

TEMA 2
FREGE: ANÀLISI FUNCIONAL I QUANTIFICACIÓ
(R. Cirera)



- Tema
- Exercicis
- Referències:
 - Bibliografia
 - Llocs web

TEMA 2

FREGE: ANÀLISI FUNCIONAL I QUANTIFICACIÓ

Ramon Cirera

2.1. Introducció

Introduïrem en aquesta secció la noció de contingut jutjable o contingut d'un possible judici, central en el Frege anterior a la distinció entre sentit i referència. A continuació presentarem l'anàlisi funcional dels continguts jutjables, que va deixar obsoleta tota la tradició lògica anterior. Mostrarem finalment com l'anàlisi funcional permet explicar el contingut dels enunciats quantificats i resol problemes d'ambigüitats abans insolubles.

2.2. Els continguts jutjables

Sovint s'atribueix a Frege el mèrit d'haver estat el primer pensador a formular una teoria del significat sistemàtica per a un fragment del llenguatge natural. Quan es diu això, es pensa en la seva celebrada distinció entre *sentit* i *referència*, objecte dels seus escrits més llegits. Tanmateix, l'anàlisi dels mecanismes de quantificació, especialment de la quantificació múltiple, és la part de la seva teoria que ha tingut conseqüències més significatives i s'ha convertit en un punt de pas de qualsevol teoria del significat que vulgui explicar-los.

Frege mateix no hauria dit que s'estava ocupant d'una teoria del significat lingüístic. Encara el 1918, temps després de publicar "Sobre sentit i referència", es queixava de no poder presentar als seus lectors el pensament sense l'embolcall lingüístic, accessori i impertinent per la qüestió que s'havia de tractar. Molt abans, quan va formular la conceptografia, encara se'n sentia més lluny. La teoria tal com Frege la concebia volia oferir una anàlisi del contingut en el sentit que veurem ara. Res no impedeix, però, considerar la seva teoria com a semàntica i així s'ha vist modernament, sobretot a partir de l'influent llibre de Dummett.

Frege es planteja quin és l'objecte del judici, seguint la tradició que veia el judici com un acte mental en el qual un subjecte s'adreçava a quelcom que era jutjat. Pensa que allò jutjat no pot ser un fet, ja que això seria incompatible amb l'existència de judicis falsos. Tampoc no pot ser una idea (*Vorstellung*) o entitat mental o psicològica. Les idees no tenen existència autònoma amb independència d'un portador que les posseeixi privadament sense que pugui compartir-les i són epistèmicament privades, això és, només el posseïdor en coneix la naturalesa i les característiques. L'objecte del judici, ben al contrari, pensava Frege, és vertader o fals amb independència de qui el jutja o de si és jutjat, i no depèn, doncs, d'un subjecte. No és propi d'un posseïdor, sinó que és compartit per molts: diverses persones poden jutjar el mateix. A més a més, no és epistèmicament privat. És comunicable i per això podem saber quins judicis efectuen els altres. Allò jutjable, el portador de la veritat i la falsedat, no pot ser una entitat que existeix i deixa d'existir d'acord amb lleis psicològiques. Per Frege, no pot ser res més que una entitat abstracta, que existeix independentment de si és jutjada o no. És el contingut d'un judici possible i Frege l'anomena 'contingut jutjable' (*beurtheilbare Inhalt*).

Els continguts jutjables existeixen amb independència dels subjectes que poden jutjar-los i, per tant, del llenguatge que aquests utilitzen, tot i que els éssers humans els expressen i els capten per mitjà del llenguatge: una oració asseverativa completa expressa un contingut jutjable. Aquesta limitació no és inherent als continguts i és

concebible que hi hagi éssers que no la sofreixin. La literatura de ciència-ficció n'ha imaginat la possibilitat més d'una vegada: éssers que es comuniquen no tan sols sense verbalització, telepàticament, sinó també sense ensopegar amb la frontera d'un llenguatge desconegut. El que aquests éssers es transmetrien serien els continguts jutjables. La lògica és capaç d'explicar les relacions que s'estableixen entre continguts jutjables i d'aquesta manera es relaciona amb la veritat. Explica la inferència correcta, és a dir, el procés que va d'uns judicis ja fets a un nou judici que aquests altres permeten, i això gràcies a les relacions que es donen entre continguts jutjables. Les condicions d'identitat de continguts jutjables corresponen precisament al seu paper lògic. En particular, dos enunciats expressen el mateix contingut jutjable si podem substituir l'un per l'altre en tota inferència sense alterar-ne la correcció.

La perspectiva de Frege és del tot platonista. La raó va més enllà de contemplar-se a ella mateixa i té els seus propis objectes. Per Frege, el platonisme era l'única alternativa al psicologisme i en conseqüència el va adoptar sense reserves. Qui, al contrari, senti escrúpols davant d'aquesta generositat ontològica, pot distingir dos moviments en el pas del lògic alemany: en primer lloc, el rebuig del psicologisme. És vital separar el judici (acte mental, psicològic) del contingut jutjable (no psicològic). L'empresa de Frege té com a objectiu l'estudi del pensament no com a fenomen psíquic, sinó com allò que pensem, diem o jutgem (o podem pensar, dir o jutjar): els continguts. En separar això de l'aspecte psicològic i considerar el contingut com una entitat objectiva, la investigació resultant té caràcter objectiu. Aquesta separació és la que busca Frege amb l'aplicació del seu lema tan repetit: cal separar allò psicològic d'allò lògic. Notem que quan separem allò psicològic, el judici com a acte, el que queda no és una pura estructura formal, sinó un contingut, que inclou òbviament també, però no solament, els aspectes formals. Contra l'ús actual de la paraula 'lògica', que l'entén com si parlés d'una disciplina formal o matemàtica, quan Frege (com també Russell i Wittgenstein) parla d'una investigació lògica, parla d'una investigació sobre el contingut, la seva naturalesa i estructura, no només sobre els seus aspectes formals. Frege inicia —o, més acuradament, s'hi inscriu brillantment i li dóna un nou impuls— la tradició que veu la pregunta pel contingut, un contingut independent dels aspectes psicològics, com la gran pregunta filosòfica. Una tradició que detecta en la falta d'atenció al contingut i en el psicologisme que l'enterboleix les arrels de la fal·làcia que porta a l'idealisme. La pregunta pel contingut ha de ser prèvia a tota altra investigació, també i en particular a la teoria del coneixement. És això el que dóna sentit i deixa entendre l'afirmació de Dummett segons la qual Frege és el primer filòsof que va desplaçar l'epistemologia com a disciplina bàsica de la filosofia per posar en el seu lloc la lògica.

El segon moviment, el de considerar que un cop exercida aquesta separació, només podem pensar platònicament els continguts, ha estat rebutjat per la filosofia analítica contemporània. Podem considerar que l'arrel de l'objectivitat, o almenys de la intersubjectivitat, és al llenguatge o s'hi manifesta com a expressió de la forma de representació característica de la ment humana. En qualsevol cas, l'anàlisi de continguts de Frege passa a ser vista com una teoria del significat dels enunciats expressius d'aquests continguts. Aquesta evolució no és trivial i fa ús de les mateixes eines que ens va llegar Frege. Es farà en tot cas palesa al llarg del curs de Filosofia del Llenguatge. De moment, en mostrar l'anàlisi de Frege parlarem d'anàlisi de continguts en el benentès que els aspectes platonistes que sembla comportar això no són essencials i podran ser rebutjats més endavant.

Entre l'estructura gramatical dels enunciats, que depèn de contingències històriques de tot tipus així com del fet que les oracions del llenguatge serveixen per gran quantitat d'usos diferents de l'expressió de continguts, com ara suggerir, amenaçar, insinuar, etc., i l'estructura incanviable de l'entitat abstracta, el contingut, es dóna una

correspondència inevitablement imperfecta. Enunciats amb formes gramaticals idèntiques amaguen diferències importants entre els seus continguts. Considerem les oracions següents:

- (1) Els apòstols eren barbuts.
- (2) Els apòstols eren dotze.

Hem d'entendre (1) com si diguéssim que la propietat de ser barbut s'aplica a cadascun dels apòstols, mentre que no és així amb (2). Si bé (2) és vertadera, és fals que cadascun dels apòstols era dotze. Uns problemes del mateix tipus separen les oracions (3) i (4), gramaticalment idèntiques:

- (3) Joan no va passar per aquí.
- (4) Ningú no va passar per aquí.

Ahora, enunciats diferents poden expressar el mateix contingut jutjable. El llenguatge natural, a més a més, conté termes amb més d'un significat i noms i expressions designatives que no estan en lloc de res, com ara 'papu' o 'el fill gran del Papa Joan Pau II'. Tots aquests problemes fan que el llenguatge natural sigui una mala eina per a l'expressió i l'anàlisi dels continguts jutjables. D'altra banda, les formes d'inferència en el llenguatge natural són tantes, tan variades i imprecises, que es fan inabastables. En la mesura que les inferències són validades per relacions entre continguts, aquesta inabastabilitat sembla deixar clara la inadequació del llenguatge natural per a la tasca.

Frege va buscar una manera d'expressar els continguts apropiadament, i amb aquest objectiu va inventar l'escriptura conceptual o conceptografia, un llenguatge artificial, la idea de la qual va trobar a la *lingua characterica* de Leibniz i que va iniciar la llarga tradició del llenguatge perfecte que van prosseguir Russell, Wittgenstein i fins i tot Quine, si bé cadascun amb objectius ben diferents. La conceptografia de Frege no pretén ser superior al llenguatge natural, que, en símil del mateix Frege, és com la mà humana, tan versàtil, adaptable i útil. Tanmateix, això no impedeix que per a certs usos concrets alguns instruments n'ampliïn les capacitats. De la mateixa manera, per expressar continguts jutjables, la conceptografia és una eina valuosa. No expressa res més ni té cap altra utilitat que pugui enfosquir-ne l'objectiu, i la seva forma reflecteix l'autèntica estructura dels continguts que no és sempre la dels enunciats que els expressen en llenguatge natural. Aquesta forma s'ha de veure com a dada, com a pista a través de la qual es pot arribar a veure el que és lògicament significant i que quedarà perfectament expressat en l'escriptura conceptual.

El que és més destacat i característic de la conceptografia, i per tant de l'anàlisi de continguts que mostra, és que en lloc d'atendre a la clàssica distinció lògica entre subjecte i predicat es basa en la teoria de funcions. L'anàlisi de continguts de Frege és, doncs, funcional i caldrà veure de prop la noció de funció que aquesta anàlisi pressuposa.

2.3. Funcions i objectes

Per entendre la noció de *funció* que utilitza Frege, cal deixar al marge la idea contemporània que tot filòsof ha estudiat al seus cursos bàsics de lògica i que fa d'una funció un conjunt de parells que compleixen la condició que cada element del conjunt de primers membres està lligat amb un i només un segon membre. La condició d'unicitat és també bàsica en la concepció de *funció* de Frege, però la funció no és un conjunt de parells. El conjunt de parells correspon, tot i que malament, a la noció de

curs de valors (*Wertverlauf*) d'una funció, que va trobar un lloc important en la teoria de Frege un cop aquesta va incorporar la distinció entre sentit i referència.

Considerem una expressió funcional com ara

$$y = 2x + 1.$$

Diem que la 'x' és la variable independent i la 'y' la variable dependent. Els valors que pren la variable independent són els *arguments* i els que rep la variable dependent (que queden fixats —per això és *dependent*— un cop la variable *independent* queda fixada) són els *valors*. Per cada argument (1, 2, 3, etc.) obtenim un i només un valor (3, 5, 7, etc.). Això és, tenim una manera d'obtenir valors a partir dels arguments, un procediment, una regla que ens porta d'un nombre (un argument) a un altre (un valor). Frege parla en ocasions d'una llei. Tanmateix, concep la funció entitativament, com quelcom que té com a característica essencial el fet de ser incompleta o insaturada, mancada d'alguna altra cosa per convertir-se en una entitat valor ja completa, saturada. La funció té llocs buits o forats que han d'omplir-se per fer-ne una entitat completa, que serà un objecte. Frege afirma que una expressió ontològicament més acurada (si bé pràcticament inadequada) de la funció que estem considerant seria la següent:

$$2() + 1,$$

en la qual el parèntesi amb el blanc interior expressaria el lloc buit característic de les funcions. Els llocs buits són a la pràctica indicats per variables, que no anomenen res, sinó que marquen la necessitat de completesa. Les funcions són, doncs, entitats reals amb la propietat de la insaturació, la necessitat de completesa. És clar que la metàfora de la insaturació no es pot considerar en absolut com una definició i Frege no ho pretén pas. La noció de *funció* és categorial, en el sentit aristotèlic, i, com a tal, bàsicament simple i indefinible. Com succeeix amb la seva noció correlativa, la d'*objecte*, tot el que es pot fer és portar el lector a mig camí mitjançant exemples i esperar que aquest subministri la resta amb la seva pròpia intuïció lògica.

En l'exemple vist, la funció rebia arguments i donava valors que eren tots nombres naturals, però és sabut que l'anàlisi matemàtica va fer ús ben aviat de funcions amb arguments i valors que eren nombres reals. Alhora es consideraven també funcions amb més d'un lloc argumental, com ara

$$y = 2x + z.$$

Durant el segle XIX la noció es va anar eixamplant de manera natural, primer amb l'admissió de funcions complexes i posteriorment amb funcions entre entitats no numèriques, com ara la funció que assigna a cada polígon el seu centre de gravetat. Frege va veure oberta la possibilitat d'admetre funcions que lliguessin arguments de qualsevol tipus amb un i solament un valor també de qualsevol tipus. Així, la funció expressada per

la capital de x

lligaria França amb París, Espanya amb Madrid, etc. De la mateixa manera, la que expressa

el pare de x

assigna el comte de Barcelona Don Joan de Borbó al rei Joan Carles I, Julio Iglesias a Chabeli Iglesias, etc. També podem considerar funcions amb més d'un argument. Pensem en la funció expressada per

el lloc on es van conèixer x i y ,

que si pren com a arguments el lector i el seu professor de Filosofia del Llenguatge donarà probablement com a valor una aula determinada de la Facultat de Filosofia de la Universitat de Barcelona. Amb aquests moviments la noció de *funció* queda ampliada. Ja no es tracta d'una entitat estrictament matemàtica. Tan sols una entitat que reté com a característica essencial la incompletesa o insaturació.

L'altra noció fonamental que usa Frege és la d'*objecte*. Objecte és tot allò que no és una funció i així la parella funció-objecte ens dona la distinció categorial bàsica i omniabraçadora. Si una funció és insaturada, els objectes són complets, saturats. La noció d'*objecte*, com la seva companya, la de *funció*, no és definible més enllà d'aquestes indicacions. Són objectes les persones, objectes físics com ara taules o cadires, àtoms, idees, nombres, paraules, esdeveniments, continguts jutjables. Tot allò no insaturat, no funcional, però amb existència real. Hi ha objectes abstractes, com ara els nombres (el nombre 5 o el nombre e , però no el nombre natural més gran de tots) o els continguts jutjables i objectes espaciotemporals, amb paper causal al món físic (la Terra o la Lluna, però no Vulcà).

Tot el que no és funció és un objecte i, per tant, quan saturem una funció li traiem la completeness o insaturació i en fem un objecte. Per tant, els valors de funcions, resultants de la seva saturació amb arguments, són necessàriament objectes. No així els arguments, però. Hi ha funcions que reben com a arguments altres funcions. Aquestes serien funcions de grau o ordre superior. Una funció que rebí objectes com a valors és de primer ordre. Si rep funcions de primer ordre, és de segon ordre, i així successivament. Si els arguments són d'ordre n la funció és d'ordre $n + 1$. Si hi ha més d'un lloc argumental, es considera a efectes d'ordre l'argument d'ordre superior. Amb això s'obté una jerarquia de funcions similar a la que Russell presentà anys després en la seva teoria de tipus. Per posar un exemple, la funció

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

és de segon ordre. Per l'argument (funció de primer ordre) x , obtenim el valor 2, per l'argument $(x-2)/(x-2)$, el valor 1.

Si preferim un exemple no matemàtic, podem considerar la funció expressada per

l'any de la mort de $f(\text{Joan Carles I})$

on ' f ' indica el lloc argumental. Si l'argument és la funció expressada per

el pare de x

el valor serà 1993, l'any de la mort de Don Joan de Borbó. Si l'argument és la funció expressada per

la mare de y

el valor serà 2000, any de la mort de Donya Maria de la Mercè de Borbó.

NOTA: Cal anar amb una certa cura en parlar de continguts jutjables a fi de no confondre'ls amb l'enunciat que els expressa. Donat un enunciat, com per exemple ' $3 + 1 = 4$ ', parlaré a partir d'ara indiferentment del contingut jutjable expressat per ' $3 + 1 = 4$ ', del contingut jutjable que $3 + 1 = 4$ o simplement parlaré, en referir-me a l'objecte contingut jutjable, de l'objecte que $3 + 1 = 4$.

2.4. L'anàlisi funcional dels continguts jutjables

Equipats amb les nocions de Frege de *funció* i *objecte* podem adreçar-nos a l'anàlisi lògica del contingut jutjable, anàlisi que la seva conceptografia ha d'expressar transparentment. Per aquest motiu la tasca d'anàlisi de continguts i la de disseny d'una escriptura conceptual van juntes i Frege les desenvolupa alhora.

L'aplicació de la teoria de funcions a l'anàlisi lògica és tal vegada l'aportació més important que ens ha llegat Frege. És al cor de la lògica moderna i és precisament la idea que ha fet obsoleta tota la lògica anterior, d'abans de Frege. Per qualsevol que hagi estudiat lògica avui en dia, és un moviment tan obvi codificar el contingut expressat per 'Sòcrates és mortal' com ' $M(s)$ ', això és, entendre que el predicat expressa una funció que s'aplica a l'individu anomenat per 'Sòcrates', que no s'adona que fer-ho és fruit d'una proposta determinada. Això dóna una mesura de fins a quin punt les idees de Frege han arribat a arrelar en les nostres concepcions lògiques.

La idea bàsica és que tot contingut jutjable, o sigui tot allò que puguem jutjar, pel fet de tractar-se d'un objecte, pot ser analitzat com a valor d'una funció per un o més arguments. Descompondre, doncs, el contingut en funció i arguments és el que fa l'anàlisi funcional. Les funcions que donen continguts com a valors són anomenades per Frege 'conceptes'. Tenim així una definició de *concepte*: concepte és aquella funció que dóna com a valors continguts jutjables. És clar que la definició reposa sobre la noció primitiva i indefinible de *funció*. Seran conceptes les funcions expressades per

$$x + 3 = 4.$$

Si la completem, per exemple, amb l'argument 1, obtenim un objecte d'un possible judici, això és, que $1 + 3 = 4$. Si la completem amb 2, obtenim el contingut que $2 + 3 = 4$. És visible que ' $x + 3$ ' no expressa un concepte. Si completem la funció amb 1, no obtenim el contingut d'un possible judici, sinó el nombre 4. Paral·lelament podem veure que la funció expressada per

x és un planeta

és un concepte que per l'argument Venus dóna el valor que Venus és un planeta (un contingut d'un possible judici). No així la funció expressada per

el pare de x

que per l'argument Alexandre Magne ens dóna com a valor Filip de Macedònia, una persona i per tant un objecte, però no un objecte d'un possible judici. Aquesta funció no és un concepte. Sí que ho serien les funcions expressades per ' x és alt' o ' x és més alt que y '; aquest últim, un concepte relacional amb dos llocs argumentals. Veiem ara com la noció de concepte de Frege s'aproxima a l'esperada que faria de 'alt', 'planeta', o 'més alt que' expressions conceptuais. Frege afegeix la concepció funcional i per aquest motiu inclou sempre una variable en l'expressió d'un concepte. Un concepte és

una entitat incompleta, que se satura amb l'afegiment d'arguments i lliura valors, continguts de possibles judicis.

Els conceptes tenen, o millor poden tenir, caràcter predicatiu. Dins d'un contingut jutjable poden fer el paper del que en podríem dir predicats lògics, allò que es diu de quelcom, com per exemple ser alt al contingut que 'Michael Jordan és alt'. Però alhora els conceptes poden prendre el paper complementari, de subjectes lògics, i ser allò del que es diu quelcom, com quan diem que 'ser alt és bo per a un jugador de bàsquet'. Aquí el concepte expressat per '() és bo per a un jugador de bàsquet' pren com a argument el concepte que apareix com a funció al contingut expressat per 'Michael Jordan és alt', és a dir el concepte expressat per 'x és alt'. S'escau, doncs, que com a funcions els conceptes poden rebre com a arguments no només objectes, sinó també altres funcions (conceptes en aquest cas). Seran, doncs, conceptes de segon ordre o grau. Tot el que hem dit sobre la jerarquia de funcions val també per a aquestes funcions particulars, els conceptes.

Els conceptes són així funcions i, per tant, radicalment, essencialment, diferents dels objectes. Tot i així, Frege insisteix que els conceptes són *objectius*. Cal no veure aquí cap lligam amb la noció *objecte*. Que el concepte sigui objectiu (*objectiv*) vol dir que és una entitat autònoma i independent de tot subjecte, que no ve a l'existència en ser concebut i que el seu ésser no és psicològic (contra la noció més corrent de *concepte*). Tot això no fa el concepte, amb la seva incompletesa essencial, menys diferent de l'objecte (*Gegenstand*), essencialment complet, saturat. L'objectivitat dels conceptes porta a Frege a no distingir en la seva manera de parlar entre 'concepte' i ' propietat'. Si bé en fer-ho també fa un ús peculiar de la noció *propietat* que fa propietat d'una cosa tot allò que en podem dir. És una propietat del meu ordinador que va ser venut per 240.000 PTA, per exemple.

Els conceptes fan el paper dels universals i gaudeixen de la situació ontològica de les idees platòniques. Davant d'aquestes, tanmateix, tenen l'enorme avantatge de no caure víctimes del famós argument del tercer home. Els conceptes no s'apliquen a ells mateixos, sinó només a altres conceptes d'un ordre inferior. La jerarquia funcional dels conceptes ho impedeix.

Frege anomena els conceptes i objectes 'continguts no jutjables'. Tant conceptes com objectes gaudeixen d'existència autònoma i independent i no depenen d'un subjecte que els concebi. La humanitat ha necessitat molt d'esforç a través de generacions per arribar al concepte de *logaritme*, però aquest concepte no és fruit de l'esforç, sinó que n'és anterior o, millor, independent. Aquest platonisme no treu que entre continguts i conceptes la prioritat lògica la dugui el contingut i això queda reflectit en la metàfora de la insaturació. Un concepte és una possibilitat permanent de descomposició de continguts jutjables. En aquest punt, Frege segueix Kant, que considerava que el judici era la noció prioritària i que l'únic ús que l'enteniment podia fer dels conceptes era usar-los en judicis. Més enllà de Kant, tanmateix, Frege obté de la prioritat del judici un mecanisme de formació de conceptes molt més potent que l'abstraccionisme clàssic. Donat un contingut, només cal extreure'n un objecte (o més) per obtenir una entitat insaturada, un concepte de primer ordre. Si s'extreu del contingut un concepte, obtindrem un concepte de segon ordre. Per exemple, del contingut expressat per

Jordi i Amín són amics,

podem obtenir el concepte de primer ordre expressat per 'Jordi i x són amics'. És visible que podem així obtenir conceptes de complexitat lògica extrema, tan gran com la que un contingut pugui arribar a tenir.

L'anàlisi de continguts en conceptes i objectes pren el lloc de l'anàlisi clàssica, que prové d'Aristòtil i que descompon clàssicament el judici en subjecte i predicat, lligats per una còpula en l'esquema clàssic *S és P*. Aquesta última anàlisi és deutora, però no coincident, amb la gramatical. *S* i *P* són conceptes, no necessàriament sintagmes nominals complets. Així, al judici (o contingut, si observem la separació de Frege) que expressa 'tots els homes són mortals', *S* seria el concepte *home* i *P* el concepte *mortal*. El judici tindria una forma, que el faria universal afirmatiu, i que es reflectiria en les expressions 'tots els' i 'són'.

L'anàlisi funcional de Frege presenta diversos avantatges davant l'anàlisi clàssica. En primer lloc, la sola admissió de conceptes relacionals fa que puguem descompondre el contingut que Jordi estima Roser en tres components: Jordi, Roser (objectes) i el concepte expressat per '*x estima y*', i pot d'aquesta manera tenir presents les relacions lògiques que hi ha entre aquest contingut i d'altres com el contingut que Roser odia Adolfo. D'aquests dos es desprèn lògicament, per exemple, que hi ha algú tal que Jordi l'estima i que odia Adolfo. Certes relacions són més íntimes. Entre els continguts expressats per 'Jordi estima Roser' i 'Roser és estimada per Jordi' no hi ha cap diferència, car poden ser substituïts en tota inferència sense alterar-ne la correcció. La lògica clàssica hi troba dos continguts no tan sols diferents, sinó fins i tot desconnectats. Perd, doncs, els lligams lògics i multiplica els continguts innecessàriament. Així s'explica que, com els lògics denunciaven durant el segle XIX, les inferències més elementals quedessin inexplicades per la lògica aristotèlica. L'anàlisi de Frege en funció i arguments trenca amb èxit una tradició lògica de dos mil·lennis.

Frege considera aquests resultats com la mostra d'un alliberament de la lògica en relació amb la gramàtica (i també de la psicologia) en la mesura que les diverses contingències gramaticals dels llenguatges indoeuropeus (o potser de tots els llenguatges, si Chomsky té raó), resultat de la diversa barreja de factors psicològics, sociològics i històrics no afecten l'anàlisi del contingut. La distància respecte a la gramàtica es mostra també en el paper que l'anàlisi de Frege assigna a la còpula gramatical, indispensable a la lògica clàssica, on complia el doble paper d'expressar tant la inherència que lligava subjecte i predicat com l'asseveració. Res més enllà dels conceptes mateixos és responsable de la inherència en l'anàlisi de Frege. Els conceptes són incomplets essencialment. Necessiten un argument per obtenir la completesa i lliurar un contingut. En conseqüència tot concepte té un o més llocs buits i Frege expressa el fet incorporant tant una variable com la còpula a l'expressió del concepte. Així, el concepte que trobem en l'anàlisi del contingut que 'Michael Jordan és alt' no l'expressem per 'alt', sinó per '*x és alt*'. L'altra funció, la indicació de l'asseveració, no forma part del contingut, segons Frege. Continua sent expressada en l'escriptura conceptual, però a part, mitjançant un símbol especial, la barra del judici.

D'aquesta anàlisi del contingut jutjable en deriva una semàntica de l'enunciat que l'expressa i que explota la correspondència imperfecta entre els dos, que és en essència la que Frege mantingué, completada amb la distinció entre sentit i referència. En l'enunciat trobem noms, que hi estan en lloc d'objectes, i expressions conceptuais o predicats, que hi estan en lloc de conceptes. Frege diu també d'aquestes expressions que són insaturades, ja que contenen una variable que no és una expressió que anomeni i que cal substituir per un nom per obtenir una expressió completa, un enunciat. La categoria *nom* és més àmplia que la que considerem habitualment. Són noms tant 'José Maria Aznar López', un nom propi, com 'l'actual president del govern espanyol', que és el que anomenaríem una descripció definida. També, com que els continguts jutjables són objectes, podem considerar els enunciatos noms, noms de continguts jutjables. Hi pot haver noms que no anomenin o no anomenin únicament (que és una manera de no anomenar res), com ara 'el campió mundial d'escacs nascut

a Badalona' o 'l'any que el Real Madrid va guanyar la copa d'Europa'. Aquests noms no haurien d'existir en un llenguatge perfecte i la seva existència és un problema per conduir investigacions lògiques en llenguatge natural. Notem que, segons Frege, els enunciats que els contenen no expressen (anomenen) cap contingut jutjable. 'El campió mundial d'escacs nascut a Badalona té sinusitis' no expressa cap contingut jutjable, ja que el concepte expressat per 'x té sinusitis' no rep cap argument i no pot lliurar cap valor.

Es pot desitjar una anàlisi més fina que distingeixi, dins dels sintagmes, entre adjectius, adverbis, etc. El mètode funcional permet oferir-la i així ho fa Richard Montague i les semàntiques que segueixen poc o molt els camins que aquest va obrir (el gruix de la semàntica contemporània) i que són essencialment fregeans. Aquests desenvolupaments, tanmateix, no es veuran en aquest curs.

Veurem de seguida que aquesta anàlisi permet una comprensió adequada de la quantificació. Pot també explicar el funcionament de les connectives lògiques (les expressades per 'i', 'o', 'no', 'si... llavors', 'si i solament si'). Aquestes són també conceptes, funcions que donen com a valors continguts jutjables, però a partir d'arguments que són també continguts jutjables. Així, el concepte expressat habitualment per 'no' pren un contingut jutjable com a argument, per exemple, que Michael Jordan és alt, i dóna un altre contingut com a valor, que Michael Jordan no és alt. El concepte expressat habitualment per 'i' pren dos arguments, continguts jutjables. Si aquests són que Michael Jordan és alt i que Jordi Pujol és baix, obtenim com a valor el contingut jutjable que Michael Jordan és alt i Jordi Pujol és baix. Les altres connectives funcionen de manera similar. L'anàlisi funcional és capaç, doncs, d'explicar dins d'una mateixa concepció que les supera dues parts de la lògica que semblaven irreductiblement separades: la sil·logística aristotèlica i la lògica proposicional estoica.

2.5. La quantificació

Com hem vist, la lògica derivada d'Aristòtil tractava els judicis com ara l'expressat per

tots els gats són felins

assimilant-los a l'esquema $S \text{ és } P$ on S era el concepte *gat*, P el concepte *felí* i a més a més la forma del judici era universal afirmativa. Diverses formes de judicis combinaven els tipus universal i particular amb l'afirmació i la negació. Hem vist ja algunes limitacions d'aquest tipus d'anàlisi. Podem ara mostrar-ne una altra. Considerem l'enunciat

(5) Tots els alumnes de la facultat admiren un filòsof.

Es fàcil veure que l'enunciat (5) és ambigu. Es pot entendre que afirma que és el cas que tot alumne admira un filòsof i aquest és el mateix per tots, per exemple Kant, o que cada alumne admira un filòsof, però cadascun el seu: un admira Kant, un altre Frege, un altre Nietzsche, etc. És clar que aquests dos continguts que pot expressar el mateix enunciat no són equivalents. El contingut que expressa (5) si l'entendem de la primera manera implica l'altre, però no a l'inrevés. El seu paper en les inferències lògiques és, per tant, diferent. Si li afegim les premisses següents

Jordi i Alí són alumnes.

Jordi admira tan sols Kant.

Podem concloure

Alí admira Kant

només si entenem l'enunciat (5) segons la primera interpretació, no si l'entenem segons la segona. Però, com expliquem aquesta doble interpretació des de dins de la concepció aristotèlica clàssica? En els dos casos tenim un subjecte i un predicat i aquests semblen ser els mateixos. És clar que el llenguatge natural posseeix recursos variats per desambiguar l'enunciat. Nosaltres ho hem fet amb tota naturalitat en l'explicació anterior. Però aquests recursos són múltiples i variats i no es presten a sistematització. Sembla que no podem encapsular aquesta distinció de contingut utilitzant l'esquema S és P .

El problema és palesament independent dels predicats i relators utilitzats. Es torna a donar si en lloc de 'alumne de la facultat', 'filòsof' i 'admira' hi posem 'espanyol', 'dona' i 'estima'.

Tot espanyol estima una dona.

Presenta el mateix tipus d'ambigüitat que (5), de la mateixa manera que es troba en tots aquells casos que presenten el que ara, amb la claredat retrospectiva que ens han donat les eines de Frege, anomenem generalització múltiple, és a dir, la situació en què un quantificador cau dins de l'àmbit d'un altre. Es pot provar, tot i que no ho farem aquí, que el problema no es presenta en un llenguatge sense relators i aquest fet va fer, tal vegada, considerar la situació menys punyent per alguns lògics d'arrel aristotèlica. En qualsevol cas, abans de Frege no s'havia pogut oferir una explicació general de la lògica que governava aquestes situacions. Tot i usar eines subtils i complexes en els diversos intents de solució, com les diverses teories medievals de la *suppositio*, no es va aconseguir aclarir el problema ni des del punt de vista sintàctic, que suposaria la caracterització adequada de les inferències correctes en aquests casos, ni des del semàntic, és a dir, l'explicació de les condicions de veritat dels diversos continguts expressats pels enunciats que presenten generalització múltiple. La situació era insatisfactòria teòricament per raons òbvies i demanava remei urgent per Frege, que necessitava explicitar i justificar clarament les inferències lògiques vàlides si volia provar la tesi logicista. Darrera les intuïcions que justificaven inferències no codificades formalment podien introduir-se tota mena de pressuposicions que convertissin en trivial una deducció de les lleis de l'aritmètica a partir de principis purament lògics. Finalment, la falta de claredat en aquesta ambigüitat presentava conseqüències pràctiques negatives. La història de la filosofia està plena de fal·làcies atribuïbles a la confusió que generen els casos de generalització múltiple, incloent-hi una de famosa en el començament de l'*Ètica a Nicòmac* d'Aristòtil, el pare de la Lògica. Frege, doncs, va resoldre un autèntic problema. El va resoldre completament i de tal manera que els que hem rebut formació lògica després no som conscients, si no és a través de la indagació històrica, que hi pugui haver aquí un problema en absolut. Es pot considerar la solució de Frege un cas nítid d'un fenomen l'existència del qual es posa molt sovint en dubte: el progrés filosòfic.

La solució de Frege utilitza les mateixes eines que ja coneixem: l'anàlisi del contingut en funcions i arguments, en conceptes i tal vegada objectes. Considerem el contingut expressat per

(6) tots els homes són mortals.

Podem pensar que el que s'expressa és l'atribució a tots els homes del concepte expressat per ' x és mortal'. Si, per fer-nos momentàniament les coses fàcils,

considerem que tenim entre mans un univers (tot allò de què parlem i podem parlar) d'homes, tindrem que podem considerar que (6) expressa el mateix contingut que

per tot x , x és mortal.

Clarament, ' x és mortal' és una expressió conceptual i el concepte expressat és de primer ordre. Què expressa ara 'per tot x '? Per saturar el concepte necessitem aparentment un objecte, però quin? Se'ns poden acudir diverses opcions que hem de descartar. L'objecte en qüestió no és el conjunt dels homes, ja que (6) no diu que el conjunt dels homes és mortal. L'agregat dels homes es comporta pitjor encara, suposant que es pogués formar: la mortalitat és atribuïda a cada home per separat. Una nova possibilitat la dóna veure que a (6) no es parla de cap home en concret. Podem, doncs, pensar que la mortalitat és predicada d'un home indeterminat o indefinit. Tanmateix, l'aparent correcció d'aquesta afirmació queda en no res quan veiem que es tracta només d'una manera de parlar. Un home indeterminat no és un objecte. No es pot pensar que hi ha dues classes d'homes, els determinats i els indeterminats. Si té cap sentit dir-ho, d'homes només n'hi ha de determinats.

Esgotades les diverses possibilitats d'objectes, només podem fer una cosa d'acord amb l'anàlisi funcional: considerar que 'per tot x ' expressa no un objecte, sinó un concepte de segon ordre. Així, no saturaríem el concepte de primer ordre amb un objecte, sinó aquest de segon ordre amb el de primer ordre. Aquesta és la solució de Frege. El concepte expressat per 'per tot x ' és un concepte de segon ordre, per tant amb un lloc argumental que cal omplir amb un concepte de primer ordre, i que podem expressar com

el concepte c és tal que sigui quin sigui l'objecte que hi introduïm, obtenim com a valor un contingut jutjable vertader.

Aquest és el concepte quantificador universal, el que expressa 'per tot x '. Aplicat al nostre exemple, 'per tot x , x és mortal' diu que el concepte que expressa ' x és mortal' és tal que dóna un contingut jutjable vertader per qualsevol argument (això és, home) que puguem introduir-li; això és, que tots els homes són mortals.

Podem eliminar ara la restricció que ens hem concedit de considerar un univers d'homes. L'univers inclourà ara tots els objectes. Seguint la concepció vista, quin és el concepte de primer ordre que compleix que en entrar com a argument del concepte de segon ordre quantificador universal s'obté com a valor d'aquest últim el contingut que tots els homes són mortals? Examinem-ho. Si tots els homes són mortals, serà veritat de qualsevol objecte que o bé no és un home o bé és mortal. Així, el concepte expressat per ' x no és un home o x és mortal' és aquell que dóna un contingut jutjable vertader en ser completat per qualsevol argument. El contingut expressat per 'tots els homes són mortals' pot expressar-se com

per tot x , x no és home o x és mortal,

o, en el nostre equivalent contemporani de *Begriffsschrift*,

$$\forall x (\sim Hx \vee Mx),$$

que equival òbviament a

$$\forall x (Hx \rightarrow Mx),$$

que és el que tot estudiant actual aprèn com a codificació adequada de (6).

Notem que Frege capgira la posició lògica tradicional. Allí calien dos conceptes per constituir un judici generalitzat bàsic. L'universal afirmatiu seguia l'esquema *tots els A són B*, amb dos conceptes, *A* i *B*. Si no es disposava de dos conceptes, com succeïa si es volia jutjar que tot és material, apareixia un cas especial, degenerat, que se solucionava amb un concepte comodí, com per exemple *objecte*. El judici anterior s'expressaria com 'tot objecte és material'. Per Frege, en canvi, el cas degenerat és el fonamental i els altres es tracten de la mateixa manera simplement amb conceptes de primer ordre que poden ser més complicats.

El que hem fet amb el quantificador universal pot alterar-se adequadament a fi d'introduir-hi el quantificador existencial. El contingut expressat per

hi ha cignes negres

pot desfer-se en

hi ha x (tal que) x és cigne negre,

on el quantificador existencial que expressa 'hi ha x ' (a la notació actual de primer ordre ' $\exists x$ ') és un concepte de segon ordre que diu

El concepte c és tal que almenys un objecte argument dóna com a valor en introduir-lo un contingut jutjable vertader.

Frege analitza d'aquesta manera la noció d'existència, que passa a ser així un concepte de segon ordre, aplicable a conceptes de primer ordre i no a objectes, una propietat de conceptes de primer ordre que no pot ser mai una característica component seva. Això invalida l'argument ontològic, que segons algunes versions presentaria la noció d'existència com a característica o concepte constituent del concepte *Déu*.

Finalment, cal notar que és una novetat per part de Frege la introducció en la seva escriptura conceptual d'un dispositiu vital per a una expressió adequada de la quantificació que serà clau en l'anàlisi de la ambigüitat dels enuncisats que presenten quantificació múltiple: la indicació del lloc quantificat mitjançant el recurs d'indicar la variable quantificada. Això permet distingir entre el concepte expressat per ' $\forall x x \geq y$ ' i l'expressat per ' $\forall y x \geq y$ '. En ambdós casos tenim una variable lliure, un forat on introduir arguments, i per tant un concepte (de primer ordre). Però els llocs argumentals són diferents i així ho són també els conceptes. Si considerem un univers de nombres naturals, el primer concepte és el de *ser més petit que cap altre nombre*, concepte sota el qual cau el nombre zero. El segon és el de *ser més gran que cap altre nombre*, sota el qual no hi cau res.

La quantificació múltiple es deixa analitzar còmodament ara. Es tracta d'aconseguir una notació que expressi clarament i sistemàtica els dos continguts expressats per (5) de la mateixa manera que podem fer-ho amb oracions com ara

en aquesta discoteca hi vénen nois i noies molt joves.

Clarament en aquest cas la diferència està en el sintagma nominal 'nois i noies molt joves', que pot ser entès com si estigués constituït pel sintagma nominal 'nois i noies' i el sintagma adjectiu 'molt joves' com a components o bé compost pel sintagma nominal 'nois', la conjunció 'i' i el sintagma nominal 'noies molt joves'. La diferència és, doncs, d'estructura sintàctica, i la podem expressar en un cas com a

[[nois i noies]_{SN}[molt joves]_{SA}]_{SN}

i en l'altre com a

[[nois]_{SN} [i]_{CONJ} [noies molt joves]_{SN}]_{SN}

seguint la manera estàndard d'expressió en gramàtica generativa (un arbre sintàctic seria una forma equivalent d'expressar el mateix). En el nostre cas les coses són diferents, ja que no sembla que ens trobem amb una ambigüitat de tipus sintàctica. El que ens cal és fer visible la diferència en l'estructuració del contingut mitjançant una notació que faci palesa el que podríem considerar la seva *història lògica*.

Vegem-ho amb un exemple més simple que (5), però que conté tota la complexitat necessària per explicar el que succeeix. Analitzem els continguts expressats per l'enunciat

(7) tothom estima algú

i considerem (com abans, per simplificar) un univers de persones. Suposem que aquest univers de persones està format pels individus *A, B, C, D, E*. Òbviament, si en comptes de cinc individus n'hi ha sis mil milions, la complexitat conceptual no varia. Només caldria considerar més casos. Els dos continguts que (7) pot expressar corresponen a dues situacions diferents. La primera correspon a una situació (S1) on es dona, per exemple:

(S1) *A* estima *B*
 B estima *B*
 C estima *B*
 D estima *B*
 E estima *B*.

Així, doncs, tothom estima algú, a saber, *B*. L'altra situació (S2) podria ser així:

(S2) *A* estima *B*
 B estima *C*
 C estima *B*
 D estima *A*
 E estima *E*.

En aquesta situació tothom estima algú, però aquest algú no és el mateix en tots els casos. Vist això, podem mostrar la història lògica de la formació de cadascun dels dos continguts. De la situació (S1) podem passar a dir que tothom estima *B* i d'aquí que tothom estima algú. De la situació (S2) podem passar tan sols a dir que

A estima algú,
B estima algú,
C estima algú,
D estima algú,
E estima algú.

Per tant, *tothom* estima algú, ja que *A, B, C, D* i *E* són tothom. Tenim dues històries lògiques diferents que ens porten a continguts que podem expressar amb la mateixa seqüència lineal de paraules. El que necessitem és una notació que reflecteixi aquesta història que l'ordre lineal amaga. El *Begriffsschrift* de Frege o la notació lògica de primer ordre que usem actualment ens ofereixen aquesta notació. Tornem a refer la història lògica armats de l'anàlisi de Frege i la notació que l'expressa.

De la situació (S1), podem passar a

$$\forall x (x \text{ estima } B),$$

ja que sigui quin sigui l'argument, el concepte expressat per 'x estima B' dona com a valor un contingut jutjable vertader. Però d'aquí podem arribar a

$$\exists y (\forall x (x \text{ estima } y)),$$

ja que la situació és tal que el concepte expressat per ' $\forall x (x \text{ estima } y)$ ' és tal que almenys un argument (a saber, B) en ser introduït fa que el concepte doni com a valor un contingut vertader.

D'altra banda, de la situació (S2) podem passar als enunciats

$$\exists y (A \text{ estima } y),$$

$$\exists y (B \text{ estima } y),$$

$$\exists y (C \text{ estima } y),$$

$$\exists y (D \text{ estima } y),$$

$$\exists y (E \text{ estima } y),$$

ja que, en el primer cas, el concepte expressat per 'A estima y' és tal que almenys un argument (B) permet obtenir un contingut vertader. El mateix succeeix amb el concepte que expressa 'B estima y', que és tal que almenys un objecte, C, dona un contingut vertader en entrar com a argument. De manera similar, amb els altres tres enunciats. Llavors tindrem que

$$\forall x (\exists y (x \text{ estima } y)),$$

ja que el concepte expressat per ' $\exists y (x \text{ estima } y)$ ' és tal que sigui quin sigui l'argument introduït s'obté un contingut jutjable vertader com a valor. Tenim, doncs, dos enunciats,

$$\exists y (\forall x (x \text{ estima } y))$$

i

$$\forall x (\exists y (x \text{ estima } y))$$

que expressen els dos continguts que ambigüament expressa 'tothom estima algú'. En el cas que deixem de banda la restricció d'univers, l'anàlisi pot ser més complicada, però conceptualment igual. Els dos continguts expressats per 'tot estudiant de filosofia admira un filòsof' poden expressar-se com a

$$\forall x (Ex \rightarrow (\exists y (Fy \wedge Axy)))$$

i

$$\exists y (Fy \wedge \forall x (Ex \rightarrow Axy)).$$

Deixarem l'anàlisi com a exercici.

• EXERCICIS

Exercici 1: (després d'haver llegit la secció 3.2. **Els continguts jutjables**) Presenteu i avalueu els arguments de Frege contra la tesi que l'objecte del judici és una idea o representació (*Vorstellung*) mental.

Exercici 2: (després d'haver llegit la secció 3.2. **Els continguts jutjables**) Discutiu si els enunciats 'Aznar és més alt que Pujol' i 'Pujol és més baix que Aznar' expressen o no el mateix contingut jutjable.

Exercici 3: (després d'haver llegit la secció 3.3. **Funcions i objectes**) Presenteu exemples propis de funcions de primer i de segon ordre.

Exercici 4: (després d'haver llegit la secció 3.4. **L'anàlisi funcional dels continguts jutjables**) Formeu diversos conceptes a partir del contingut jutjable expressat per l'enunciat 'Fraga i Pujol són els presidents més vells de comunitats autònomes d'Espanya' i discutiu-los intuïtivament.

Exercici 5: (després d'haver llegit la secció 3.4. **L'anàlisi funcional dels continguts jutjables**) Analitzeu funcionalment (identifiqueu els objectes i les funcions amb el seu ordre) el contingut jutjable expressat per l'enunciat 'Si Maria estima Joan, aquest és molt afortunat'.

Exercici 6: (després d'haver llegit la secció 3.5. **La quantificació**) Supposeu que l'enunciat 'tots els convidats no van venir a la festa' té dues possibles lectures (tot i que es pot defensar que no). Segons una lectura l'enunciat expressaria que cap convidat no va venir; segons l'altra, que alguns no van venir. En poques paraules la diferència és la que hi ha entre 'no tots' i 'tots no'. Analitzeu funcionalment (identifiqueu els objectes i les funcions amb el seu ordre) els continguts jutjables que expressa l'enunciat en cada lectura.

Exercici 7: (després d'haver llegit la secció 3.5. **La quantificació**) Analitzeu funcionalment els dos continguts jutjables que pot expressar l'enunciat 'tot estudiant de filosofia admira un filòsof'.

• REFERÈNCIES

• BREU BIBLIOGRAFIA COMENTADA:

Nivell elemental:

- Acero, Juan José , *Filosofía y análisis del lenguaje*, Cincel, Madrid, 1985. Cap. 2.
Coffa, Alberto , "Invitación a la lectura de Frege", a *Revista Latinoamericana de Filosofía*, IX, 1983.
Kenny, Anthony , *Introducción a Frege*, Cátedra, Madrid, 1997. Caps. 1-6.
Wedberg, Anders , *A History of Philosophy*, Oxford U.P., Oxford, 1984., vol III. Cap. III.
Frege, Gottlob , "¿Qué es una función?," a *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*, Tecnos, Madrid, 1998.
Valdés Villanueva, Luis M., "Introducción," a FREGE, *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*, Tecnos, Madrid, 1998.
Dummett, Michael, "Frege", a *The Encyclopedia of Philosophy*, EDWARDS (ed.), Macmillan & Free Press, New York, 1967.
Frege, Gottlob , "Fundamentos de la Aritmética," a *Escritos filosóficos*, Crítica, Barcelona, 1996. §§ 53-54.

Nivell no elemental:

- Garcia-Carpintero, Manuel , *Las palabras, las ideas y las cosas*, Barcelona, Ariel, 1996. cap. 3.
Dummett, Michael, *Frege: Philosophy of Language*, Duckworth, London, 1981. Cap 2.
Baker, G.P. & Hacker, P.M.S., *Frege: Logical Excavations*, Oxford, Oxford U.P., 1984. Caps. 2-7.
Frege, Gottlob , *Conceptografía*, México, UNAM, 1972.

• LLOCS WEB:

Entrada a *The Internet Encyclopedia of Philosophy*:

<http://www.iep.utm.edu/f/frege.htm>

Entrada a la *Stanford Encyclopedia*:

<http://plato.stanford.edu/entries/frege/>

Referències de Frege (llibres, cites, articles...):

<http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Frege.html>

Cronologia de les obres de Frege i informació biogràfica:

<http://www.ocf.berkeley.edu/~brianwc/frege/>

Bibliografia i exposició de les principals aportacions de Frege:

<http://sowi.iwp.uni-linz.ac.at/Dialog/DT/Fregerib/Frege0.html>