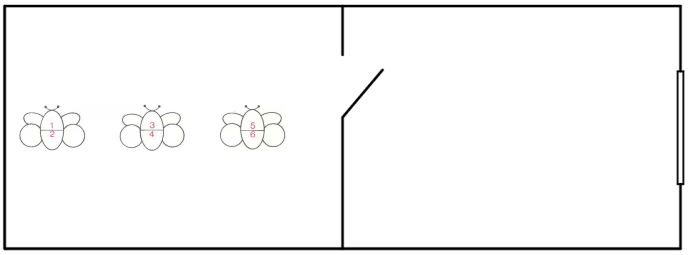
Les tres vespes

A l'habitació de l'esquerra hi ha tres vespes. La porta de l'habitació del costat és oberta. Una vespa vola a través de la porta oberta cada minut. L'atzar decideix quina vespa canvia d'habitació. Tirem el dau i posem a l'altra habitació la vespa que té el número que ha sortit a la seva esquena. Si la vespa és a l'habitació de l'esquerra, passa a la dreta i viceversa. Això continua fins que totes les vespes són a l'habitació correcta. Després ja podem tancar la porta i ens hem desfet de totes les vespes.



Volem saber quant de temps es triga de mitjana fins que totes les vespes estiguin a l'habitació contigua.

Experimentació:

Conjectures i formes d'abordatge a l'aula:

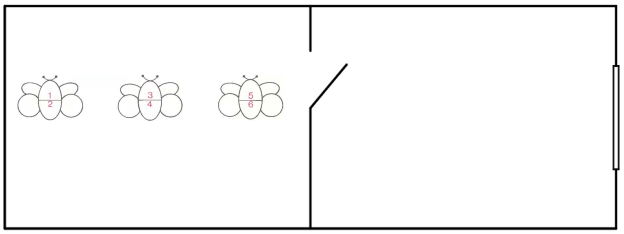
Generem preguntes:

Extret del Manual de La Caixa de Varga (pàgina 14).

Segona part del taller: aprofundiment (25 minuts)

Resituació del problema.

Recordem l'enunciat
A l'habitació de l'esquerra hi ha tres vespes. La porta de l'habitació del costat és oberta. Una vespa vola a través de la porta oberta cada minut. L'atzar decideix quina vespa canvia d'habitació. Tirem el dau i posem a l'altra habitació la vespa que té el número que ha sortit a l'esquena. Si la vespa és a l'habitació de l'esquerra, passa a la dreta i viceversa. Això continua fins que totes les vespes són a l'habitació correcta. Després ja podem tancar la porta i ens hem desfet de totes les vespes.



Volem saber quant de temps es triga de mitjana fins que totes les vespes estiguin a l'habitació adequada.

Com ha anat l'experimentació realitzada a la primera part?

Quines conjectures hem fet?

Quines preguntes se'ns han plantejat i han quedat "aparcades"?

És possible que les vespes "surtin" en 1 o 2 Ttirades?
És possible que les vespes "surtin" en 3 tirades?
És possible que les vespes "surtin"en 4 tirades? En 5? En 6?"
S'hi observa alguna regularitat?

L'abordatge del problema des d'un punt de vista matemàtic es pot fer pensant que podem tenir quatre configuracions quant a la distribució de les vespes:

C_{30}: 3 vespes a la primera habitació, 0 a la segona. Aquesta configuració, en particular, es dóna en la posició inicial, però s'hi pot tornar al llarg del procés.

C_{21}: 2 vespes a la primera habitació, 1 a la segona.

C_{12}: 1 vespa a la primera habitació, 2 a la segona.

C_{03}: 0 vespes a la primera habitació, 3 a la segona. Aquesta configuració indica el final del procés

Als apartats següents ens serà útil aquest plantejament.

Món de les simulacions (aspectes informàtics)

El procés de simulació que hem realitzat “manualment” també pot realitzar-se per mitjans computacionals:

Simulació amb GeoGebra (Jordi Font)
https://www.geogebra.org/m/qxtqkuen

Simulació amb Snap (Raül Fernández)
https://snap.berkeley.edu/project?username=raulf&projectname=3bee
https://snap.berkeley.edu/project?username=raulf&projectname=3bee_ampliado

Simulació amb Phyton (Adrià de Batlle)
https://trinket.io/python/a7b0829a64

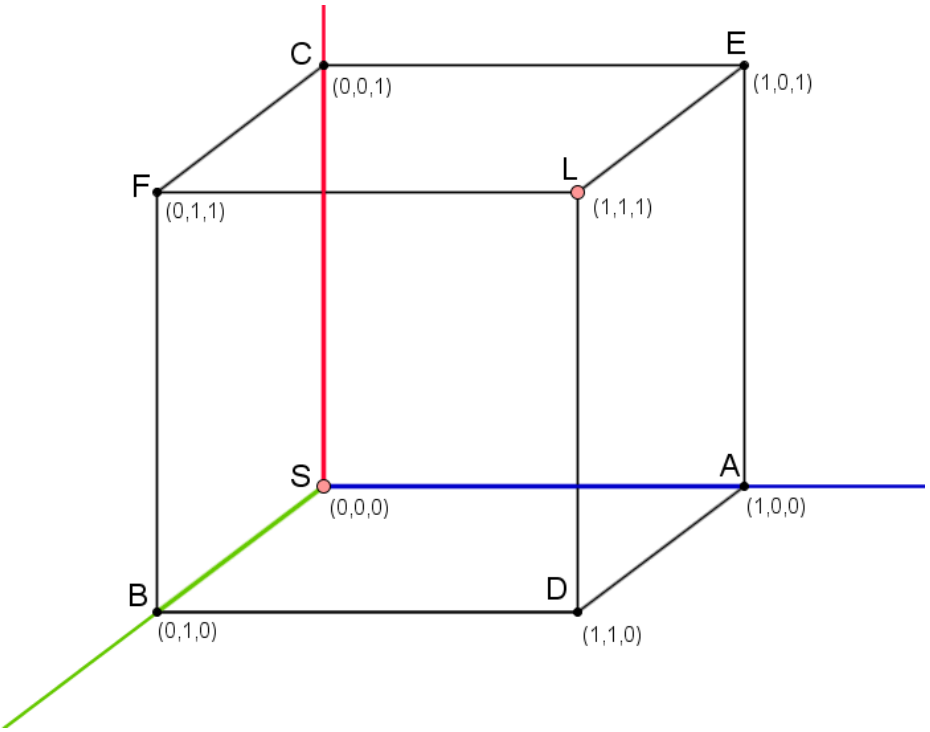
Món dels models: activitats alternatives on subjau el mateix model probabilístic

En total esmentarem quatre contextos, quatre problemes, que corresponen al mateix model probabilístic:

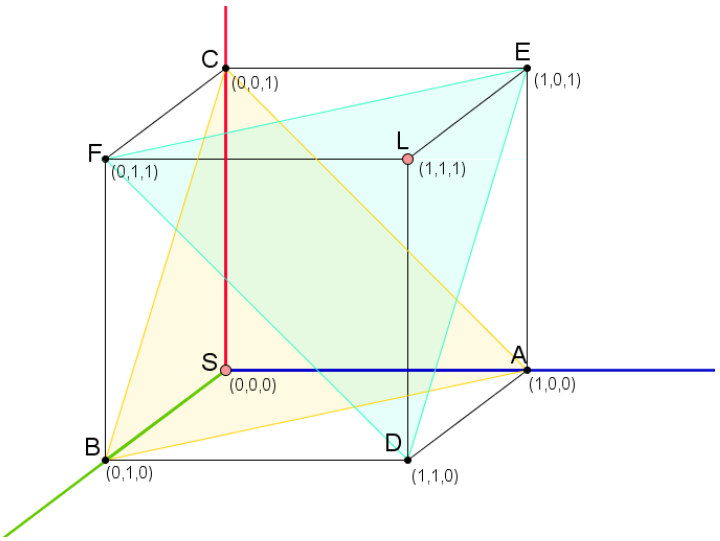
1. **Replantegem el problema de les vespes però formulant-lo mitjançant un model geomètric.**
   Indiquem per "0" ser a l'habitació de l'esquerra i indiquem per "1" ser a l'habitació de la dreta. Prenem ternes de tres dígits 0 o 1 que indiquin ordenadament la posició de la primera vespa, la de la segona i la de la tercera. Per exemple:
   La terna (0,0,0) indicarà que les tres vespes són a l'habitació de l'esquerra
   La terna (0,0,1) indicarà que la primera i la segona vespes són a l'habitació de l'esquerra i la tercera vespa és a l'habitació de la dreta.
   La terna (1,0,1) indicarà que la primera i la tercera vespes són a l'habitació de la dreta i la segona vespa és a l'habitació de l'esquerra.
   La terna (1,1,1) indicarà que les tres vespes són a l'habitació de la dreta

   Considerem un sistema de coordenes a l'espai i un cub el costat del qual mesura la unitat (vegeu figura) amb un vèrtex (S) situat a l'origen i amb les tres arestes que hi concorren situades sobre els eixos de coordenades en el sentit positiu (colorejats de blau, verd i vermell per indicar la primera coordenada, la segona i la tercera). Anotem les coordenades de cada vèrtex i observem que cada vèrtex representa una distribució de les vespes a les habitacions.

   Cada cop que llencem el dau només una vespa canvia d'habitació de manera que es passa d'un vèrtex a un vèrtex contigu. Si surt 1 o 2 només canvia la primera coordenada, si surt 3 o 4 només canvia la segona coordenada, si surt 5 o 6 només canvia la tercera coordenada. Es parteix del punt S (0,0,0), sortida, i s'acaba al punt L (1,1,1), arribada.



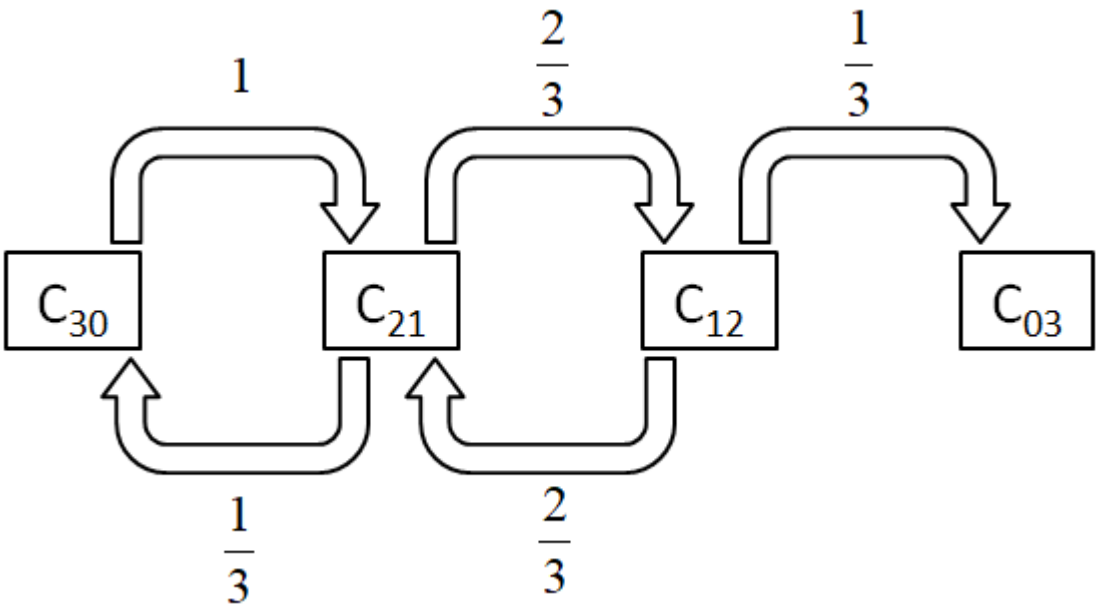
Els moviments sobre aquest cub representen canvis en la distribució de les vespes a les dues habitacions.
Aquesta és doncs una bonica representació geomètrica del problema de les tres vespes.
Observeu que el vèrtex S correspon a la configuració que hem indicat com a C_{30}, que els vèrtexs A, B i C corresponen a la configuració C_{21} (vegeu el triangle taronja de la imatge següent), que els vèrtexs D, E i F corresponen a la configuració C_{12} (vegeu el triangle blau a la imatge següent) i que el vèrtex L correspon a la configuració que hem indicat per C_{03}.



A cada moviment de les vespes, al fons es produeix un salt entre una configuració i una altra:

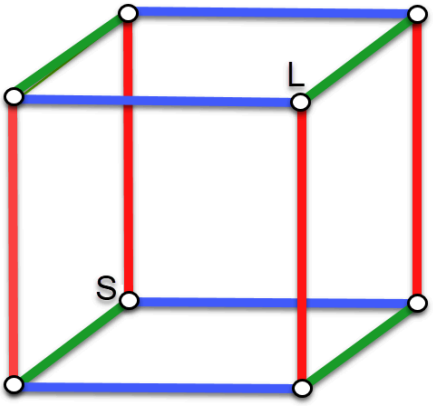
- Si estem a S (C_{30}) Qualsevol moviment ens porta a un vèrtex del triangle groc (C_{21}).
- Si estem en un vèrtex del triangle groc (C_{21}) una aresta ens porta a S (C_{30}) i dues arestes ens porten a vèrtexs del triangle blau (C_{12}).
- Si estem en un vèrtex del triangle blau (C_{12}) una aresta ens porta a L(C_{03}) i dues arestes ens porten a vèrtexs del triangle taronja (C_{21}).
- Si estem a L (C_{03}) hem arribat al final, tenim les tres vespes a l'habitació de la dreta.

Aquestes consideracions ens permeten fer un esquema amb els salts entre configuracions i les seves probabilitats:

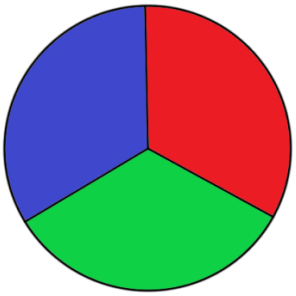


Aquest esquema coincideix perfectament amb les consideracions que s'han fet en l'apartat d"aspectes matemàtics.

2. **El problema de l'escarabat movent-se per una cub.**
   Un escarabat es mou per les arestes d'un bonic cub de filferro amb arestes pintades de colors com el de la figura:



Comença el seu recorregut al vèrtex S i necessita un minut per recórrer una aresta. Quan arriba a un vèrtex, tria aleatòriament una de les tres arestes que hi concorren. Ho fa fent girar una ruleta equilibrada com la de la figura:
NOTA: en cas de no tenir ruletes físiques, sempre podem fer ús dels simuladors que ens ofereix polipad.



Així es va desenvolupant el seu passeig pelcub. No obstant això, hi ha una perillosa particularitat: si arriba al vèrtex L, se'l menjarà un ocell que l'està esperant allà. Ens preguntem quina serà l'esperança de vida d'aquest escarabat. Per exemple l'obtenció de la següent seqüència de colors,

portarà a l'escarabat al vèrtex L en 11 minuts, amb la fatal conseqüència que comporta.

Serà interessant que els alumnes, treballant en parelles, simulen els moviments de l'escarabat sobre un tauler de joc que reprodueixi el dibuix del cub anterior.

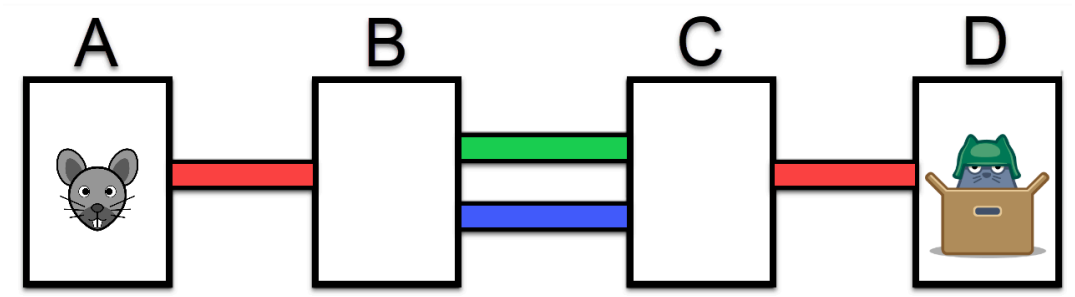
Cada parella haurà de tenir una ruleta de tres colors i una fitxa per indicar la posició de l'escarabat. Es partirà de la posició S i s'aniran recorrent arestes fins arribar a la posició L que indicarà el final de la vida de l'escarabat. Els alumnes hauran de comptar quants minuts ha trigat l'escarabat a anar des de S fins a L (recordem que cada aresta

representa un minut de trajecte). Cada parella farà diverses vegades aquest procés i finalment es farà la mitjana dels temps obtinguts per totes les parelles del grup.

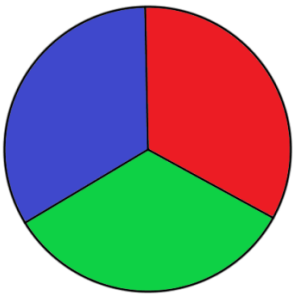
S'obtindrà un temps d'uns 10 minuts.
Observeu que es tracta del mateix model probabilístic que el del problema de les vespes.

3. El problema del ratolí i el gat.

En un cau hi ha un conjunt de cavitats (A, B, C i D) i de camins entre ells, pintats de bonics colors, com indica la figura:



A la cavitat A hi ha un ratolí i a la D s'hi ha infiltrat un gat. El ratolí és molt inquiet i cada minut canvia de cavitat recorrent un únic tram. Si la cavitat en què es troba té diversos possibles camins, escull a l'atzar un fent girar la ruleta equilibrada de la imatge i escollint el camí del color que hagi sortit a la ruleta.



Així si és a A, al cap d'un minut estarà a B. Per sortir de B tirarà la ruleta i escollirà el camí del color que li surti, de manera que depenent de la sort, després d'un altre minut, serà a A o a C. I així successivament. El ratolí no sap que a D li espera una trobada desagradable.

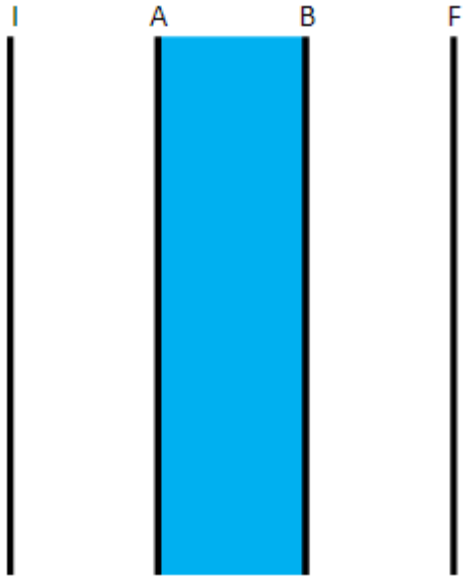
Podem assegurar que, en algun moment, arribarà a D?
Podria ser que no arribés mai?
Si surt de A, quants minuts de vida estimaries que li queden al ratolí?

Explorem la situació a través d'un “joc - simulador”. Treballarem en parelles. Cada parella tindrà un tauler com el de la primera imatge d’aquest apartat, una fitxa que assenyalarà la posició del ratolí i una ruleta com la de la segona imatge d’aquest apartat. Es col·locarà la fitxa a A i s'aniran comptant els moviments del ratolí. Sens dubte el primer moviment consistirà a passar d'A a B pel passadís vermell. Per

determinar el segon moviment llençarem la ruleta: si surt vermell tornarem a A, si surt verd o blau saltarem a C i així successivament fins que es produeixi la terrible trobada o ens cansem de jugar… Apuntarem després de quants moviments s'ha arribat a D i tornarem a “jugar” partint de nou els equips per obtenir simulacions (recordem que el nombre de moviments coincideix amb el nombre de minuts de vida itinerant del ratolí). Així obtindrem una bona estimació de “l'esperança de vida” del nostre ratolí. Si es fa en molts casos obtindrem un número proper a 10.

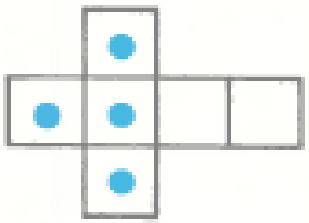
4. El problema que es planteja al següent role-play

Hi ha a terra 4 línies “verticals” separades exactament per un pas: I (Inici), A, B i F (Final) com indica la imatge. La franja entre A i B s'ha d'indicar en blau.



Els participants, inicialment, s'ubiquen al llarg de la línia I (Inici). Els seus moviments sempre seran en direcció “horitzontal” (perpendicular a les línies):

Cada participant disposarà d'un dau com el de la figura següent, amb quatre cares blaves i dues de blanques.

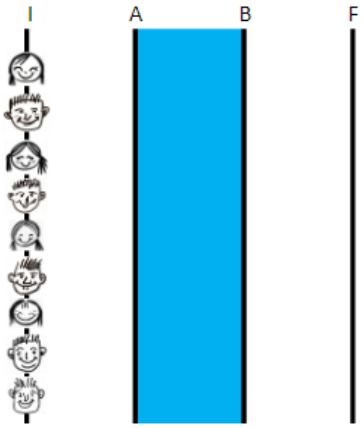


Una persona, amb un objecte per emetre senyals (per exemple amb un xiulet), indicarà quan s'ha de fer un pas i anirà comptant els passos.

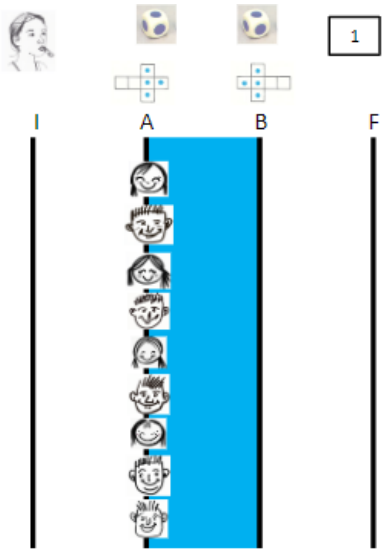
Quan un participant estigui sobre la línia I l'únic moviment possible serà cap a la línia A. Quan un participant estigui sobre la línia A o la línia B llençarà el dau i el color de la cara

que surti li dirà cap a quin costat ha de fer el pas, el costat blau o el blanc. Quan un participant, al seu passeig aleatori, arribi a la línia F, prendrà nota del nombre de moviments que ha fet fins aquell moment (el número indicat al comptador) i sortirà del role-play.

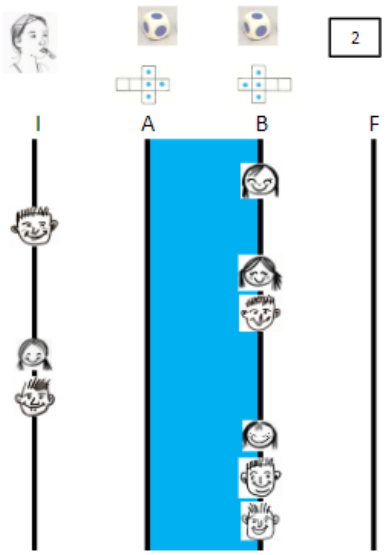
La imatge següent indica la posició inicial:



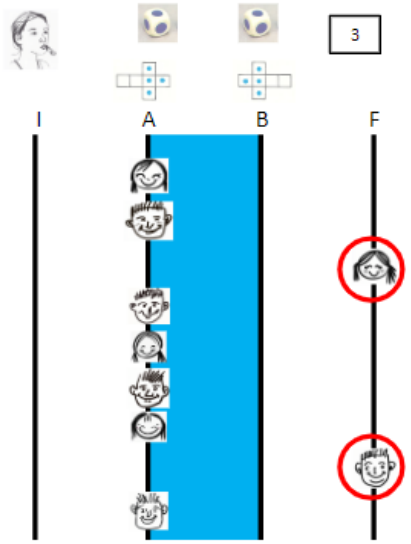
Després d'un xiulet estaran així:



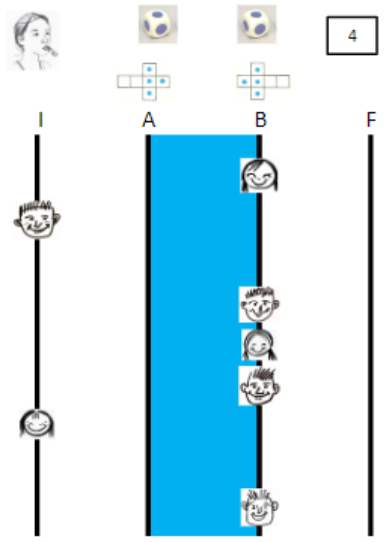
Al següent xiulet es repartiran ja els participants:



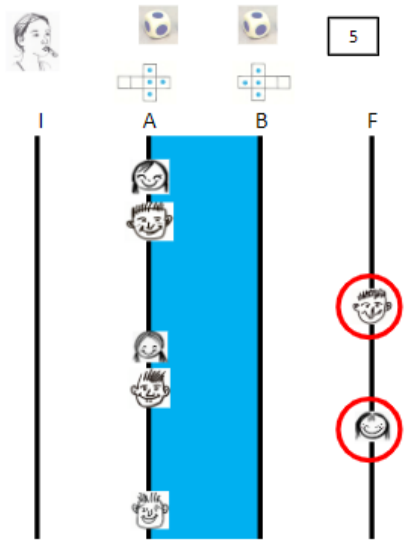
En el següent moviment serà probable que alguns participants arribin a F i abandonin el role-play després de prendre nota del nombre de passos que han fet al seu “passeig”:



Al quart pas podem tenir una configuració semblant a la següent:

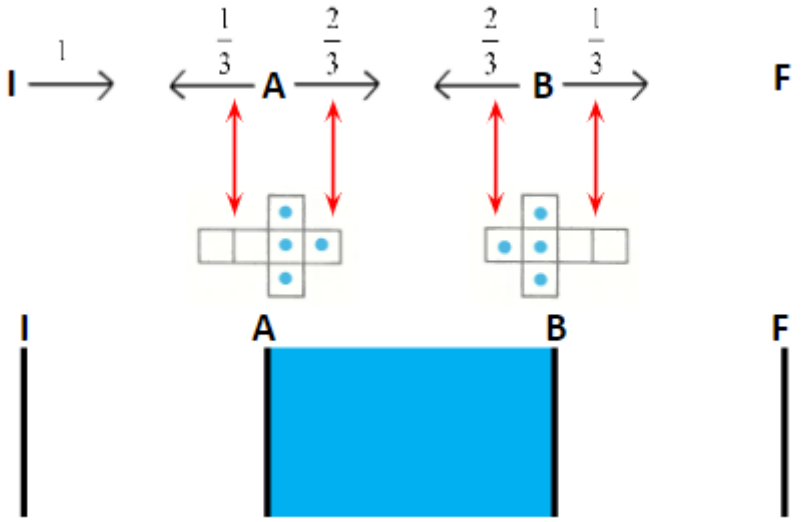


Al cinquè pas podem tenir una configuració semblant a la següent i serà probable que alguns alumnes arribin a F i abandonin el role-play prenent nota del nombre de passos del seu passeig.



Un cop hagin sortit del role-play tots els participants (o gairebé tots ja que hi ha la possibilitat que algun participant mai arribi a F o que arribi després de molts moviments), haurem de calcular la mitjana dels moviments que cadascú ha necessitat per arribar a F. Molt probablement el valor obtingut estarà molt proper a 10.

Observeu que la configuració de probabilitats és idèntica a la que s'observava als salts entre les configuracions C_{30}, C_{21}, C_{12},C_{03} del problema de les vespes i en els altres contextos que s'han plantejat:



Aspectes matemàtics

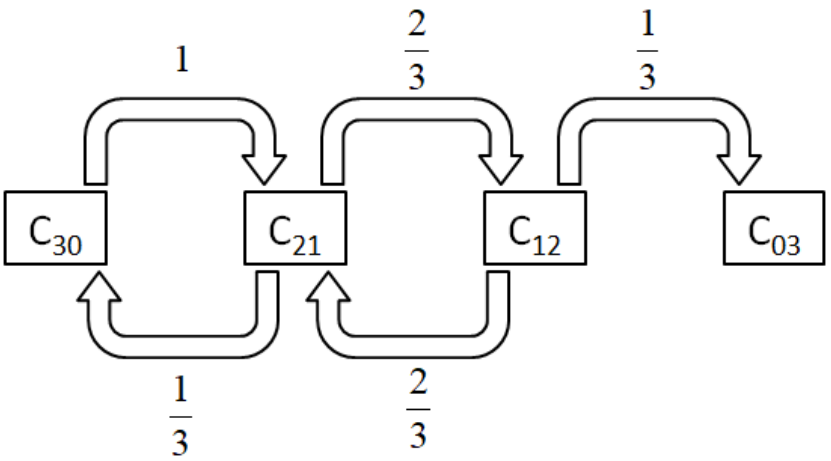
Aquest apartat està destinat al professorat ja que requereix certes tècniques matemàtiques allunyades dels continguts de l'educació secundària. En principi, en el treball dels alumnes, no es preveu fer una demostració formal del càlcul exacte de l'esperança matemàtica com la que es farà a continuació, sinó simplement fer estimacions experimentals i observar la coincidència del model matemàtic en les diverses situacions que s'han descrit.

L'abordatge del problema es pot fer a partir de les configuracions que ja s'havien comentat quant a la distribució de les vespes:

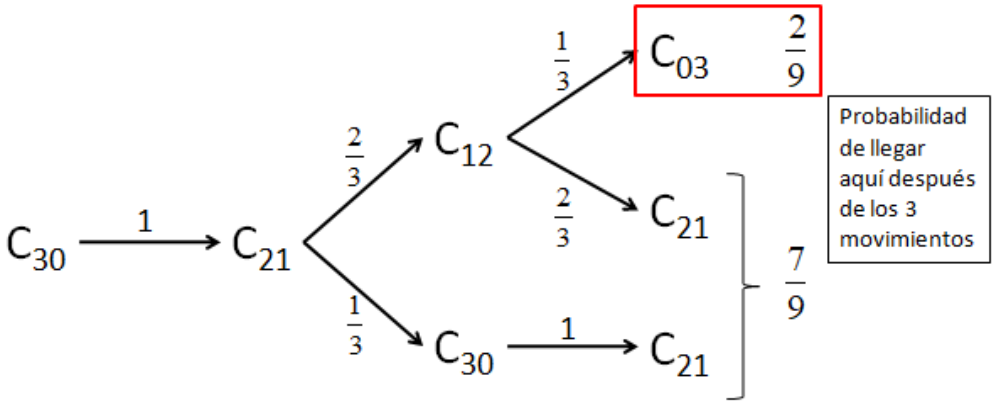
- C_{30}: 3 vespes a la primera habitació, 0 a la segona. Aquesta configuració, en particular, es dóna en la posició inicial, però s'hi pot tornar al llarg del procés.
- C_{21}: 2 vespes a la primera habitació, 1 a la segona.
- C_{12}: 1 vespa a la primera habitació, 2 a la segona.
- C_{03}: 0 vespes a la primera habitació, 3 a la segona. Aquesta configuració indica el final del procés.

Recordem que pretenem calcular l'esperança matemàtica del nombre de moviments necessaris per acabar el procés que, en cada cas, es descriu.

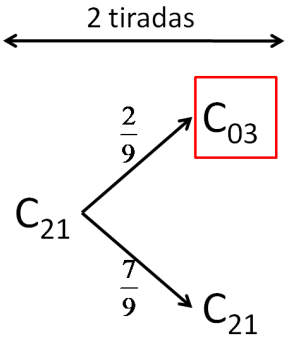
Reprenguem l'esquema subjacent en tots els problemes anteriors:



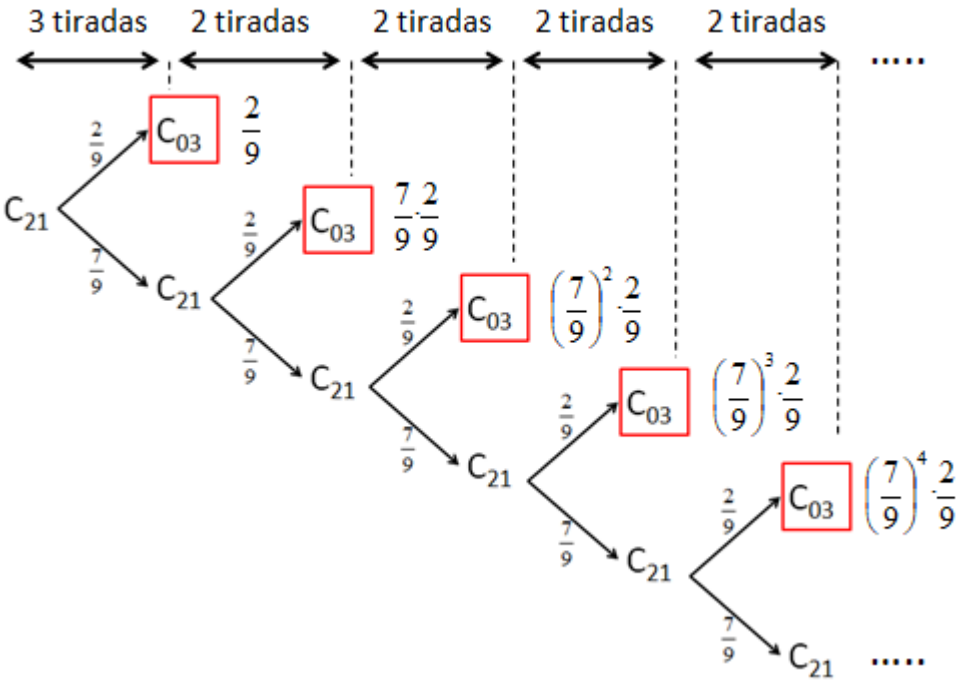
Fem un diagrama en arbre per representar els tres primers moviments, indicant a cada branca les probabilitats del corresponent moviment:



El requadre vermell representa la probabilitat d'acabar el procés en 3 moviments.
Unint el segon i el tercer moviment tindríem el següent esquema (que representaria 2 moviments):



Aquesta peça es pot “encadenar” de manera recurrent com s'observa al següent esquema:



Els quadrats vermells indiquen el final del procés i, al costat, s'indica la probabilitat d'arribar a cadascun. Observeu que el procés acabarà en 3 moviments, o en 5, o en 7, o en 9…, sempre en un nombre imparell de moviments. Així doncs, l'esperança matemàtica del nombre de moviments que es requereixen per acabar el procés vindrà donada per l'expressió:

$$EM = \frac{2}{9}\cdot 3 + \frac{7}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot 5 + \left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot 7 + \left(\frac{7}{9}\right)^3\cdot\frac{2}{9}\cdot 9 + \left(\frac{7}{9}\right)^4\cdot\frac{2}{9}\cdot 11 + \ldots$$

La suma daquesta sèrie és una mica delicada. Necessitarem dos resultats sobre sumes de

sèries:

- La fórmula de la suma duna sèrie geomètrica de raó menor que 1, en valor absolut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad si \quad |x| < 1$$

- La fórmula que es dedueix derivant terme a terme l'anterior (es pot demostrar que la sèrie derivada convergeix cap a la derivada de la funció suma anterior):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad si \quad |x| < 1$$

Aleshores tindrem:

$$EM = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^n \cdot (2n+3) = \frac{2}{9} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3) \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^n =$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{2}{9} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^n =$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{4}{9} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^n =$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{7}{9}} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{7}{9}\right)^2} = 1+9 = 10$$

Concloent així la demostració que l'esperança matemàtica és 10.

Aspectes didàctics (com ho portem a classe)

És un bon problema per treballar en grups de 2 o 3 alumnes.

La primera etapa del treball ha de ser exploratòria: a través de l'experimentació els alumnes van entrant en el context, es van plantejant preguntes i descobrint certes regularitats, per exemple, el fet que el procés d'"expulsió" de les vespes sempre es produeix després d'un nombre senar de tirades, superior o igual a 3.

Serà important que estableixin un bon sistema de recompte i que es reparteixin la feina. Per exemple, un alumne pot llençar el dau, un altre pot moure les vespes i el tercer pot comptar els tiratges.

Quan les tres vespes es troben a l'habitació de la dreta s'entén que s'ha acabat el procés d'expulsió (prou tancar la porta entre les habitacions i obrir la finestra de l'habitació de la dreta). Aleshores l'equip haurà de prendre nota de quantes tirades han estat necessàries per arribar al final i tornarà a començar un nou procés. Quan hagi realitzat una certa quantitat de vegades aquest procés tindrem dues opcions:

- Que cada equip faci la mitjana del nombre de tiratges necessaris que ha anotat en cada cas.
- Que es faci la mitjana conjuntament, agrupant totes les observacions dels diversos equips.

La mitjana s'acostarà a 10 tirades, com s'ha deduït a l'apartat "Aspectes matemàtics". Aquí es plantegen preguntes que poden fer riques converses matemàtiques d'aula:

- És possible que la mitjana s'acosti a un nombre parell de tirades quan només s'acaba el procés després d'un nombre senar de tirades?
- Quina experimentació ha requerit el menor nombre de tiratges?
- Quina experimentació ha requerit el nombre més gran de tirades?
- Seria possible que es donés un cas que les tres vespes mai no coincidissin a l'habitació de la dreta? Seria probable? Quina seria la seva probabilitat?

Un cop fet aquest camí serà interessant proposar alguna exploració amb eines digitals: en alguns casos n'hi haurà prou amb mostrar aplicacions ja construïdes, en altres casos serà bo convidar els alumnes a fer els seus propis programes.

Ens sembla molt interessant plantejar altres problemes, en contextos absolutament diferents, però que corresponguin al mateix model probabilístic. És una manera molt potent de posar de manifest el valor abstracte del model matemàtic que es pot aplicar a realitats concretes diferents:

- El context de les vespes ja explorat amb detall.
- El context de l'escarabat movent-se per una galleda.
- El context del ratolí i el gat.
- El context del role-play

El missatge de fons és molt profund i els contextos són molt entenedors.

El role-play és especialment motivador. Convé fer observar un matís que no és menor: el moviment de les persones al role-play no equival al moviment de les vespes estrictament sinó als canvis entre els estats C_{30}, C_{21},C_{12} i C_{03}. Cada alumne al role-play representa el moviment de les tres vespes entre les habitacions i quan arriba al final significa que les vespes estan juntes a l'habitació de la dreta disposades a sortir per la finestra. Aquesta observació intenta fer un paral·lelisme entre dos contextos molt diferents que corresponen al mateix model. Bonica idea per traslladar els alumnes.

La deducció matemàtica de l'esperança matemàtica del nombre de tirades cal reconèixer que és una mica delicada, especialment per la tècnica requerida per a la suma de la sèrie. Aquest aspecte es pot deixar per a cursos avançats o ampliacions.

El que és realment interessant és l'exploració experimental (directa, amb eines computacionals, amb models alternatius…) que s'ha plantejat, l'aproximació a 10 tirades que s'ha obtingut i sobretot el que s'ha après pel camí.

Es tracta d'un problema que permet un fàcil abordatge, un desenvolupament per diferents camins que pot fer observar idees estocàstiques potents i una possible extensió final que requereix continguts avançats. És un bon exemple de problema de terra baix, sostre alt i parets amples.