como $p(z_0) = 0$, entonces

$$-a_n z_0^n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z_0^j,$$

o sea

$$z_0^n = -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{a_n} z_0^j.$$

Dividiendo por z_0^{n-1} miembro a miembro, se tiene

$$z_0 = -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{a_n}\, z_0^{j-n+1}. \tag{5}$$

Ahora vienen las estimaciones. Si $|z_0| \leq 1$, no hay nada que probar porque la cota que figura en (4) es mayor o igual que uno. Supongamos entonces $|z_0| > 1$. Luego, para todo $j = 0, \ldots, n-1$, $|z_0^{j-n+1}| = \left|\frac{1}{z_0^{n-1-j}}\right| \leq 1$. Tomando módulos miembro a miembro en (5), aplicando la desigualdad triangular y la estimación que hicimos recién, se tiene

$$|z_0| = \left|\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{a_n}\, z_0^{j-n+1}\right| \leq \sum_{j=0}^{n} \left|\frac{a_j}{a_n}\right| \left|z_0^{j-n+1}\right| \leq \sum_{j=0}^{n} \left|\frac{a_j}{a_n}\right|,$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Una cota más simple para el tamaño de todas las raíces (reales y complejas) de un polinomio es la siguiente:

Proposición 4.2. *Sea $p(z) := a_0 + \ldots + a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$ con $a_n \neq 0$. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ es una raíz de p, entonces*

$$|z_0| \leq 1 + \text{máx}\left\{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|, \ldots, \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right\}. \tag{6}$$

Esta cota también es bastante efectiva (en el sentido de que lo que estamos poniendo en el miembro derecho de (6) no lo podemos mejorar). Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 4.3. *Consideremos el polinomio $p_n(z) := x^n - M\left(x^{n-1} + \ldots + x + 1\right)$ con $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, es fácil ver que tiene una raíz real en el intervalo $(M, M+1)$. En efecto, se tiene $p_n(M) = M^n - M(M^{n-1} + \ldots + M + 1) = -(M^{n-1} + \ldots + M) < 0$. Por otro lado, como $p_n(x) = x^n - M\frac{x^n-1}{x-1}$ para $x \neq 0$, entonces*

$$p_n(M+1) = (M+1)^n - M\frac{(M+1)^n - 1}{M+1-1} = (M+1)^n - (M+1)^n + 1 = 1 > 0,$$

así que por el teorema de Bolzano, hay una raíz x_n en ese intervalo (si hubiera más de una, llamaremos x_n a la más grande). La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada y siempre contenida en el intervalo $(M, M+1)$. Por compacidad, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a un número real. ¿Cuál es este número real? Supongamos que $M > 1$ y que $\ell := \text{lím}_{k\to\infty} x_{n_k}$. Notar que se tiene $x_n > M > 1$, así que $\ell \geq M > 1$. Observemos que

$$x_{n_k}{}^{n_k} = M\frac{x_{n_k}{}^{n_k} - 1}{x_{n_k} - 1}.$$

Dividiendo todo por ${x_{n_k}}^{n_k}$ resulta

$$1 = M\frac{1 - \frac{1}{{x_{n_k}}^{n_k}}}{x_{n_k} - 1} \to \frac{M}{\ell - 1},$$

y de aquí se deduce que $\ell = M + 1$. La conclusión es que uno puede encontrar raíces de polinomios $p_n(x)$ tan cerca de $M + 1$ como quiera, tomando n suficientemente grande.

Demostración. Tomemos z_0 raíz de p, y expandamos $p(z_0) = 0$ de la manera siguiente

$$\begin{aligned} a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} \ldots + a_1 z_0 + a_0 &= 0, \\ z_0^n + \tfrac{a_{n-1}}{a_n} z_0^{n-1} + \ldots + \tfrac{a_1}{a_n} z_0 + \tfrac{a_0}{a_n} &= 0, \\ \left(\ldots\left((z_0 + \tfrac{a_{n-1}}{a_n})z_0 + \tfrac{a_{n-2}}{a_n}\right) z_0 + \ldots + \tfrac{a_1}{a_n}\right) z_0 + \tfrac{a_0}{a_n} &= 0, \end{aligned}$$

o sea

$$\left(\ldots\left((z_0 + \frac{a_{n-1}}{a_n})z_0 + \frac{a_{n-2}}{a_n}\right) z_0 + \ldots + \frac{a_1}{a_n}\right) z_0 = -\frac{a_0}{a_n},$$

y tomando módulo miembro a miembro resulta.

$$\left|\left(\ldots\left((z_0 + \frac{a_{n-1}}{a_n})z_0 + \frac{a_{n-2}}{a_n}\right) z_0 + \ldots + \frac{a_1}{a_n}\right)\right| |z_0| = \left|\frac{a_0}{a_n}\right|. \tag{7}$$

Supongamos $|z_0| > \left|\frac{a_0}{a_n}\right|$. Entonces, para que se cumpla la igualdad de arriba, debe tenerse que

$$\left|\left(\ldots\left((z_0 + \frac{a_{n-1}}{a_n})z_0 + \frac{a_{n-2}}{a_n}\right) z_0 + \ldots + \frac{a_1}{a_n}\right)\right| < 1.$$

Además (usando la desigualdad triangular) se tiene

$$\left|\left(\ldots\left((z_0 + \tfrac{a_{n-1}}{a_n})z_0 + \tfrac{a_{n-2}}{a_n}\right) z_0 + \ldots + \tfrac{a_2}{a_n}\right)\right| |z| - \left|\tfrac{a_1}{a_n}\right| \leq \left|\left(\ldots\left((z_0 + \tfrac{a_{n-1}}{a_n})z_0 + \tfrac{a_{n-2}}{a_n}\right) z_0 + \ldots + \tfrac{a_1}{a_n}\right)\right|,$$

o sea

$$\left|\left(\ldots\left((z_0 + \frac{a_{n-1}}{a_n})z_0 + \frac{a_{n-2}}{a_n}\right) z_0 + \ldots + \frac{a_2}{a_n}\right)\right| |z| \leq 1 + \left|\frac{a_1}{a_n}\right|.$$

Si $|z_0| \leq 1 + \left|\frac{a_1}{a_n}\right|$ no hay nada que probar. Supongamos que valga lo contrario, entonces se tendrá como antes

$$\left|\left(\ldots\left((z_0 + \frac{a_{n-1}}{a_n})z_0 + \frac{a_{n-2}}{a_n}\right) z_0 + \ldots + \frac{a_2}{a_n}\right| < 1,$$

e inductivamente se ve que uno puede repetir todo el razonamiento de arriba, y si $|z_0| > 1 + \left|\frac{a_j}{a_n}\right|$, $j = 0, \ldots, n-1$, entonces no se puede cumplir (7). $\square$

4.1. Cotas para raíces reales positivas

Si uno considera polinomios con coeficientes reales, hay otros métodos más exactos que hacen uso de teoremas de cambio de signo de coeficientes que son de utilidad para detectar mejores cotas para la cantidad de raíces reales. De todos modos, esto no significa que tales raíces existan.

Observemos nuevamente que es suficiente con conocer cotas superiores para las raíces *positivas* de $p(x)$, ya que haciendo $q(x) := p(-x)$ se tendrá que las raíces positivas de $q(x)$ serán las raíces negativas de $p(x)$.

Teorema 4.4. *Sea* $p(x) := a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$*. Supongamos que* $a_n > 0$ *y que hay al menos un coeficiente negativo. Sean* $i_0 := \max\{i,\, a_i < 0\}$ *y* $M := \max\{|a_i| : a_i < 0\}$*. Si* r *es un cero positivo de* $p(x)$*, entonces* $r \leq 1 + \sqrt[n-i_0]{\frac{M}{a_n}}$*.*

Está claro que para tener raíces positivas, al menos uno de los coeficientes tiene que ser negativo. Por otro lado, el ejemplo 4.3 muestra que la cota que se ofrece aquí es óptima.

Demostración. Sea $r > 1$, tenemos entonces

$$p(r) = a_n r^n + \ldots + a_{i_0+1} r^{i_0+1} + a_{i_0} x^{i_0} + \ldots + a_0 \geq a_n r^n - M(r^{i_0} + \ldots + r + 1)$$

$$= a_n r^n - M \frac{r^{i_0+1} - 1}{r - 1},$$

con lo cual si $a_n r^n - M \frac{r^{i_0+1}-1}{r-1} > 0$, entonces se tendrá $p(r) > 0$. Supongamos ahora que $r > 1 + \sqrt[n-i_0]{\frac{M}{a_n}}$. Entonces, se tiene que $a_n (r-1)^{n-i_0} > M$. Ahora, como $r > r - 1 > 0$, entonces

$$a_n r^{n-i_0-1}(r-1) > a_n (r-1)^{n-i_0-1}(r-1) > M,$$

luego

$$a_n r^{>} M \frac{r^{i_0+1}}{r-1} > M \frac{r^{i_0+1} - 1}{r-1},$$

y esto es lo que queríamos demostrar. □

Veamos otro resultado en esa dirección.

Teorema 4.5. *Sea* $p(x) := a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$*. Supongamos como antes que* $a_n > 0$ *y que hay al menos un coeficiente negativo. Sean*

$$s_i := \sum_{j>i,\, a_j>0} a_j, \quad y \quad R := \max\{|a_i|/s_i : a_i < 0\}.$$

Si $p(r) = 0$*, entonces* $r < 1 + R$*.*

Nuevamente en este caso, el ejemplo 4.3 muestra que la cota es óptima.

Demostración. Escribimos $p(x)=\sum_{a_j>0}a_jx^j+\sum_{a_j<0}a_jx^j$. Usaremos la identidad:

$$x^m=(x-1)(x^{m-1}+\ldots+x+1)+1$$

sobre las potencias de x^j con exponente positivo:

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & \sum_{a_j>0}a_j(1+(x-1)(x^{j-1}+\ldots+x+1)+\sum_{a_j<0}a_jx^j \\ & = & \sum_{a_j>0}\sum_{i=0}^{j-1}a_j(1+(x-1)x^i)+\sum_{a_j<0}a_jx^j \\ & = & \sum_{i=0}^{n}s_i(1+(x-1)x^i)+\sum_{a_j<0}a_jx^j. \end{array}$$

Supongamos ahora $r-1>\frac{|a_j|}{s_j}$ para todo j que verifique $a_j<0$. Entonces se tendrá

$$s_j(r-1)r^j>|a_j|r^j \iff s_j(r-1)r^j+a_jr^j>0,$$

con lo cual

$$p(r)=\sum_{a_j<0}\left(a_j+s_j(1+(r-1))\right)r^j+\sum_{a_i>0}s_i(1+(r-1)r^i)>0,$$

es decir, r no puede ser raíz de p. $\square$

Ejemplo 4.6. *Examinemos las cotas superiores para las raíces reales positivas de*

$$p(x):=x^{11}+x^8-3x^5+x^4+x^3-2x^2+x-2.$$

De acuerdo con la notación del teorema 4.4, se tiene $i_0=5$ *y* $M=3$. *La cota que obtenemos entonces es de* $1+\sqrt[8]{3}\approx 2,147202690$.

Veamos ahora cómo sale la cota del teorema 4.5. Allí se tendrá $s_0:=5$, $s_2:=4$, $s_5:=2$ *y*

$$R:=\max\left\{\frac{2}{5},\frac{2}{4},\frac{3}{5}\right\}=\frac{1}{2}.$$

En este caso, la cota para las raíces positivas es un poco mejor: $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Con la ayuda de `Maple`, *vemos que* $p(x)$ *tiene una única raíz real que es aproximadamente igual a* $1,112163122$.

4.2. Cotas generales

Supongamos que podemos conocer solamente cotas *superiores* para raíces *positivas* de polinomios. Veamos cómo ello nos permitirá estimar mejor las cotas inferiores de raíces tanto positivas como negativas.

En efecto, dado $p(x)\in\mathbb{R}[x]$ de grado n, consideremos

$$\begin{array}{rcl} p_1(x) & := & x^n\,p\left(\frac{1}{x}\right), \\ p_2(x) & := & p(-x), \\ p_3(x) & := & x^n\,p\left(-\frac{1}{x}\right). \end{array}$$

Sea N una cota superior para las raíces de $p(x)$, y para cada $i = 1, 2, 3$, N_i una cota superior para las raíces de $p_i(x)$.

Teorema 4.7. *Con las definiciones y notaciones anteriores, las raíces reales de $p(x)$ (si las hubiere) se encuentran en la unión de intervalos disjuntos*

$$\left(-N_2, -\frac{1}{N_3}\right) \cup \left(\frac{1}{N_1}, N\right).$$

Demostración. Supongamos que r es una raíz positiva de p, entonces sabemos que $r < N$. Por otro lado, $\frac{1}{r}$ es raíz de $p_1(x)$, así que entonces se tiene $\frac{1}{r} < N_1$, es decir $\frac{1}{N_1} < r$. El otro caso sale por simetría, recordando que las raíces negativas de $p(x)$ son las raíces positivas de $p(-x)$. $\square$

Ejemplo 4.8. *Sea $p(x) := x^7 - x^6 + x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + x + 2$. Calculamos los otros polinomios de la secuencia:*

$$\begin{array}{rcl} p_1(x) & = & 2x^7 + x^6 + 4x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 1, \\ p_2(x) & = & -x^7 - x^6 - x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 - x + 2, \\ p_3(x) & = & -2x^7 + x^6 - 4x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 1. \end{array}$$

Encontremos primero cotas superiores para raices positivas de p. Usando el teorema 4.4, tenemos $i_0 = 6$ y $M = 3$. La cota que obtenemos entonces es de $1 + \sqrt[1]{3} = 4$.

Veamos ahora cómo sale la cota del teorema 4.5. Allí se tendrá $s_0 = 9$, $s_3 = 4$, $s_6 = 1$ y $R := \max\left\{\frac{2}{9}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\} = 1$, así que la cota N es 2 en este caso.

Veamos ahora los otros polinomios.

- *Con p_1 se tienen $i_0 = 4$, $M = 3$. La primer cota es entonces $1 + \sqrt[3]{3/2} \approx 2,144714242$. Por otro lado, se tiene $R := \max\{\frac{3}{7}, \frac{1}{10}\} = \frac{3}{7}$. Luego, la mejor cota en este caso es $N_1 = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{3}$.*

- *Para usar los teoremas 4.4 y 4.5 tenemos que tener el coeficiente principal positivo, así que tomaremos $-p_2$ y $-p_3$ en lugar de los polinomios originales. Para $-p_2$ se tiene: $i_0 = 4$, $M = 4$, $R = \max\{\frac{2}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{3}\frac{2}{3}\} = \frac{4}{3}$. La cota del teorema 4.4 da $1 + \sqrt[3]{4} \approx 2,587401052$, la otra cota es $1 + \frac{4}{3} \approx 2,333333333$ así que $N_2 = \frac{7}{3}$.*

- *Resta hacer las estimaciones con $-p_3$: $i_0 = 6$, $M = 1$, $R = \max\{\frac{1}{11}, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$, las estimaciones son entonces $1 + \sqrt[1]{1} = 2$ y $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, luego $N_3 = \frac{3}{2}$.*

De acuerdo al teorema 4.7, las raíces reales de p (si las hay) se encuentran en la unión de intervalos $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{10}, 2\right)$. Con la ayuda de `Maple`, vemos que $p(x)$ tiene una única raíz real que es aproximadamente igual a $-1,415908917$.

Ejercicio 4.9. *Calcular cotas superiores e inferiores para los polinomios del ejercicio 4.6.*

5. Derivadas de un polinomio. Fórmula de Taylor

En esta sección introduciremos el importante concepto de derivada de un polinomio, y sus aplicaciones al estudio del crecimiento de funciones, desarollo de Taylor, y tamaño de las raíces reales de un polinomio. Más adelante también se verán aplicaciones de este concepto en los teoremas de Budan-Fourier y Sturm.

Definición 5.1. *Sea $p(x) := \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{R}[x]$. La derivada de p que denotaremos con $D[p(x)]$ o $p'(x)$ es, por definición,*

$$D[p(x)] = p'(x) := \sum_{j=0}^{n} j\, a_j x^{j-1} \in \mathbb{R}[x].$$

Definición 5.2. *Inductivamente se definen la derivada segunda de p que denotaremos como p'' de la manera siguiente: $p'' := D[p']$, y en general*

$$p^{(j)} := D\left[p^{(j-1)}\right] \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Por definición hacemos $p^{(0)} := p$, $p' := p^{(1)}$, $p'' := p^{(2)}$, $p''' := p^{(3)}$.

Ejercicio 5.3. *Mostrar que $p^{(j)} = 0$ si $j > \deg(p)$.*

La recíproca del ejercicio 5.3 también es cierta, y nos será de utilidad más adelante para demostrar la fórmula de Taylor.

Lema 5.4. *Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado menor o igual que n, y supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p^{(j)}(x_0) = 0, j = 0, \ldots, n$. Entonces se tiene que $p(x) = 0\, \forall x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos que $p(x) = a_0 + \ldots + a_k x^k$ con $k \leq n$ y $a_k \neq 0$ (es decir, supongamos que $p(x)$ no es el polinomio nulo). Inductivamente, se puede mostrar que

$$p^{(j)}(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \ell(\ell-1)\ldots(\ell-j+1) a_\ell x^{\ell-j} \quad j = 0, 1, \ldots, k,$$

o sea

$$p^{(j)}(x) = \sum_{\ell=0}^{k} j! \binom{\ell}{j} a_\ell x^{\ell-j} \quad j = 0, 1, \ldots, k$$

Al plantear $p^{(k)}(x_0) = 0$, $p^{(k-1)}(x_0) = 0, \ldots, p'(x_0) = 0$, $p(x_0) = 0$, nos queda la siguiente igualdad matricial

$$\begin{bmatrix} k!a_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (k-1)!\binom{k-1}{k-1}a_{k-1} & (k-1)!\binom{k}{k-1}a_k & 0 & \dots & 0 \\ (k-2)!\binom{k-2}{k-2}a_{k-2} & (k-2)!\binom{k-1}{k-2}a_{k-1} & (k-1)!\binom{k}{k-2}a_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \\ \vdots \\ x_0^{k-1} \\ x_0^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

□

El determinante de la matriz cuadrada es una cierta constante no nula por a_k, que asumimos que era distinto de cero, así que el sistema homogéneo asociado debería tener solución única (la solución trivial). Por otro lado, el enunciado nos dice que el vector $(1, x_0, \dots, x_0^k)$ también es solución (no trivial) del sistema, así que hemos llegado a una contradicción. El absurdo proviene de suponer que existe $a_k \neq 0$, así que se debe de tener $a_j = 0 \, \forall j = 0, \dots, n$.

Ejercicio 5.5. *Demostrar que para todo $j = 0, \dots, k$, si $p(x) = \sum_{\ell=0}^{k} a_k x^k$,*

$$p^{(j)}(x) = \sum_{\ell=0}^{k} \ell(\ell-1)\dots(\ell-j+1)a_\ell x^{\ell-j} \quad j = 0, 1, \dots, k$$

Veamos ahora algunas propiedas de la derivada que nos serán útiles más adelante.

Proposición 5.6. *Si $p_1(x)$, $p_2(x) \in \mathbb{R}[x]$, entonces*

$$\begin{aligned} D[p_1 + p_2] &= D[p_1] + D[p_2], \\ D[p_1\, p_2] &= D[p_1]\, p_2 + p_1\, D[p_2]. \end{aligned}$$

Demostración. Supongamos $n := \text{máx}\{\deg(p_1), \deg(p_2)\}$. Entonces escribimos

$$p_1(x) := \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \quad p_2(x) := \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$$

haciendo $a_j := 0$ o $b_j := 0$ para valores grandes de j si fuera necesario. Luego,

$$\begin{aligned} D[p_1\, p_2] &= D\left[\sum_{j=0}^{n}(a_j + b_j)x^j\right] = \sum_{j=0}^{n} j(a_j + b_j)x^{j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n} j a_j x^{j-1} + \sum_{j=0}^{n} j b_j x^{j-1} = D[p_1] + D[p_2], \end{aligned}$$

así que la primer parte del enunciado sale elementalmente.

Para ver la segunda propiedad, Calculemos primero

$$\begin{aligned} D[a_i x^i b_j x^j] &= D[a_i b_j x^{i+j}] = (i+j) a_i b_j x^{i+j-1} \\ &= i a_i x^{i-1} b_j x^j + a_i x^i j a_j x^{j-1} = D[a_i x^i] b_j x^j + a_i x^i D[b_j x^j], \end{aligned}$$

así que el enunciado vale para el producto de dos términos cualquier de p_1 y p_2. En el caso general, usando la validez de la primer propiedad y lo que acabamos de demostrar recién, se tendrá

$$\begin{aligned} D\left[p_1 p_2\right] &= D\left[\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^n b_j x^j\right)\right] = D\left[\sum_{i,j} a_i x^i b_j x^j\right] \\ &= \sum_{i,j} D\left[a_i x^i b_j x^j\right] = \sum_{i,j} D[a_i x^i] b_j x^j + \sum_{i,j} a_i x^i D[b_j x^j] \\ &= \left(\sum_i D[a_i x^i]\right)\left(\sum_j b_j x^j\right) + \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right)\left(\sum_j D[b_j x^j]\right) \\ &= D\left[\sum_i a_i x^i\right]\left(\sum_j b_j x^j\right) + \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right) D\left[\sum_j b_j x^j\right] \\ &= D[p_1] p_2 + p_1 D[p_2]. \end{aligned}$$

□

Esta propiedad clave nos permitirá dar algunos criterios para relacionar raíces de p con multiplicidades.

Lema 5.7. *Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y $j \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$D\left[(x-x_0)^j\right] = j(x-x_0)^{j-1}.$$

Demostración. Por inducción en j. Para $j=1$ se tiene

$$D[x-x_0] = 1 = 1\,(x-x_0)^{1-1},$$

así que el enunciado vale. Para el caso general, usamos la hipótesis inductiva y la propiedad sobre la derivada de un producto:

$$\begin{aligned} D\left[(x-x_0)^j\right] &= D\left[(x-x_0)(x-x_0)^{j-1}\right] \\ &= 1\,(x-x_0)^{j-1} + (x-x_0)\,(j-1)(x-x_0)^{j-2} \\ &= j(x-x_0)^{j-1} \end{aligned}$$

que es lo que queríamos mostrar. □

Esencialmente el lema 5.7 dice que la derivada "baja" en uno la multiplicidad de una raíz, cuando el polinomio es de la forma $(x-x_0)^n$. Veamos que esto pasa en general.

Proposición 5.8. *Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado n, y $x_0 \in \mathbb{R}$ una raíz de p. Si x_0 tiene multiplicidad j, entonces x_0 es raíz de p' con multiplicidad $j-1$.*

Demostración. Si x_0 tiene multiplicidad j, entonces $p(x) = (x - x_0)^j q(x)$, con $q(x_0) \neq 0$. Calculemos ahora $p'(x)$ usando la fórmula del producto y el valor de la derivada en potencias de $(x - x_0)$:

$$\begin{aligned} p'(x) &= j(x - x_0)^{j-1} q(x) + (x - x_0)^j q'(x) \\ &= (x - x_0)^{j-1} \left(j q(x) + (x - x_0) q'(x) \right), \end{aligned}$$

o sea $p'(x) = (x - x_0)^{j-1} \psi(x)$ con $\psi(x_0) = j q(x_0) \neq 0$, así que x_0 es raíz de p' con multiplicidad $j - 1$. □

Este teorema nos da un criterio simple para calcular la multiplicidad de un polinomio.

Corolario 5.9. *Si $x_0 \in \mathbb{R}$ es raíz de p con multiplicidad j, entonces $p(x_0) = p'(x_0) = \ldots = p^{(j-1)}(x_0)$ y $p^{(j)}(x_0) \neq 0$.*

Demostración. Hacemos inducción en j. Para $j = 1$ se tiene

$$p(x) = (x - x_0) q(x),$$

con $q(x_0) \neq 0$. Ahora, por la regla del producto,

$$p'(x) = q(x) + (x - x_0) q'(x),$$

luego $p'(x_0) = q(x_0) \neq 0$.

Veamos ahora el caso general, si x_0 es raíz de p con multiplicidad j, entonces por el lema anterior resulta que x_0 es raíz de p' con multiplicidad $j - 1$, así que por hipótesis inductiva se tendrá

$$D[p'](x_0) = 0, \ldots, D^{(j-2)}[p'](x_0) = 0, \quad D^{(j-1)}[p'](x_0) \neq 0,$$

por lo tanto

$$p(x_0) = 0,\, p'(x_0) = 0,\, p''(x_0) = 0, \ldots p^{(j-1)}(x_0) = 0,\, p^{(j)}(x_0) \neq 0$$

que es lo que queríamos mostrar. □

La recíproca del corolario 5.9, saldrá más adelante, como corolario inmediato del teorema de Taylor.

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema sobre el desarrollo de Taylor de un polinomio alrededor de un punto cualquiera.

Teorema 5.10. *Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado menor o igual que n, y $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$p(x) = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea

$$q(x) := p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Es fácil ver que q es también un polinomio de grado menor o igual que n, y además $q(x_0) = p(x_0)$, $q'(x_0) = p'(x_0)$, $\ldots$, $q^{(n)}(x_0) = p^{(n)}(x_0)$. Haciendo $h(x) := p(x) - q(x)$ se tendrá que h es un polinomio de grado menor o igual que n, y además $h^{(j)}(x_0) = 0$ para $j = 0, \ldots, n$. Por el lema 5.4, se tiene que h es el polinomio idénticamente nulo, con lo cual resulta $p(x) = h(x)$, que es lo que queríamos mostrar. $\square$

Ahora sí estamos en condiciones de enunciar la recíproca del corolario 5.9.

Corolario 5.11. *Si $p(x_0) = p'(x_0) = \ldots = p^{(j)}(x_0)$ y $p^{(j+1)}(x_0) \neq 0$, entonces x_0 es raíz de p con multiplicidad j.*

Demostración. Haciendo el desarrollo de Taylor alrededor de x_0, se tendrá

$$p(x) = (x - x_0)^j \left(\frac{p^{(j)}(x_0)}{j!} + (x - x_0)A(x) \right)$$

con $A(x) \in \mathbb{R}[x]$. Como por hipótesis $p^{(j)}(x_0) \neq 0$, entonces de acuerdo a la definición 2.12, la multiplicidad de x_0 como raíz de p es j. $\square$

Antes de continuar con un estudio más profundo de la relación entre las derivadas de un polinomio y su crecimiento, veamos un criterio bien sencillo sobre cuándo un número real es cota superior de todas las raíces (no solo las positivas) de p, atribuído a Newton.

Teorema 5.12. *Sea $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ con $a_n > 0$. Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x_0) > 0$, $p'(x_0) > 0$, $\ldots, p^{(n-1)}(x_0) > 0$. Entonces todas las raíces reales de p (si las hay) son estrictamente menores que x_0.*

Demostración. Para la demostración usaremos la fórmula de Taylor dada en el teorema 5.10. Se tiene

$$p(x) = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

A la luz de esta fórmula y de las hipótesis del teorema, está claro que, si tomamos $r > x_0$, entonces $(r - x_0)^j > 0 \, \forall j \geq 0$, y como además $p^{(j)}(x_0) > 0 \ \forall j = 0, \ldots, n$ $(p^n(x_0) = n! a_n > 0)$, resulta

$$p(r) = \sum_{j=0}^{n} \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}(r - x_0)^j > 0,$$

o sea que r no puede ser una raíz de p. $\square$

Ejemplo 5.13. *Consideremos* $p(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$. *Tenemos entonces*

$$\begin{array}{lcl} p'(x) & = & 5x^4 + 8x^3 - 15x^2 + 16x - 7, \\ p''(x) & = & 20x^3 + 24x^2 - 30x + 16, \\ p'''(x) & = & 60x^2 + 48x - 30, \\ p^{(4)}(x) & = & 120x + 48, \\ p^{(5)}(x) & = & 120. \end{array}$$

Y además

$$p(2) = 39,\ p'(2) = 109,\ p''(2) = 212,\ p'''(2) = 306,\ p^{(4)}(2) = 288.$$

Así que 2 *es una cota superior para todas las raíces de* p.

Para conseguir cotas inferiores, consideramos $p_2(x) = p(-x) = -x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x - 3$. *Si queremos volver a aplicar el teorema de Newton para este caso, el coeficiente principal tiene que ser positivo, asi que lo que hacemos es reemplazar* p_2 *por* $-p_2$. *Esto, claro está, no afecta a las raíces de este polinomio:*

$$\begin{array}{lcl} -p_2(x) & = & x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 7x + 3, \\ -p_2'(x) & = & 5x^4 - 8x^3 - 15x^2 - 16x - 7, \\ -p_2''(x) & = & 20x^3 - 24x^2 - 30x - 16, \\ -p_2'''(x) & = & 60x^2 - 48x - 30, \\ -p_2^{(4)}(x) & = & 120x - 48, \\ -p_2^{(5)}(x) & = & 120. \end{array}$$

Para $x = 4$ *se tiene*

$$-p_2(4) = 39,\ -p_2'(2) = 457,\ -p_2''(2) = 760,\ -p_2'''(2) = 738,\ -p_2^{(4)}(2) = 432,$$

o sea que 4 *es una cota superior para las raíces de* p_2 *o equivalente* -4 *es una cota inferior para las raíces de* p. *Por último, calculando los polinomios*

$$\begin{array}{lcl} p_1 & = & 3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 2x - 1, \\ p_3 & = & 3x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 5x^2 - 2x + 1, \end{array}$$

y aplicando el método de Newton para las cotas superiores de las raíces positivas de estos polinomios, hallamos 1 *y* 4 *como cotas, respectivamente. Por el teorema 4.7, las raíces reales de* $p(x)$ *se encuentran en* $\left(-4, -\frac{1}{4}\right) \cup (1, 4)$.

Con la ayuda de `Maple`*, podemos ver que este polinomio tiene tres raíces reales que son aproximadamente:*

$$1,306817217, \quad -0,3023381600 \quad -3,907800491.$$

5.1. Derivadas Sucesivas y Crecimiento

Hasta ahora todos los resultados sobre polinomios y derivadas que hemos dado son válidos en cualquier cuerpo de característica cero (excepto el teorema 5.12 que vale en cualquier cuerpo ordenado sin ninguna condición de arquimedianeidad o continuidad). Los enunciados que veremos ahora usarán un poco más la propiedad de los números reales de ser un cuerpo ordenado, y la relación de las derivadas de un polinomio con su crecimiento.

Teorema 5.14. *Sean $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p'(x_0) \neq 0$. Entonces, si $p'(x_0) > 0$ (resp. $p'(x_0) < 0$) existe un entorno de x_0 tal que si x_1 está en ese entorno y $x_1 < x_0$ entonces $p(x_1) < p(x_0)$ (resp. $p(x_1) > p(x_0)$), y si $x_0 < x_1$ entonces $p(x_0) < p(x_1)$ (resp. $p(x_0) > p(x_1)$).*

Demostración. Hacemos el desarrollo de Taylor (teorema 5.10) alrededor de x_0, y resulta

$$p(x) = p(x_0) + (x - x_0)\left(p'(x_0) + A(x)(x - x_0)\right) \tag{8}$$

con $A(x) \in \mathbb{R}[x]$. Sea $h(x) := p'(x_0) + A(x)(x - x_0) \in \mathbb{R}[x]$. Se tiene que $h(x_0) = p'(x_0) \neq 0$. Supongamos que $p'(x_0) > 0$ sin perder generalidad (el otro caso sale multiplicando p por -1). Por el teorema 2.13, existe un $\delta > 0$ tal que $h(x) > 0$ en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ahora, de (8) se deduce que

$$\frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0} = h(x) \qquad x \neq x_0.$$

Luego, si $|x - x_0| < \delta$, $x < x_0$, el denominador de la expresión a la izquierda será negativo, $h(x)$ será positivo, por lo tanto $p(x) - p(x_0)$ tiene que ser negativo, es decir $p(x) < p(x_0)$. Si $x > x_0$, entonces el denominador es positivo y por lo tanto se tendrá $p(x) > p(x_0)$. □

El siguiente resultado es la generalización del teorema 5.14.

Teorema 5.15. *Sean $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $0 = p'(x_0) = p''(x_0) = \ldots = p^{(j-1)}(x_0)$, $p^{(j)}(x_0) > 0$. Entonces existe un entorno de x_0 tal que si x_1 está en ese entorno y $x_1 < x_0$ entonces $p(x_1) < p(x_0)$ si j es impar (resp. $p(x_1) > p(x_0)$ si j es par), y si $x_0 < x_1$ entonces $p(x_0) < p(x_1)$.*

Demostración. Hacemos el desarrollo de Taylor (teorema 5.10) alrededor de x_0, y resulta

$$p(x) = p(x_0) + (x - x_0)^j \left(\frac{p^{(j)}(x_0)}{j!} + A(x)(x - x_0)\right).$$

El resto de la demostración sale de seguir las líneas de la demostración del teorema 5.14. □

Corolario 5.16. *Si $p'(x) > 0$ para todo $x \in [x_0, x_1]$ entonces $p(x_0) < p(x_1)$.*

Demostración. Por el teorema 5.14, para todo $x \in [x_0, x_1]$ existe un $\delta_x > 0$ tal que si $x' > x$ y $x' \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$ entonces $p(x') > p(x)$. Entonces el intervalo $[x_0, x_1] \subset \bigcup_{x \in [x_0, x_1]} (x - \delta_x, x + \delta_x)$, y como es un intervalo cerrado (compacto), de este cubrimiento se puede extraer un cubrimiento finito $[x_0, x_1] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (t_i - \delta_i, t_i + \delta_i)$, con $x_0 < t_1 < \ldots < t_n < x_1$ y $\delta_i := \delta_{t_i}$. Luego, se tendrá

$$p(x_0) < p(t_1) < \ldots < p(t_n) < p(x_1)$$

que es lo que queríamos mostrar. □

Corolario 5.17. *Si $p'(x) > 0$ en $[x_0, x_1]$, entonces cualesquiera sean $a, b \in [x_0, x_1]$ con $a < b$, se tendrá $p(a) < p(b)$ (el polinomio "crece").*

6. El Teorema de Budan-Fourier

El teorema de Budan-Fourier es una generalización de la regla de los signos de Descartes. Estudia la cantidad de raíces reales de un polinomio en un intervalo (a, b) considerando en lugar de los signos de los coeficientes del polinomio, los signos de las derivadas. Fue demostrado independientemente por Budan en 1822 en [2], y por Fourier en 1831 en [9].

Definición 6.1. *Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ de grado n, y $x_0 \in \mathbb{R}$. Definimos*

$$S(x_0) = S(p, x_0) := V\left(p(x_0), p'(x_0), p''(x_0), \ldots, p^{(n)}(x_0)\right);$$

es decir, $S(x_0)$ es la variación de signos del valor de p y sus derivadas sucesivas evaluadas en x_0.

Teorema 6.2 (Teorema de Budan-Fourier). *Sean $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $x_0 < x_1$ tales que ninguno de ellos es raíz de $p(x)$. Entonces la cantidad de raíces reales de $p(x)$ contadas con multiplicidad es menor o igual a $S(x_0) - S(x_1)$, y es congruente a este número módulo dos.*

Antes de comenzar con la demostración de este teorema, veamos que la regla de los signos de Descartes es una consecuencia inmediate del mismo. En efecto, tomando como intervalo al $(0, M)$ con M suficientemente grande, se tiene que

- si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, entonces haciendo un desarrollo de Taylor alrededor de $x_0 = 0$ e igualando coeficientes, resulta $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$. O sea,

$$S(0) = V\left(p(0), p'(0), \ldots, p^{(n)}(0)\right) = V(a_0, \ldots, a_n).$$

- Por otro lado, el coeficiente principal de $p^{(j)}(x)$ es $j!\binom{n}{j}a_n$, que tiene siempre el mismo signo que a_n. Como sabemos por el corolario 2.15 que para valores grandes de M, el signo de $p^{(j)}(M)$ será el mismo que el signo de su coeficiente principal, entonces se tiene

$$S(M) = V(a_n, a_n, 2a_n, \ldots, n!a_n) = 0.$$

Luego, la cantidad de raíces reales positivas de $p(x)$ será menor o igual que $S(0) - S(M)$ (e igual a esta cantidad módulo dos) para M suficientemente grande, y queda

$$S(0) - S(M) = V(a_0, \ldots, a_n) - 0,$$

tal como lo establece la regla de los signos de Descartes.

Demostración. Consideremos la función $S(x) : (x_0, x_1) \to \mathbb{R}$, y veamos cómo va variando a medida que crece x. Mientras x no pase por ninguna raíz de los polinomios $p(x)$, $p'(x)$, $\ldots$, $p^{(n)}(x)$, $S(x)$ no puede cambiar.

O sea que tenemos que examinar dos casos: el paso de x por una raíz del polinomio $p(x)$ y el paso de x por una raíz de una de las derivadas $p^{(i)}(x)$, con $1 \leq i \leq n-1$.

1. Supongamos que $\alpha \in (x_0, x_1)$ es una raíz de p con multiplicidad $\ell < n$. Entonces se tiene

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = \ldots = p^{(\ell-1)}(\alpha) = 0,\ p^{(\ell)}(\alpha) \neq 0.$$

Sea $\epsilon > 0$ tal que el intervalo $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ está contenido en (x_0, x_1) y además no hay raíces de ningún $p^{(i)}(x)$, $i = 0, \ldots, n$ en este intervalo excepto α. Esto último se puede pedir ya que la cantidad de ceros cada polinomio es finita. Sean ahora $\epsilon_1, \epsilon_2 < \epsilon$. Miremos qué pasa con los signos de $p(\alpha - \epsilon_1)$, $p'(\alpha - \epsilon_1)$, $p(\alpha + \epsilon_2)$, $p(\alpha + \epsilon_2)$.

- Si $p(\alpha - \epsilon_1) > 0$, entonces se tendrá que $p'(\alpha - \epsilon_1) < 0$ ya que o sino p crecería en un entorno de $\alpha - \epsilon_1$, y seguiría creciendo "a la derecha" de $\alpha - \epsilon_1$ (por el corolario 5.16 ya que p' será siempre positiva allí), por lo tanto, no se podrá tener $p(\alpha) = 0$.

  Por otro lado, si $p'(\alpha + \epsilon_2) > 0$, quiere decir que p crece a la derecha de α, así que tanto los signos de $p(\alpha + \epsilon_2)$ como $p'(\alpha + \epsilon_2)$ serán positivos. Si $p'(\alpha + \epsilon_2) < 0$, entonces p decrece a la derecha de α, y se tendrá que tanto los signos de $p(\alpha + \epsilon_2)$ como $p'(\alpha + \epsilon_2)$ serán negativos. En ambos casos, los signos de p y p' comienzan siendo distintos a la izquierda de α y terminan siendo igual a la derecha de α.
- Si $p(\alpha - \epsilon_1) < 0$, entonces con la misma discusión de antes se tendrá que $p'(\alpha - \epsilon_1) > 0$, y la discusión del item anterior se puede volver a repetir aquí, y al final se tiene el mismo resultado:los signos de p y p' son distintos a la izquierda de α y terminan siendo iguales a la derecha de α.

Toda la discusión anterior aplicada a los pares $p^{(i)}, p^{(i+1)}$, $i = 0, \ldots, \ell - 1$ dice lo siguiente:

- los signos de $p(\alpha - \epsilon_1), p'(\alpha - \epsilon_1), \ldots, p^{(\ell)}(\alpha - \epsilon_1)$ se van alternando,
- los signos de $p(\alpha + \epsilon_1), p'(\alpha + \epsilon_1), \ldots, p^{(\ell)}(\alpha + \epsilon_1)$ son todos iguales.

Conclusión: al "pasar" x por una raiz de multiplicidad ℓ, $S(x)$ "pierde" ℓ cambios de signos.

2. Supongamos ahora que existen k, ℓ con $1 \leq k < \ell < n$ tal que

$$p^{(k)}(\alpha) = \ldots p^{(\ell)} = 0,\ p^{(k-1)}(\alpha) \neq 0 \neq p^{(\ell+1)}(\alpha).$$

El mismo razonamiento del item anterior dice que en un entorno de α,

- los signos de $p^{(k)}$, $p^{(k+1)}, \ldots, p^{(\ell+1)}$ son alternados a la izquierda de α,
- los signos de $p^{(k)}$, $p^{(k+1)}, \ldots, p^{(\ell+1)}$ son iguales a la derecha de α.

Notar que además como $p^{(\ell+1)}(\alpha) \neq 0$, entonces el signo de $p^{(\ell+1)}$ se mantiene constante tanto a la derecha como a la izquierda de α, y entonces al "pasar" x por un α en esta situación, se tiene que $S(x)$ "pierde" una cierta cantidad de variación de signos. Estimemos la cantidad de signos que se pierden.

Si $p^{(k-1)} > 0$ en un entorno de α, entonces por el ejercicio 3.9, la cantidad de signos que se pierde es par. Si $p^{(k-1)} < 0$ en un entorno de α, entonces a la derecha de α habrá una sola variación de signos, y a la izquierda una cantidad impar. O sea que de vuelta se pierde una cantidad par de signos.

$\square$

Ejemplo 6.3. *Sea $p(x) = x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 1$. Calculemos la sucesión de derivadas parciales:*

$$\begin{array}{lcl} p'(x) & = & 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 1, \\ p''(x) & = & 20x^3 - 12x^2 - 6x + 8, \\ p'''(x) & = & 60x^2 - 24x - 6, \\ p^{(4)}(x) & = & 120x - 24, \\ p^{(5)}(x) & = & 120. \end{array}$$

Al evaluar la sucesión $\left(p(x), p'(x), p''(x), p'''(x), p^{(4)}(x), p^{(5)}(x)\right)$ en los puntos $-2, -1, 0, 1$ se obtiene

$$\begin{array}{l} (-23, 83, -188, 282, -264, 120) \\ (3, -3, -18, 78, -144, 120), \\ (-1, -1, 8, -6, -24, 120), \\ (1, 5, 10, 30, 96, 120) \end{array}$$

respectivamente. Notar que de acuerdo con el criterio de Newton (teorema 5.12), todas las raíces reales de p son menores que uno.

Como $S(-2) = 5$, $S(-1) = 4$, $S(0) = 3$, $S(1) = 0$, entonces podemos concluir que

- *Hay exactamente un cero real en los intervalos $(-2, -1)$ y $(-1, 0)$.*
- *Hay o bien un cero o tres ceros reales en $(0, 1)$.*

Con la ayuda de `Maple` encontramos que las raíces reales de p son

$$0,7503044317 \qquad -0,3839151881 \qquad -1,511217573.$$

Ejercicio 6.4. *Verificar el teorema de Budan-Fourier para las siguientes polinomios de grado dos, calculando las raíces del polinomio.*

- $x^2 - x$, $x_0 = -1$, $x_1 = 2$.
- $x^2 - x + 1$, $x_0 = -1$, $x_1 = 2$.

Ejercicio 6.5. *Localizar intervalos que contengan ceros reales de los siguientes polinomios. Intentar obtener tanta información como sea posible de estos ceros.*

- $x^5 - 3x^4 - x^2 - 4x + 14$.
- $24x^5 + 134x^4 - 136x^3 + 281x^2 + 36x - 140$.
- $2x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x + 2$.
- $16x^6 + 3x^4 - 3x^3 - 142x^2 - 9x - 21$.

7. El Teorema de Sturm

El método propuesto por Budan y Fourier tiene cierta practicidad para los cálculos, pero la desventaja de que se comporta casi igual en polinomios de la forma $p(x)$ y $p(x) + c$, para $c \in \mathbb{R}$, siendo que el comportamiento de las raíces de estos polinomios puede diferir demasiado. Un método más refinado y preciso (aquí ya no se dan cotas sino cantidades exactas) fue propuesto por Sturm en 1829 (cf. [11]). Sturm reemplaza las derivadas sucesivas por los restos en la división entre p y p' con alguna pequeña modificación. Comenzaremos repasando el algoritmo de división de polinomios, para después definir la sucesión de Sturm y por último demostrar el teorema que dice cuál es el número EXACTO de raíces reales en un intervalo.

7.1. El algoritmo de división para polinomios

Teorema 7.1. *Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Entonces existen únicos $c(x)$ y $r(x)$ que cumplen simultáneamente $p(x) = c(x)q(x) + r(x)$ con $r(x) = 0$ o $\deg(r) < \deg(q)$.*

Definición 7.2. *El polinomio $r(x)$ del teorema 7.1 se denomina el resto en la división entre $p(x)$ y $q(x)$.*

Demostración. Si existe $h(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $h(x)q(x) = p(x)$, entonces tomando $c(x) := h(x)$ y $r(x) := 0$ demostramos la existencia. Supongamos entonces que esto no sucede. Entonces consideremos el conjunto

$$\{\deg\left(p(x) - c(x)q(x)\right),\, c(x) \in \mathbb{R}[x]\} \subset \mathbb{N}_0.$$

Este conjunto es distinto de vacío y por lo tanto tiene un mínimo. Sea $c_0(x)$ tal que el grado de $r_0(x) := p(x) - c_0(x)q(x)$ es mínimo. Afirmamos que $\deg(r_0) < \deg(p)$. En efecto, si no fuera así escribamos

$$\begin{aligned} q(x) &= a_n\, x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \\ r_0(x) &= b_{n+k}\, x^{n+k} + \ldots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

con $a_n \neq 0 \neq b_{n+k}$. Haciendo $r_1(x) := r_0(x) - \frac{b_{n+k}}{a_n} q(x)$ se tiene

- $r_1(x)$ es de la forma $p(x) - A(x)q(x)$,
- $\deg(r_1(x)) < n + k = \deg(r_0(x))$.

Esto es una contradicción ya que habíamos supuesto que el grado de r_0 era mínimo, así que la existencia está garantizada. Veamos la unicidad. Si $r_0 = p - c_0 q$ y $r_1 = p - c_1 q$ con r_0, r_1 de grado menor que q, entonces restando miembro a miembro se tiene

$$r_0 - r_1 = q(c_1 - c_0).$$

A la izquierda de esta igualdad tenemos un polinomio de grado menor que el grado de q, a la derecha tenemos o bien cero o algo de grado mayor o igual que q, luego se debe cumplir que $c_1 = c_0$ y $r_0 = r_1$, la unicidad está demostrada. □

Ejercicio 7.3. *Sean $p, q \in \mathbb{R}[x]$. Probar que*

$$\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q).$$

7.2. El algoritmo de Sturm

Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, a partir de $p(x)$ armaremos una sucesión finita

$$(p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots)$$

de polinomios cuya variación de signos nos dará información sobre las raíces de $p(x)$. Esta sucesión se denominará la sucesión de Sturm, y para calcularla haremos uso del algoritmo de división de polinomios.

Definición 7.4 (Sucesión de Sturm).

- $p_0(x) := p(x)$.
- $p_1(x) := p'(x)$.
- *Hacemos $p_0(x) = c_1(x)\, p_1(x) + r_1(x)$, el algoritmo de división entre $p_0(x)$ y $p_1(x)$. Definimos $p_2(x) := -r_1(x)$ (el resto con el signo cambiado.*
- *Más en general, dados $p_i(x)$ y $p_{i+1}(x)$, si $p_{i+1} \in \mathbb{R}$, parar. Si no, hacemos*

  $$p_i(x) = c_{i+1}(x)\, p_{i+1}(x) + r_{i+1}(x),$$

  el algoritmo de división entre $p_i(x)$ y $p_{i+1}(x)$. Definimos $p_{i+2} := -r_{i+1}(x)$.

Está claro que se tiene $\deg(p_0) > \deg(p_1) > \deg(p_2) > \dots$, o sea que la sucesión se termina siempre.

Ejemplo 7.5. *Tomemos* $p_0(x) = p(x) = x^3 - x + 1$, *entonces se tendrá* $p_1(x) = p'(x) = 3x^2 - 1$, *y después se tendrá*

$$p_2(x) = \frac{2}{3}x - 1, \quad p_3(x) = -\frac{23}{4}.$$

Ejemplo 7.6. *Consideremos ahora* $p_0(x) = p(x) = x^3 - 3x + 2$. *Se tendrá* $p_1(x) = p'(x) = 3x^2 - 3$, *y -haciendo cuentas-*

$$p_2(x) = 2x - 2, \quad p_3(x) = 0.$$

La sucesión de Sturm comienza de la misma manera que la sucesión cuyos signos se estudia en el teorema de Budan-Fourier, con $p(x)$ y $p'(x)$. Pero después en lugar de continuar con las derivadas sucesivas, se reemplazan estas con los restos sucesivos en la división entre p y p', cambiando el signo cada vez.

Estos restos están relacionados con el *algoritmo de Euclides* para el cálculo del máximo común divisor entre p y p'.

7.3. El teorema de Sturm y el número de raíces reales en un intervalo

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema de Sturm sobre cómo usar la variación de signos de la sucesión de Sturm para calcular el número de raíces reales en un intervalo.

Teorema 7.7. *Sea* $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ *y* $x_0 < x_1$. *Supongamos que* $p(x_0) \neq 0 \neq p(x_1)$. *Entonces, el número de raíces reales de* p *en* (x_0, x_1) *contadas* sin multiplicidad *es igual a*

$$V(p_0(x_0), p_1(x_0), p_2(x_0), \ldots,) - V\left(p_0(x_1), p_1(x_1), p_2(x_1), \ldots\right).$$

Antes de comenzar con la demostración del teorema de Sturm, veamos la aplicación de este algoritmo con polinomios de grado dos.

Ejemplo 7.8. *Consideremos el polinomio genérico de grado dos*

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a > 0$. *Entonces se tiene* $p'(x) = 2ax+b$, *y al hacer el algoritmo de la división se obtienen como cociente* $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\frac{b}{a}$ *y resto* $c - \frac{1}{4}\frac{b^2}{a}$. *O sea que la sucesión de Sturm es la siguiente*

$$\left(p(x), p'(x), \frac{1}{4}\frac{b^2}{a} - c\right).$$

Notar que el signo de $\frac{1}{4}\frac{b^2}{a} - c$ es el mismo que el signo del discriminante $b^2 - 4ac$. También sabemos que para M positivo grande, el signo de $p_0(-M)$ y de $p_0(M)$ es positivo (porque $a > 0$), el signo de $p_1(-M)$ es negativo y el de $p_1(M)$ positivo.

Luego, $V(p_0(-M), p_1(-M), p_2(-M))$ es uno o dos, de acuerdo con si el discriminante es negativo o no; $V(p_0(M), p_1(M), p_2(M))$ es uno o cero de acuerdo con si el discriminante es negativo o no.

O sea que recuperamos el criterio del discriminante:

$p(x)$ tiene sus dos raíces reales si y solo si $b^2 - 4ac > 0$.

El mismo razonamiento vale si $a < 0$.

Demostración del Teorema 7.7. Como en la demostración del teorema de Descartes, estudiaremos como varía la función $V(p_0(x), p_1(x) \ldots,)$ a medida que x avanza en el intervalo (x_0, x_1).

Primero hagamos un pre-proceso. Afirmamos que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p(x)$ tiene todas sus raíces simples. En efecto, si esto no ocurriera, entonces $p(x)$ y $p'(x)$ tendrían un factor en común $f(x)$. Este factor sería también múltiplo de $p_2(x)$ ya que

$$p_2(x) = c(x)p'(x) - p(x), \quad \text{con}\, c(x) \in \mathbb{R}[x],$$

y como

$$p_3(x) = c^*(x)p_2(x) - p'(x), \quad \text{con}\, c^*(x) \in \mathbb{R}[x],$$

inductivamente se tiene que $f(x)$ es un factor de $p_i(x)$ para todo $i = 0, 1, \ldots$.

Por otro lado, es fácil ver que

$$V(f(x)A_0(x), f(x)A_1(x), f(x)A_2(x) \ldots) = V(A_0(x), A_1(x), A_2(x), \ldots)$$

si $f(x) \neq 0$. Esto nos permitirá trabajar con polinomios $p(x)$ que no tengan ningún factor en común con $p'(x)$. Notar que esto también implica que todas las raíces de $p(x)$ (reales y complejas no reales) serán simples. O sea que el criterio cuenta raíces sin "darse cuenta" de la multiplicidad.

Observemos ahora que esta simplificación (que p y p' no tengan raíces comunes) implica lo siguiente: *para todo $i = 0, 1 \ldots$ no hay raíces comunes entre p_i y p_{i+1}.*

En efecto, si α es una raíz de p_i y de p_{i+1}, entonces también lo será de p_{i-1} ya que $p_{i-1}(x) = c^*(x)p_i(x) - p_{i+1}(x)$, con $c^*(x) \in \mathbb{R}[x]$, y entonces inductivamente se tendrá que $p_0(\alpha) = p_1(\alpha) = 0$, una contradicción.

Hechas estas observaciones, comencemos a estudiar la variación de signos de la sucesión $(p_0(x), p_1(x), \ldots)$.

- Si existe $\alpha \in (x_0, x_1)$ tal que $p(\alpha) = 0$, entonces como $p'(\alpha)$ será distinto de cero, p crecerá o decrecerá en un entorno de α. En todo caso, p_0 cambia de signo al pasar por α, pero no ocurre lo mismo con p_1. Aquí hay una variación de signo.

- Supongamos que además exista algún $i > 2$ tal que $p_i(\alpha) = 0$. Como $p_{i-1}(x) = c^*(x)p_i(x) - p_{i+1}(x)$, entonces se tendrá

$$p_{i-1}(\alpha) = -p_{i+1}(\alpha),$$

es decir, los valores de p_{i-1} y p_{i+1} en un entorno de α son de signos opuestos (y además sabemos que ninguno de ellos puede ser igual a cero). Esto dice que, independientemente del valor que tenía p_i en un entorno de α, el número de variaciones de signo en la terna p_{i-1}, p_i, p_{i+1} no cambia al atravesar α.

En conclusión, el único cambio en la sucesión de signos de $(p_0(x), p_1(x), \ldots)$ se produce cuando se atraviesa por una raiz de p, y esto es lo que queríamos demostrar. $\square$

Ejemplo 7.9. *Apliquemos el algoritmo de Sturm a $p(x) := x^3 + 3x^2 - 1$. Se tiene*

$$p_0 := x^3 + 3x^2 - 1,\ p_1 := p' = 3x^2 + 6x,\ p_2 := 2x + 1,\ p_3 := \frac{9}{4}.$$

Hallemos el número de variaciones de signo que presenta este sistema para $x = -\infty$ y $x = \infty$:

$$\begin{array}{lclcl} V\left(p_0(-\infty), p_1(-\infty), p_2(-\infty), p_3(-\infty)\right) & = & V\left(p_0(-M), p_1(-M), p_2(-M), p_3(-M)\right) & = & 3, \\ V\left(p_0(\infty), p_1(\infty), p_2(\infty), p_3(\infty)\right) & = & V\left(p_0(M), p_1(M), p_2(M), p_3(M)\right) & = & 0, \end{array}$$

o sea que el polinomio tiene tres raíces reales. Para determinar más precisamente la posición de estas raíces, continuemos la tabla anterior:

$$\begin{array}{lclcl} V\left(p_0(-3), p_1(-3), p_2(-3), p_3(-3)\right) & = & V(-,+,-,+) & = & 3, \\ V\left(p_0(-2), p_1(-2), p_2(-2), p_3(-2)\right) & = & V(+,0,-,+) & = & 2, \\ V\left(p_0(-1), p_1(-1), p_2(-1), p_3(-1)\right) & = & V(+,-,-,+) & = & 2, \\ V\left(p_0(0), p_1(0), p_2(0), p_3(0)\right) & = & V(-,0,+,+) & = & 1, \\ V\left(p_0(1), p_1(1), p_2(1), p_3(1)\right) & = & V(+,+,+,+) & = & 0. \end{array}$$

Por lo tanto, hay una raíz entre -3 y -2, otra entre -1 y 0, y la tercera está entre 0 y 1.

Ejercicio 7.10. *Aplicar el algoritmo de Sturm al polinomio $p(x) := x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$ y determinar su número de raíces reales. Determinar además intervalos disjuntos donde p tenga una sola raíz real en cada uno de ellos.*

8. Implementación en `Maple`

8.1. Localización de raíces y factorización

Los siguientes comandos en `Maple` son de utilidad para el cálculo de raíces de polinomios y para factorizarlos:

- factor: factorización de un polinomio sobre un cuerpo algebraico de números.

- fsolve: aproximación de raíces reales o complejas usando puntos flotantes.
- irreduc: test de irreducibilidad sobre un cuerpo de números algebraicos.
- realroot: calcula intervalos que aislan las raíces reales (hay que cargar primero el paquete realroot).
- roots: calcula las raíces de un polinomio sobre un cuerpo de números algebraicos.

Para practicar estas funciones, se sugiere al lector ensayar los comandos que siguen en una sesión de `Maple`:

```
>f:=x∧5+1;
>factor(f);
>factor(f,complex);
>factor(x∧2-2);
>factor(x∧2-2,sqrt(2));
>solve(x∧5-1);
>solve(x∧5-1,x);
>fsolve(x∧5-1,x);
>q := 3*x∧4 - 16*x∧3 - 3*x∧2 + 13*x + 16;
>fsolve(q, x, 1..2);
>fsolve(q, x, 2..5);
>fsolve(q, x, 4..8);
>fsolve(q, x, complex);
>irreduc(q);
>roots(q);
>readlib(realroot):
>realroot(q);
>realroot(q,1/1000);
>realroot(q,1/1000000);
```

Ejercicio 8.1. *Sea* `p(x,y):= 3*x∧5+y∧4-5*x∧3*y∧3+4*x`.

1. *Ensayar las funciones* `coeff, coeffs, degree,...` *sobre* p*, considerándolo primero como polinomio en* x*, y luego como polinomio en* y*.*
2. *Averiguar qué hacen la funciones* `prem, primpart, interp`.
3. *Calcular todas las raíces reales de* p *con* 10 *dgitos de precisión siendo*

   `>p:=x∧15-x+21;`

   `>p:=x∧40+25*x∧21+14;`

   `>p:=(x-1)*(x-2)*...*(x-20)+1;`

   `>p:=1+x+2*x∧2+6*x∧3+...+20!*x∧20;`

8.2. Funciones de la librera "sturm"

- `sturmseq(polinomio, variable):` construye la sucesión de Sturm de un polinomio dado.
- `sturm(polinomio,variable,a,b):` calcula el número de raíces reales de un polinomio entre a y b.

Ensayar la siguiente sesión en el ordenador:

```
>realib(sturm);
>sturmseq(x∧5-x+1,x);
>sturm(x∧5-x+1,x,-10,10);
>fsolve(x∧5-x+1,x);
```

8.2.1. Regla de los Signos de Descartes

La regla de los signos de Descartes no está implementada en Maple, pero su implementación es bastante sencilla. Veamos el caso en que todos los coeficientes del polinomio son no nulos.

1. Listando los coeficientes de un polinomio:

   ```
   >p:= x∧5-x∧4+x∧3-x∧2-x-1;
   >for i from 1 to degree(p) do c.i:=coeff(p,x∧i) od;
   ```

2. Contando la cantidad de saltos de signo en la sucesin:

   ```
   >contador:=0;
   >for i from 1 to degree(p) do if c.i*c.(i+1)=-1 then contador:=contador+1
   else fi od;
   >contador;
   >fsolve(p);
   >realib(realroot);
   >realroot(p,1/1000);
   ```

Ejercicio 8.2. *Programar la función "contador" para que funcione la regla de los signos aún cuando alguno de los coeficientes del polinomio sea cero.*

Ejercicio 8.3.

1. *Investigar el comportamiento de* `sturmseq` *y de* `sturm` *si el polinomio tiene raíces múltiples.*
2. *Investigar el comportamiento de* `sturm` *si uno de los extremos del intervalo es una raíz del polinomio.*

Ejercicio 8.4. *Implementar en Maple el Teorema de Budan-Fourier.*

9. Comentarios finales

Hemos expuesto aquí una serie de métodos clásicos y elementales para estimar el número de raíces reales de un polinomio (con coeficientes reales) en un intervalo. La extensión de estos métodos para el caso de *sistemas* de polinomios en varias variables es todavía un área de investigación activa. Hay pocos resultados en esta dirección, y todos usan herramientas muy complicadas de aspecto topológico.

En realidad, el único método que se generaliza razonablemente a varias variables es el denominado *método de Hermite*, que fue introducido por Charles Hermite alrededor de 1850 (ver [6, 7, 8]), y que esencialmente responde al siguiente problema:

`Calcular los ceros` r `de` $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ `que además verifican` $q(r) > 0$, `para un polinomio` $q(x)$ `dado.` La demostración del método de Hermite es también elemental, usa herramientas de álgebra lineal sobre los números reales básica (conceptos como formas cuadráticas, rango y signatura). Pero su tratamiento escapa del objetivo de este curso.

Referencias

[1] E.J.Barbeau. *Polynomials.* Problem Books in Mathematics, corrected second printing. Springer-Verlag 1995.

[2] F. Budan de Boislaurent. *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques d'un degreé quelconque (1807).* 2nd edition, Paris (1822).

[3] Cox, David A.; Little, John; O'Shea, Donal. *Ideals, varieties, algorithms.* An introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. Second edition, Springer, New York, 2006.

[4] Cox, David A.; Little, John; O'Shea, Donal. *Using algebraic geometry.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 185. Springer, New York, 2005. xii+572 pp.

[5] R. Descartes. *Géométrie (1636).* A source book in Mathematics, 90-31. Harvard University press (1969).

[6] C. Hermite. *Sur léxtension du théorème de M. Sturm a un système d'équations simultanées (1852).* Oeuvres, Gauthier-Villars, Paris, 1905, Vol.1, 280–283.

[7] C. Hermite. *Remarques sur le Théorème de M. Sturm.* Oeuvres, Gauthier-Villars, Paris, 1905, Vol.1, 284–287.

[8] C. Hermite. *Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre des limites données.* Oeuvres, Gauthier-Villars, Paris, 1905, Vol.1, 397–414.

[9] J. Fourier. *Analyse des équations déterminées.* F. Didot, Paris (1831).

[10] A.G. Kurosch *Curso de Álgebra Superior.* Editorial Mir, Moscú 1968.

[11] C. Sturm. *Mémoire sur la résolution des équations numériques.* Ácadémie des Sciences, 23 mai 1829.