Notas de Geometría Algebraica

curso impartido por el Prof.Enrique Arrondo

escritas por Simone Marchesi

Università degli Studi di Milano - simone.marchesi@unimi.it

Universidad Complutense de Madrid - smarches@mat.ucm.es

Estas notas están basadas en el curso de Geometría Algebraica impartido por el Profesor Enrique Arrondo Esteban en el año académico 2009/2010. La principal referencia está dada por los primeros tres capítulos del libro "Algebraic Geometry" de Robin Hartshorne.

Preliminares

Vamos a ver las nociones y los fundamentos que necesitaremos por el estudio de este curso.

Definición 1 *Se llama conjunto projectivo a un subconjunto $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ definido por polinomios (homogéneos) en $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$.*

Nuestro objetivo será definir variedades abstractas y estudiar sus posibles inmersiones como conjuntos proyectivos. Para hacer esto usaremos una estructura mas general: el *esquema*.
Vamos a definir una topología que nos guste. Consideramos

$$X \cap \{x_i \neq 0\}, \text{ donde } U_i = \{x_i \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$$

nos da una inmersión "canónica"

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \\ (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) & \to & (x_0 : \ldots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \ldots : x_n) \\ \left(\dfrac{x_0}{x_i}, \ldots, \dfrac{x_{i-1}}{x_i}, \dfrac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_i}\right) & \leftarrow & (x_0 : \ldots : \underbrace{x_i}_{\neq 0} : \ldots : x_n) \end{array}$$

Podemos observar que la intersección $X \cap U_i \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ está definida por polinomios (deshomogenezados de los polinomios que definen X).

Definición 2 *Se llama conjunto afín a un subconjunto de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ definido por polinomios.*

¿Como se define dicho conjunto?
Cogemos un $S \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ y denotamos

$$V(S) = \{p \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \mid f(p) = 0 \;\forall\, f \in S\} \quad \text{CONJUNTO AFÍN}$$

Sea I el ideal generado por S, entonces

$$V(S) = V(I) \overset{(*)}{=} V(\underbrace{\{f_1, \ldots, f_s\}}_{\text{generadores de } I})$$

donde $(*)$ es posible porque $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ es un anillo noetheriano.
Por lo que hemos dicho tenemos la siguiente biyección

$$\{\text{ideales de } \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]\} \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \{\text{conjuntos afines de } \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}\}$$

$$I \longrightarrow V(I) = \{p \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \mid f(p) = 0 \; \forall \, f \in I\}$$

$$I(X) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \mid f(p) = 0 \; \forall \, p \in X\} \longleftarrow X$$

Propiedades:

1) $V(I(X)) = X$

2) $I(V(I)) = \sqrt{I}$ (teorema de los ceros de Hilbert con $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado) (entonces V, I define una biyección entre {ideales radicales de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$} y {conjuntos afines de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$})

3) $\emptyset = V\left(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]\right), \quad \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = V(0),$
$V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 I_2) = V(I_1 \cap I_2), \quad \bigcap_i V(I_i) = V(\sum_i I_i)$

Definición 3 *Se llama topología de Zarinski en $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ la topología cuyos cerrados son los conjuntos afines.*

Observamos que la construcción es mas o menos la misma por el proyectivo.
Los conjuntos $D(f) = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \setminus V(f)$, con $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, forman una base de la topología de Zarinski.
Vale la siguiente equivalencia

$$p \in U \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}, \text{ con } U = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \setminus V(I), \text{ que significa } p \notin V(I) \iff \exists\, f \in I \text{ t.q. } f(p) \neq 0$$

$$\implies p \in D(f) \subset U.$$

Esto nos permite de construir una aplicación, que significa el pasaje a una dimensión mas grande

$$\begin{array}{ccc} D(f) & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \left(x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \ldots, x_n)}\right) \end{array}$$

donde

$$\operatorname{Im} i = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}} \mid x_{n+1} f(x_1, \ldots, x_n) - 1 = 0\right\}.$$

Seguimos con la propiedades

4) $I(\emptyset) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *(¿tiene que ser algebraicamente cerrado?)*
$I(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = 0$ si $\mathbb{K}$ en un cuerpo infinito
$I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$
$I(X_1 \cap X_2) \supset I(X_1) + I(X_2)$ no tiene porque ser igual

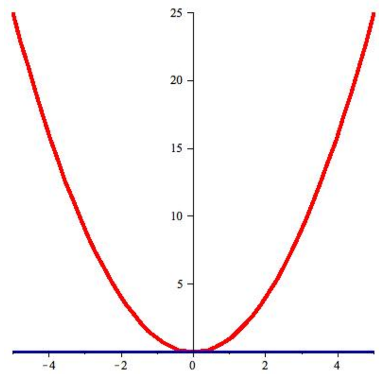

Figura 1:

Ejemplo

$$\begin{array}{rcl} X_1 = V(y) & & X_2 = V(y-x^2) \\ I(X_1) = (y) & & I(X_2) = (y-x^2) \\ I(X_1 \cap X_2) = (x,y) & \neq & (x^2,y) = I(X_1) + I(X_2) \end{array}$$

Podemos observar que

$$\begin{aligned} f \in I(X_1, X_2) \quad &\Leftrightarrow \quad f(0,0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f \text{ no tiene término independiente.} \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} f \in I(X_1) + I(X_2) \quad &\Leftrightarrow \quad f \text{ no tiene término independiente ni término lineal} en \text{x}, \\ &\Leftrightarrow \quad f = ay + bx^2 + cxy + dy^2 + \dots \end{aligned}$$

En el caso que $f \in I(X_1) + I(X_2)$, $V(f)$ es una curva que pasa por el punto $(0,0)$ con tangente $y = 0$. El ideal tiene la información del punto y de la tangente.
Vamos a dar una estructura que conserve todas la informaciones, y vamos a construir tal estructura.
Queremos definir la noción de *función regular* sobre un conjunto afín $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Vamos a dar dos definiciones distintas y luego comprobaremos que las dos son equivalentes.

Definición 4 **i)** $\varphi : X \to \mathbb{K}$ *como aplicación definida por un polinomio*

ii) $\varphi : X \to \mathbb{K}$ *aplicación tal que* $\forall\, p \in X,\ \exists\, U$ *abierto y* $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ *de forma que* g *no se anule en ningún punto de* $X \cap U$ *y*

$$\varphi(q) = \frac{f(q)}{g(q)} \quad \forall\, q \in X \cap U.$$

Demostración que las dos opciones son equivalentes:

- $i) \Rightarrow ii)$ es trivial,

- $ii) \Rightarrow i)$
$\forall p \, \exists D(h)$ abierto, con $p \in D(h)$, y f, g tal que $\varphi(q) = \frac{f(q)}{g(q)}$ $\forall q \in X \cap D(h)$. Observamos que $p \in D(g)$ por definición de función regular (la segunda). Entonces se puede escribir
$$\varphi(q) = \frac{f(q)}{g(q)} = \frac{f(q)h(q)}{g(q)h(q)} \quad \Longrightarrow p \in D(gh).$$
Quiero decir que puedo escribir $X = \bigcup_i X \cap D(g_i)$ (significa que puedo elegir los abiertos en función de las representaciones de la función regular). Tenemos entonces
$$\varphi_{|X \cap D(g_i)} = \frac{f_i}{g_i} \iff \varphi \overline{g}_i = \overline{f}_i \text{ en } X \cap D(g_i),$$
donde las rayas arriba de f y g significa que estoy considerando la APLICACIÓN definida por el polinomio.
Tenemos que
$$V\left(I(X) + \sum_i (g_i)\right) = X \cap V(\{g_i\}) = \emptyset$$
que significa
$$1 \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] = I(\emptyset) = \sqrt{I(X) + \sum (g_i)}$$
observamos que si el 1 pertenece al radical de un ideal, entonces pertenece al ideal, porque las potencias del 1 son el 1 mismo, entonces
$$1 \in I(X) + \sum (g_i) \iff 1 = \underbrace{h}_{\in I(X)} + \underbrace{\sum h_i g_i}_{*},$$
donde el $*$ significa que en la topología que he construido cualquier cosa es compacta.
Tenemos que $\varphi = \underbrace{\overline{h}\varphi}_{=0} + \sum \bar{h}_i \overline{g}_i \varphi = \sum \bar{h}_i \overline{g}_i$ esta definido por un polinomio.

Explicamos la notación
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] & \xrightarrow{\psi} & \{\varphi : X \to \mathbb{K}\} \\ f & \mapsto & \bar{f} \end{array}$$
donde $\text{Ker}\psi = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \mid \forall \, p \in X, f(p) = 0\}$.
En esta manera podemos definir
$$\mathcal{O}(X) = \{\text{funciones regulares } X \to \mathbb{K}\} \simeq \frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{I(X)}$$

Tenemos, para cada $p = (a_1, \ldots, a_n) \in X$, que

$$(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) = I(p) \supset I(X) \tag{1}$$

y siendo $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado, el teorema de los ceros de Hilbert nos dice que todos los ideales maximales son de la forma (1), los que corresponden a un punto, entonces podemod obervar que

$$\frac{I(p)}{I(X)} \text{ es un ideal maximal de } \mathcal{O}(X)$$

y tenemos una biyección

$$\{\text{ideales maximales de } \mathcal{O}(X)\} \longleftrightarrow X.$$

Hemos llegado a la idea intuitiva de esquema afín: tomamos como objeto X y como $\mathcal{O}(X)$ algún $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ cociente un I tal que $I = V(X)$, i.e. $\mathcal{O}(X) = \frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{I}$.
Volvemos al ejemplo de antes:

$$X = \{(0,0)\} \quad \mathcal{O}(X) = \frac{\mathbb{K}[x,y]}{(x^2, y)},$$

esquema con soporte el punto $(0,0)$ que corresponde al punto con dirección tangente horizontal.

Definición 5 (intuitiva) *ESQUEMA AFÍN es lo mismo que dar $I \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, y*

$$X = V(I) \text{ soporte del esquema}$$

$$\frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{I} \text{ funciones regulares del esquema.}$$

Con la teoría de esquemas TODO FUNCIONA:

$$\begin{aligned} \text{si tengo dos esquemas} &\longleftrightarrow I_1, I_2 \\ \text{Unión} &\longleftrightarrow I_1 \cap I_2 \\ \text{Intersección} &\longleftrightarrow I_1 + I_2 \end{aligned}$$

no necesitamos mas el radical, esta bien así.
Volvemos siempre al ejemplo de antes

$$\begin{array}{lcl} \text{Esquema} & X_1 & \dfrac{\mathbb{K}[x,y]}{I(X_1)} \\ & I(X_1)=(y) & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Esquema} & X_2 & \dfrac{\mathbb{K}[x,y]}{I(X_2)} \\ & I(X_2)=(y-x^2) & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Esquema} & X_1 \cup X_2 & \dfrac{\mathbb{K}[x,y]}{I(X_1)\cap I(X_2)} = \dfrac{\mathbb{K}[x,y]}{(y(y-x^2))} = \dfrac{\mathbb{K}[x,y]}{I(X_1\cup X_2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Esquema} & X_1 \cap X_2 & \dfrac{\mathbb{K}[x,y]}{(x^2,y)} \simeq \mathbb{K}^2 \simeq \mathbb{K}\oplus\mathbb{K}x \\ & & \text{no es un conjunto afín} \end{array}$$

podemos observar que en el caso de variedades algebraicas, nos había quedado solo el ideal radical relativo al punto de intersección, que nos hubiera hecho perder informaciones, i.e. $\frac{\mathbb{K}[x,y]}{(x,y)} \simeq \mathbb{K}$ en vez que $\mathbb{K}^2$, perdiendo un parámetro.
Hablando en esquemas, definir una función regular $X_1 \cup X_2$, significa definir una función regular en la recta, una función regular en la parábola y dejar que coincidan en el punto de intersección, algebraicamente todo esto esta definido por la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \frac{\mathbb{K}[x,y]}{I_1\cap I_2} \longrightarrow \frac{\mathbb{K}[x,y]}{I_1} \otimes \frac{\mathbb{K}[x,y]}{I_2} \longrightarrow \frac{\mathbb{K}[x,y]}{I_1+I_2} \longrightarrow 0$$

$$\overline{f} \longrightarrow (\overline{f},\overline{f})$$

$$(\overline{g},\overline{h}) \longrightarrow \overline{g-h}$$

Construcción y Propiedades Básicas de los Esquemas

Definición 6 *Dado un anillo A se llama ESPECTRO de A el conjunto*

$$\operatorname{Spec} A = \{\textit{ideales primos de } A\}.$$

Consideramos $A = \dfrac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{I(X)}$, obtenemos la siguiente biyección

$$\{\text{Primos de } A\} \leftrightarrow \{\text{Primos de } \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n] \text{ que contienen a } I(X)\} \overset{(*)}{\leftrightarrow} \{\text{conjuntos irreducibles de } X\},$$

donde (*) esta justificado del hecho que $Y = Y_1 \cup Y_2 \;\Leftrightarrow\; Y = Y_1 \text{ o } Y = Y_2$. Al final tenemos la bijecciones

$$\{\text{Ideales radicales de } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\} \;\leftrightarrow\; \{\text{Conjuntos afines de } \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}\}$$

Propriedades :

- Y es irreducible $\Leftrightarrow I(Y)$ es primo.

- Sea $\mathbb{K}$ arbitrario, si tengo $\mathfrak{M} \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ maximal, entonces por el Teorema de los Ceros $\mathbb{K} \subset \dfrac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{\mathfrak{M}}$ extensión algebraica finita del cuerpo. En caso que $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ entonces la inclusión es un isomorfismo y tengo una igualdad y tengo además que $\mathfrak{M} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$.
  Por ejemplo si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ podemos tener
  1. $\dfrac{\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]}{\mathfrak{M}} \simeq \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \mathfrak{M} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$
  2. $\dfrac{\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]}{\mathfrak{M}} \simeq \mathbb{C} \;\Rightarrow\; \mathfrak{M}$ corresponde a dos puntos imaginarios conjugados.

Sea $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, cogemos $f \in A$ un polinomio visto como función, entonces

$$\mathfrak{M} \in \operatorname{Spec} A \,\text{maximal} \Leftrightarrow \mathfrak{M} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \Leftrightarrow a = (a_1, \dots, a_n),\ f(a) = 0 \Leftrightarrow f \in \mathfrak{M}$$

Definición 7 *Dado un ideal $I \subset A$, entonces*

$$\begin{aligned} V(I) &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \in \mathfrak{p} \;\; \forall f \in I\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid I \subset \mathfrak{p}\} \end{aligned}$$

y al revés

Definición 8 *Dado un subconjunto $X \subset \operatorname{Spec} A$, entonces puedo definir*

$$\begin{aligned} I(X) &= \{f \in A \mid f \in \mathfrak{p} \;\; \forall \mathfrak{p} \in X\} \\ &= \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p} \end{aligned}$$

Entonces un conjunto afín será un conjunto de la forma $X = V(I)$.
Hemos construido entonces nuevas relaciones 1:1 de esta forma

$$\{\text{conjuntos afines de } \operatorname{Spec} A\} \underset{V}{\overset{I}{\rightleftarrows}} \{\text{ideales radicales de } A\}$$

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid I \subset \mathfrak{p}\} = V(I) \longleftarrow I$$

$$X \longrightarrow I(X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}$$

Si X es afín, entonces $V(I(X)) = X$.
Si I es un ideal arbitrario $I(V(I)) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = \bigcap_{I \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{I}$, que significa que el Teorema de los Ceros de Hilbert lo tengo gratis.
Propiedades:

1. $\emptyset = V(A)$, $\operatorname{Spec} A = V(0)$,

2. $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 I_2) = V(I_1 \cap I_2)$,

3. $V(I_1) \cap \cdots \cap V(I_s) = V(\sum I_i)$

Tenemos entonces una Topología de Zarinski, cuya base puede ser dada por $\{D(f) \mid f \in A\}$, donde $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \not\ni f\}$.
Una observación: en este caso tenemos que $I(\operatorname{Spec} A) = IV(0) = \sqrt{0} = \mathfrak{N}$ ideal nilradical, no es cierto que sea el ideal (0), de todas formas vamos a obtener

$$\frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{I} \text{ su nilradical es cero } \iff \sqrt{I} = I.$$

Estamos buscando $\mathcal{O}(\operatorname{Spec}(A)) = A$, que significa que estamos buscando unas buenas funciones regulares.
Observación: $D(f) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \not\ni f\} \leftrightarrow \operatorname{Spec}(A_f)$, donde $A_f = \left\{ \frac{g}{f^n} \mid g \in A, n \geq 0 \right\} = S^{-1}A$ y $S = \{f^n \mid n \geq 0\}$ es un conjunto multiplicativo, podemos observar que hace falta que $f \notin \mathcal{N}$.
Si hay $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, una función $\varphi : X \to \mathbb{K}$, entonces f es regular en $p \in X$ si $\exists U \subset X$ con $p \in U$, y $\overline{f}, \overline{g} \in \dfrac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{I(X)}$ tal que $\varphi(q) = \dfrac{\overline{f}(q)}{\overline{g}(q)} \forall q \in U$, por supuesto con $\overline{g}(q) \neq 0 \forall q \in U$, ademas

podemos observar $\overline{g}(p) \neq 0 \Leftrightarrow \overline{g} \notin \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ con $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \dfrac{(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)}{I(X)}$ y $P = (a_1, \ldots, a_n)$.
Dicho de otra forma

$$\frac{\overline{f}}{\overline{g}} \in \left(\frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{I(X)}\right)_{\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}} \quad (*) \text{ localizado en el ideal maximal.}$$

Nos acordamos de lo que significa germen de función.

$$(U, \varphi) \sim (U', \varphi') \;\Leftrightarrow\; \exists\, V \subset U \cap U', \text{ con } p \in V, \text{ t.q. } \varphi_{|V} = \varphi'_{|V}$$

Los germenes de $\dfrac{\{(U, \varphi)\}}{\sim}$ es exactamente (*).

Definición 9 *Dado $U \subset \operatorname{Spec} A$ se llama función regular sobre U a una función*

$$s : U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \;\; \textit{tal que}$$

i) $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$,

ii) $\forall\, \mathfrak{p} \in U, \exists\, U' \subset U$, *con* $U' \ni \mathfrak{p}$ *y* $f, g \in A$ *t.q* $\forall\, \mathfrak{q} \in U'$, $s(\mathfrak{q}) = \frac{f}{g}$. *Tengo que pensar que* $g \notin \mathfrak{q} \Leftrightarrow \mathfrak{q} \in D(g)$.

Paréntesis. Recordamos la asociación

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \ni P = (a_1, \ldots, a_n) \longleftrightarrow \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$$

y tenemos una aplicación

$$\begin{array}{ccccc} f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & \dfrac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}} & \simeq & \mathbb{K} \\ = (x_1 - a_1)q_1 + \ldots + (x_n - a_n)q_n + c & & \overline{f} & \to & f(p) \end{array}$$

con $f(p) = c$.
Observamos que $\dfrac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_{\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}}}{\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}(\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}})}} \simeq \mathbb{K}$.
Fin paréntesis.

Podemos considerar que el valor de s en $\mathfrak{p} \in U$ es la clase de $s(\mathfrak{p})$ en $\dfrac{A_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}} = \mathbb{K}(\mathfrak{p})$.

Definición 10 *Un germen de función regular en un punto $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ esta dado construyendo la siguiente relación de equivalencia. Cogemos $U, U' \ni \mathfrak{p}$ y $s \in \mathcal{O}(U), s' \in \mathcal{O}(U')$*

$$(U, s) \sim (U', s') \Leftrightarrow \exists\, V \subset U \cap U', \;\; \textit{con } \mathfrak{p} \in V, \;\; \textit{t.q. } s_{|V} = s'_{|V}.$$

Un germen es una clase de equivalencia por el par (U, s).
$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} =$ *{germenes de funciones regulares}* $\simeq A_{\mathfrak{p}}$.

Ahora estamos cuasi listos para definir lo que es un esquema afín.

Paréntesis.

Definición 11 *Dado un espacio topologico X, un haz $\mathcal{F}$ (de anillos, de grupos,...) es una asignación*

$$\begin{array}{rcl} \{\textit{abiertos de}\, X\} & \longrightarrow & \{\textit{anillos (en general la categoría que sea)}\} \\ U & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

(nosotros para cada abierto daremos el conjunto de funciones regulares), con las condiciones

i) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$

ii) *Si $V \subset U$ $\exists$ homomorfismos de restricción $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ tales que*

- **a)** $\rho_{UU} = id$
- **b)** *si $W \subset V \subset U$ entonces $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$*
- **c)** *si tengo un recubrimiento de $U = \bigcup U_i$ entonces*
  - *si $\rho_{UU_i}(s) = 0 \;\; \forall\, i \Rightarrow s = 0$,*
  - *dados $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que $\rho_{U_i \cap U_j}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j}(s_j) \Rightarrow \;\; \exists\, s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\rho_{UU_i}(s) = s_i \;\; \forall i$*

Fin Paréntesis.

$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} : U \longrightarrow \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(U)$ es un haz de anillos sobre $\operatorname{Spec} A$.

Definición 12 *Se llama "esquema" afín a SpecA junto con su haz $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$, que se va llamar "haz de estructura" del espectro.*

Propriedades:

i) $\mathcal{O}(\operatorname{Spec} A) = A$,

ii) $\mathcal{O}(D(f)) = A_f$ tenemos que pedir que $f \notin \mathfrak{N}$,

iii) $\{$Germenes de funciones regulares en $\mathfrak{p}\} = A_{\mathfrak{p}}$ anillo local.

En un haz $(U,s) \sim (U',s') \Leftrightarrow \exists\, V \subset U \cap U'$ t.q. $\rho_{UV} = \rho'_{U'V}$, y así podemos definir el "stalk" (espiga) del haz en el punto $\mathfrak{p}$ como $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} = \dfrac{\{(U,s)\}}{\sim}$.

Definición 13 *Se llama "esquema" a un espacio topologico* X*, con un haz* $\mathcal{O}_X$ *(haz de estructura) tal que cada espiga es un anillo local y existe un recubrimiento* $X = \bigcup U_i$ *por abiertos de forma que* $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ *es un esquema afín.*

Empezamos a estudiar esquemas afines. Estudiamos los puntos $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, que son todos los ideales primos. Nos preguntamos en cuales cerrados están contenidos los puntos $\mathfrak{p}$. Observamos que $\mathfrak{p} \in V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \supset I\} \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{p} \supset I$, entonces ocurre que

$$\bigcap_{V(I) \ni \mathfrak{p}} V(I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \supset I} V(I) \overset{(*)}{=} V(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}\},$$

donde $(*)$ esta dada por el hecho que $\mathfrak{p} \supset I \Rightarrow V(\mathfrak{p}) \subset V(I)$.
Estamos diciendo que si cogemos

$$\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\{\mathfrak{p}\}) = \{\mathfrak{p}' \mid \mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}\}$$

y el SIGNIFICADO es que $\{\mathfrak{p}\}$ es cerrado $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{p}$ es maximal.
Ejemplo. Sea $A = \mathbb{K}[x,y]$ y $\mathfrak{p} = (y - x^2)$. El germen de una función regular en el punto $\mathfrak{p}$ partenece a

$$A_{\mathfrak{p}} \ni \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \text{ con la condición } g \notin \mathfrak{p} \;\Leftrightarrow\; V(\mathfrak{p}) \not\subset V(g)$$

el significado es que el denominador g no se anula en el genérico punto de la parábola, pero se puede anular en otros puntos.

Definición 14 *Al punto* $\mathfrak{p}$ *se llama punto genérico del conjunto afín* $V(\mathfrak{p})$.

Observamos que si X es un esquema irreducible (si $X = X_1 \cup X_2$ cerrados $\Rightarrow$ $X = X_1$ o $X = X_2$) entonces dos abiertos cualquiera se cortan, porque si $X \supset U, V$ entonces vale que $U \cap V = \emptyset \;\Rightarrow\; \underbrace{(X \setminus U)}_{\text{cerrado}} \cup \underbrace{(X \setminus V)}_{\text{cerrado}} = X \Rightarrow U$ o V es vacio.

Ejemplo $\mathbb{P}^5 = \{$cónicas de $\mathbb{P}^2\} \supset \{$cónicas non singulares$\}$ porque visto por la matriz de los coeficientes $\det H \neq 0$ que es una condición abierta.
Terminología Se llama punto general en un esquema irreducible X a un punto que varia en un abierto de X, como hemos visto la cónica general de $\mathbb{P}^2$ es lisa.

Ahora vamos a definir lo que es un morfismo de esquemas $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{O}_Y)$ con $f : X \to Y$ aplicación continua. La aplicación es continua entonces $\forall\, V \subset Y$ abierto $U = f^{-1}(V) \subset X$ es un abierto también. Tenemos entonces $\mathcal{O}_X\left(f^{-1}(V)\right) \xleftarrow{f_U} \mathcal{O}_Y(V)$ un homomorfismo de anillos, compatible con las restricciones, porque si tengo $V' \subset V$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X\left(f^{-1}(V)\right) \arrow[d] & \mathcal{O}_Y(V) \arrow[l, "f_U"'] \arrow[d] \\
\mathcal{O}_X\left(f^{-1}(V')\right) & \mathcal{O}_Y(V') \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

el diagrama conmuta.
En otras palabras tengo un morfismo de haces $f_*\mathcal{O}_X \leftarrow \mathcal{O}_Y$.

Paréntesis
En general si $f : X \to Y$ aplicación continua y $\mathcal{F}$ un haz sobre X se llama $f_*\mathcal{F}$ el haz sobre Y

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, mapsto] & \mathcal{F}\left(f^{-1}(V)\right) \arrow[d, "\rho_{VV'} = \rho_{f^{-1}(V) f^{-1}(V')}"] \\
V' \arrow[u, hook] \arrow[r, mapsto] & \mathcal{F}\left(f^{-1}(V')\right)
\end{tikzcd}$$

Dado Y un espacio topológico u $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ dos haces sobre Y un morfismo de haces consiste en el dar $\forall\, V \subset Y$ una aplicación $\mathcal{F}'(V) \to \mathcal{F}''(V)$ tal que, para cada abierto $V' \subset V$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}'(V) \arrow[r] \arrow[d, "\rho'_{VV'}"'] & \mathcal{F}''(V) \arrow[d, "\rho''_{VV''}"] \\
\mathcal{F}'(V') \arrow[r] & \mathcal{F}''(V')
\end{tikzcd}$$

Fin paréntesis
Ahora vamos a ver $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ morfismo de esquemas. Y tiene una base de abiertos afines, y si $V \subset Y$ es un abierto afín, voy a coger $f^{-1}(V) \to V$. De todas formas $f^{-1}(V)$ puede no ser afín, pero también X tiene un recubrimiento afín y entonces puedo restringirme a los abiertos afines que recubren $f^{-1}(V)$.
Por lo que hemos dicho es bastante estudiar los morfimos de esquemas

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} B \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\Updownarrow"] & \operatorname{Spec} A \\
B & A \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

donde $\operatorname{Spec} A$ y $\operatorname{Spec} B$ son esquemas afines, A, B son dos anillos que representan respectivamente las secciones globales de $\operatorname{Spec} A$ y $\operatorname{Spec} B$.
Este significa que es equivalente a dar un morfismo de esquemas un morfismo de anillos.
Ejemplo Si tenemos

$$\operatorname{Spec}(A) \supset V(I) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \supset I\} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \operatorname{Spec}\left(\frac{A}{I}\right)$$

un cerrado de $\operatorname{Spec} A$ se puede ver como un $\operatorname{Spec}\left(\frac{A}{I}\right)$.
Tengo de hecho la proyección canonica $\pi : A \to \frac{A}{I}$ y este morfismo de anillos define un morfismo de esquemas $\operatorname{Spec}\left(\frac{A}{I}\right) \to \operatorname{Spec} A$, que tiene como imagen $V(I)$.

Definición 15 *Una inmersión cerrada es un morfismo de esquemas de $Y \to X$ que localmente (hecho por los recubrimientos abiertos de antes) es de la forma $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$, con $A \to B$ supreyectivo . El significado es que la aplicación es inyectiva y la imagen es un cerrado.*

Tenemos un $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ el cerrado es $V(\mathfrak{p}) = \operatorname{Spec}\left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right)$ que corresponde a la proyección $A \to \frac{A}{\mathfrak{p}}$. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & \frac{A}{\mathfrak{p}} \arrow[dr, hook] & \\
A_{\mathfrak{p}} \arrow[dr] & & \mathrm{cfr}\ \frac{A}{\mathfrak{p}} = \left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right)_{\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}} \\
& \frac{A_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}} \arrow[ur, "\simeq", "\mathbb{K}(\mathfrak{p})"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\mathbb{K}(\mathfrak{p})$ es el cuerpo en el punto.
Tengo una aplicación $A \to \mathbb{K}(\mathfrak{p})$ y ademas $\operatorname{Spec} \mathbb{K}(\mathfrak{p}) \to \operatorname{Spec} A$ que corresponde a la inclusión de $\mathfrak{p}$ como punto.
Si X es un esquema arbitrario y tengo $x \in X$ defino $\mathbb{K}(x)$ localmente

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \leftrightarrow x \in \underbrace{\operatorname{Spec} A}_{\text{abierto}} \subset X \qquad \operatorname{Spec}(\mathbb{K}(x)) = \operatorname{Spec}(\mathbb{K}(\mathfrak{p})) \to \operatorname{Spec} A \subset X$$

.

Ejemplo: $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]\right)$ esquema afín.
En particular $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} = \operatorname{Spec}(\mathbb{K}[x])$ queremos $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} = \operatorname{Spec}\mathbb{K}[x,y]$. Cuidado, la topología dada por el producto cartesiano no es la misma topología de Zarinski que tenemos en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ porque en la primera tengo los punto, las rectas verticales, las rectas horizontales y todo el plano, que son los punto y el ideal (0) que es el punto genérico (toda la recta). En la segunda tengo mucho mas cerrados.

Definición 16 *Se llama esquema sobre S (donde S es otro esquema) a un esquema X con un morfismo de esquemas $X \longrightarrow S$. Si $S = \operatorname{Spec} A$ diremos que X es un esquema sobre A.*

Ejemplo. Si $X = \operatorname{Spec}\dfrac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{I}$, como tenemos que $\mathbb{K} \longrightarrow \dfrac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{I}$, tenemos también que $X \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{K}$ y X es un esquema sobre $\mathbb{K}$.
Observamos que todo esquema es un esquema sobre $\mathbb{Z}$. Dado cualquier anillo A existe un único homomorfismo $\mathbb{Z} \longrightarrow A$, con $1 \mapsto 1_A$, que nos da el morfismo correspondiente $X \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.

Definición 17 *Dados X, Y dos esquemas sobre S, el producto $X \times Y$ sobre S es un esquema, que denotaremos con $X \times_S Y$, que tiene dos proyecciones tale que el siguiente diagrama conmute*

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

y también una propiedad universal, i.e. con la condición que $\forall\, Z$ esquema con morfismos tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

entonces existe unico $Z \longrightarrow X \times_S Y$ tal que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, dashed] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
 & X \times_S Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

En la categoría de conjuntos tenemos que $X \times_S Y = \{(x, y) \mid \ p(x) = q(y)\}$. Observamos que si S es un punto ya hemos terminado.

Por la propiedad universal, si existe es único, entonces tenemos que comprobar solo la existencia de $X \times_S Y$, nos preguntamos que sería $\operatorname{Spec} A \times_{\operatorname{Spec} C} \operatorname{Spec} B$. Consideramos

$$\begin{tikzcd}
 & D & \\
 & A \otimes_C B \arrow[u] & \\
A \arrow[ur] \arrow[uur, bend left, "f"] & & B \arrow[ul] \arrow[uul, bend right, "g"'] \\
 & C \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{tikzcd}
 & & f(a)g(b) & & \\
 & a \otimes 1 & a \otimes b \arrow[u] & 1 \otimes b & \\
a \arrow[ur] \arrow[uurr, bend left, "f"] & & & & b \arrow[ul] \arrow[uull, bend right, "g"']
\end{tikzcd}$$

tenemos entonces que $\operatorname{Spec} A \times_{\operatorname{Spec} C} \operatorname{Spec} B = \operatorname{Spec} (A \otimes_C B)$.

Con esquemas arbitrarios se pega todo poquito a poquito.

En el ejemplo de antes tenemos

$$\underbrace{\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}}_{\operatorname{Spec} \mathbb{K}[x]} \times \underbrace{\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}}_{\operatorname{Spec} \mathbb{K}[y]} = \operatorname{Spec}(\underbrace{\mathbb{K}[x] \otimes \mathbb{K}[y]}_{\mathbb{K}[x,y]}) = \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}.$$

Consideramos lo que hemos llamado "producto fibrado"

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

tenerlo significa que X es un S-esquema.
¿Que es un cambio de base? Definimos como esto ocurre en un S-esquema:
Dado un morfismo $S' \longrightarrow S$ se define

$$\begin{tikzcd} X' = X \times_S S' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

y se construye un S'-esquema X'.
Ejemplos 1) Sea X un esquema afín sobre $\mathbb{R}$, significa que $X = \operatorname{Spec} \frac{\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]}{I}$ donde $I = (f_1, \ldots, f_n)$.
Los reales no son buenos para nada, vamos a complexificar.

$$\begin{tikzcd} \dfrac{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]}{I} = \dfrac{\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]}{I} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & & \dfrac{\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]}{I} \arrow[ll] \\ \mathbb{C} \arrow[u, hook] & & \mathbb{R} \arrow[ll, hook'] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

obteniendo

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} \dfrac{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]}{I} = X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} \mathbb{C} \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

2)

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} \dfrac{\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}[x_1,\ldots,x_n]}{(\overline{f}_1,\ldots,\overline{f}_m)} = X' \arrow[r] \arrow[d] & \dfrac{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]}{(f_1,\ldots,f_m)} \arrow[d] \\ \{\mathfrak{p}\} = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

observamos que en la restricción en un punto tengo solo el primo $\mathfrak{p}$, porque para cada $\mathfrak{p}$ primo $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ tengo el cociente que induce el diagrama visto ahora, y las $\overline{f}_i$ son los f_i modulo $\mathfrak{p}$.
En general si X es un esquema sobre $\mathbb{R}$, $X' = X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{R}} \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ es el complexificado de X, y

si X es un esquema sobre $\mathbb{Z}$. Al final, $X' = X \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spec}\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ es la relación modulo $\mathfrak{p}$ de X.
3) Dados X, Y espacios y $X \xrightarrow{f} Y$ un morfismo de esquemas, consideramos para cada $y \in Y$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} X' = X \times_Y \operatorname{Spec}(\mathbb{K}(y)) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \{y\} = \operatorname{Spec}\mathbb{K}(y) \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

X' se llama FIBRA de f en el punto y.
4)Consideramos $\operatorname{Spec}\dfrac{\mathbb{K}[x,y,t]}{(x^2-ty)}$, tenemos una aplicación $\mathbb{K}[t] \longrightarrow \dfrac{\mathbb{K}[x,y,t]}{(x^2-ty)}$, entonces puedo construir un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} (*) = \operatorname{Spec}\dfrac{\mathbb{K}[x,y,t]}{(x^2-ty, t-t_0)} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec}\dfrac{\mathbb{K}[x,y,t]}{(x^2-ty)} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec}\dfrac{\mathbb{K}[t]}{(t-t_0)} \arrow[r] & \operatorname{Spec}\mathbb{K}[t] = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \end{tikzcd}$$

donde $(*)$ es lo que representa la fibra, y ademas tenemos que

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}\dfrac{\mathbb{K}[x,y,t]}{(x^2-ty)} = V(x^2-ty) = \{(x,y,t) \mid x^2-ty=0\} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbb{A}^3_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \arrow[d] \\ & \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \end{tikzcd}$$

En el caso $t_0 = 0$, la fibra es $\operatorname{Spec}\dfrac{\mathbb{K}[x,y]}{x^2}$ que es una recta doble, si $t_0 \neq 0$ tenemos una cónica irreducible.
Vamos a ver cual es la fibra para el punto (0), el punto genérico. Significa considerar la fibra sobre el cuerpo de fracciones de $\dfrac{\mathbb{K}[t]}{(0)}$ que es $\mathbb{K}(t)$. Observamos que tenemos un morfismo $\operatorname{Spec}\mathbb{K}(t) \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{K}[t]$ y entonces tenemos también

$$\begin{tikzcd} (*) = \operatorname{Spec}\left(\dfrac{\mathbb{K}(t)[x,y]}{x^2-ty}\right) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec}\dfrac{\mathbb{K}[x,y,t]}{x^2-ty} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec}\mathbb{K}(t) \arrow[r] & \operatorname{Spec}\mathbb{K}[t] \end{tikzcd}$$

donde $(*)$ representa la cónica de ecuación x^2-ty en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ sobre $\mathbb{K}(t)$. La fibra en un punto genérico es entonces una cónica irreducible.

Vamos a complicarnos la vida: hemos considerado la inclusión $\mathbb{K}[t] \subset \mathbb{K}(t)$, ahora vamos a considerar la inclusión $\mathbb{K}[[t]]$ que nos da un diagrama

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & \operatorname{Spec} \dfrac{\mathbb{K}[x,y,t]}{(x^2-ty)} \arrow[d, "f"] \\
(*) = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[[t]] \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathbb{K}[t]
\end{tikzcd}$$

$$(0) \longmapsto (0)$$

$$(t) \longmapsto (t)$$

observando que $(*)$ es un esquema que tiene solo dos puntos, y hemos descrito las imágenes de tales puntos en los morfismos. Tenemos un cambio de base.
La fibra de (t) por f' es $\dfrac{\mathbb{K}[x,y]}{(x^2)}$, que es una recta doble, la fibra de (0) por f' es una cónica irreducible sobre $\mathbb{K}[[t]]$. Que pasa es que el anillo $\mathbb{K}[[t]]$ es un anillo de valoración discreta.

Esquemas Proyectivos

Los esquemas proyectivos generalizan la noción de conjunto proyectivo en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ que hemos denotado con $V(I) = \{x \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \mid F(x) = 0 \ \forall F \in I \text{ homogéneo}\}$, donde I es un ideal homogéneo y $\dfrac{\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]}{I}$ es un anillo homogéneo.
Cogemos como $I(X) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ el ideal generado por $\{F \text{ homogéneo} \mid F(x) = 0 \ \forall x \in X\}$. La única diferencia con el caso afín nos la dice el teorema débil de los ceros de Hilbert.
Si $V(I) = \emptyset$, entonces $\sqrt{I} \supset (x_0, \ldots, x_n)$. En el caso afín funcionaba en manera distinta, porque si $V(I) = \emptyset$, entonces I era el ideal total, i.e. $I = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, para tener que $\sqrt{I} = I(V(I)) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Denotamos ahora V_P por el proyectivo y V_A por el afín. Para todo lo que hemos dicho tenemos que si $V_P(I) = \emptyset$ entonces I define en $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}}$ o bien el vacío o bien el punto $\{(0, \ldots, 0)\}$. En cualquier caso $V_A(I) \subset \{(0, \ldots, 0)\}$ que nos da $\sqrt{I} = I(V_A(I)) \supset I(\{(0, \ldots)\}) = (x_0, \ldots, x_n)$.
Paréntesis: Anillos homogéneos Sea S un anillo homogéneo, eso significa que $S = \oplus_{d \geq 0} S_d$, con la propiedad que si $F \in S_d$ y $G \in S_e$ entonces $FG \in S_{d+e}$.
I es un ideal homogéneo $\Longleftrightarrow$ I esta generado por polinomios homogéneos $\Longleftrightarrow$ $[F \in I \iff$ cada componente homogénea de F esta en $I]$.

Observamos que

$$I \text{ homogéneo } \iff \frac{S}{I} \text{ es homogéneo.}$$

Dado S un anillo homogéneo, sea $\mathrm{Proj}(S)$ en el conjunto de ideales primos homogéneos de S contenidos en $S_+ = \otimes_{d>0} S_d$ (con este truco evitamos que hay dos ideales distintos que definen el mismo conjunto).

Fin Paréntesis

$X = \mathrm{Proj}\, S$ tiene estructura de esquema: la topología de Zarinski es dada cogiendo como cerrados los subconjuntos de la forma

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}\, S \mid \mathfrak{p} \supset I\} \text{ con } I \text{ homogéneo.}$$

Para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(S)$ vamos a llamar *localizado del homogéneo*

$$S_{(\mathfrak{p})} = \{\text{elementos de grado } 0 \text{ en } S_{\mathfrak{p}}\} = \left\{\frac{F}{G} \mid F, G \text{ homogéneos del mismo grado y } G \notin \mathfrak{p}\right\}.$$

Tenemos que pensar

$$\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] \xrightarrow{(*)} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$$

donde $(*)$ es la deshomogeneización respecto a x_0, teniendo también

$$\frac{f\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{g\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)} \dashleftarrow \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)}$$

y luego multiplicamos para que salga el mismo grado.Un ejemplo de este procedimiento es

$$\frac{2\frac{x_1}{x_0} - 3\frac{x_2^2}{x_0^2}}{\frac{x_1^3}{x_0^3} - \frac{x_2}{x_0}} \dashleftarrow \frac{2x_1 - 3x_2^2}{x_1^3 - x_2}$$

$$\longrightarrow \frac{\frac{2x_1x_0 - 3x_2^2}{x_0^2}}{\frac{x_1^3 - x_0^2 x_2}{x_0^3}} = \frac{2x_1x_0^2 - 3x_2^2 x_0}{x_1^3 - x_0^2 x_2}$$

¿Como saco el haz de estructura $\mathcal{O}_X$?

$$\mathcal{O}_X(U) = \Big\{ s : U \longrightarrow \textstyle\bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} S_{(\mathfrak{p})} \mid \forall\, \mathfrak{p} \in U \ \exists\, V \subset U, V \ni \mathfrak{p};\ F, G \in S \text{ homogéneos del mismo grado t.q } S(\mathfrak{q}) = \frac{F(\mathfrak{q})}{G(\mathfrak{q})} \ \forall\, \mathfrak{q} \in V \Big\}$$

La pareja $(X, \mathcal{O}_X)$ se llama *esquema (proyectivo)*.
La espiga en un punto $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$ es $S_{(\mathfrak{p})}$.
Si F es homogéneo de grado positivo, cogemos

$$D_+(F) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid F \notin \mathfrak{p}\},$$

observando que

$$D \approx \operatorname{Spec} S_{(F)} = \{\text{parte de grado 0 de } S_F\} = \left\{ \frac{G}{F^l} \text{ con } \deg G = \deg F^l \right\}$$

Los conjuntos $\{D_+(F)\}$ me da una base de la topología y todo sale igual. **Ejemplos** 1) Si $S = A[x_0, \ldots, x_n]$ entonces $\operatorname{Proj} S = \mathbb{P}^n_A$.
2) Si $S = \mathbb{K}[\underbrace{x_0}_{\textit{peso } w_0}, \ldots, \underbrace{x_n}_{\textit{peso } w_n}]$ entonces obtenemos $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}(w_0, \ldots, w_n)$ es un *espacio proyectivo con pesos.*
Podemos pensar a un ejemplo

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}(1,1,2) & \hookrightarrow & \mathbb{P}^3_{\mathbb{K}} \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto & (\underbrace{x_0^2}_{z_0} : \underbrace{x_0 x_1}_{z_1} : \underbrace{x_1^2}_{z_2} : \underbrace{x_2}_{z_3}) \end{array}$$

La imagen es dada por el cono $V(z_0 z_2 - z_1^2)$.

Morfismos Separados y Propios

¿Como descubrir si a un esquema falta algo (punto por ejemplo) o ver si es proyectivo? Por ejemplo cogemos X pegando los dos abiertos afines, ver figura

$$U_1 = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[x] \supset U_1' = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[x]_{(x)} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \backslash \{0\}$$

$$U_2 = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[y] \supset U_2' = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[y]_{(y)} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \backslash \{0\}$$

Pegamos U_1 y U_2 pegando U_1' con U_2', observando que en el origen tengo dos puntos distintos, ver la figura

Definición 18 *Un morfismo $X \longrightarrow Y$ es separado si la diagonal $\Delta : X \longrightarrow X \times_Y X$ es un inmersión cerrada.*

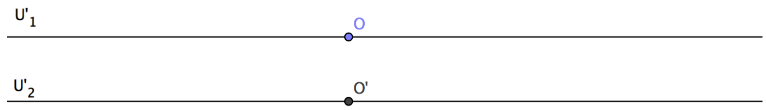

Figura 2:

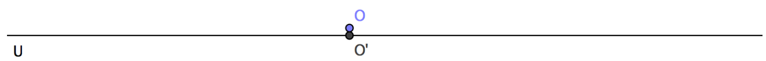

Figura 3:

Cuidado el producto no es el normal producto cartesiano

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dashed, "(*)"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
& X \times_Y X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X \arrow[dr, "p"'] & & X \arrow[dl, "q"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

y la $(*)$ es única por la propiedad universal, al final $(*)$ es nuestra Δ.
El X del ejemplo no es separado sobre $\mathbb{K}$, porque tengo mas puntos fuera de la diagonal pero no en la clausura.

Definición 19 *Un morfismo $X \longrightarrow Y$ es propio si es separado, de tipo finito y universalmente cerrado.*

Explicaciones de la definición:

- TIPO FINITO si existe un recubrimiento de abiertos afines $Y = \bigcup V_i$ tal que retroimagen de los abiertos del recubrimiento esta cubierta también por abiertos afines, i.e.

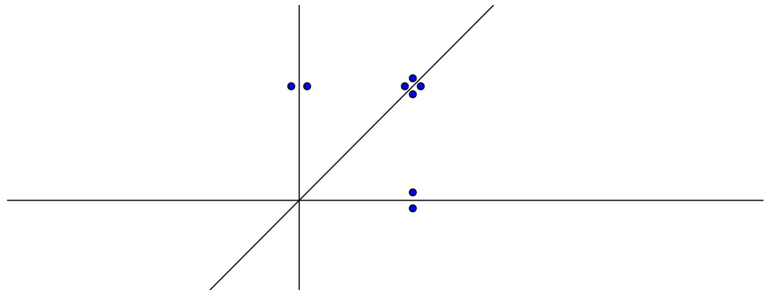

Figura 4:

$f^{-1}(V_i) = \bigcup U_{ij}$, de manera tal que tenemos

$$\begin{array}{ccc} U_{ij} & \longrightarrow & V_i \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ \operatorname{Spec} B_{ij} & \longrightarrow & \operatorname{Spec} A_i \end{array}$$

que induce $A_i \longrightarrow B_{ij}$ con B_{ij} una A_i-álgebra finitamente generada. En nuestro caso A_i es $\mathbb{K}$ entonces B_{ij} será de la forma $\frac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{I}$ que es una álgebra finitamente generada.

- UNIVERSALMENTE CERRADO que es cerrado y ademas para cada $Y' \longrightarrow Y$ cambio de base

$$\begin{array}{ccc} X' = X \times_Y Y' & \longrightarrow & X \\ f'\downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

  f' es un morfismo cerrado.

SIGNIFICADO. Sea $Y = \operatorname{Spec}\mathbb{K}$. Si $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ y si $Y' = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ entonces tenemos $X' = \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \xrightarrow{f'} Y' = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ y f' no es un morfismo cerrado porque $f'\left(V(xy-1)\right) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}\backslash\{0\}$ no es un cerrado. Observamos que si $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ entonces un morfismo $X \times Y' \longrightarrow Y'$ es siempre cerrado.
Hemos visto lo que es un morfismo separado $X \longrightarrow Y$, i.e. cuando la diagonal es $X \longrightarrow X \times_Y X$ es un inmersión cerrada, hemos visto un ejemplo de morfismo no separado, figura .
Hemos visto también lo que significa tener un morfismo propio $X \longrightarrow Y$: separado y universalmente cerrado, i.e.

$$\begin{array}{ccc} X' = X \times_Y Y' & \longrightarrow & X \\ f'\downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

f' es un morfismo cerrado. Un contraejemplo esta dado por la proyección de la iperbola, cerrado en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$, al abierto $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}\backslash\{0\} \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$.

Teorema 20 *Para cada n y $m \in \mathbb{N}$ la proyección $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \times \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$ es un morfismo cerrado.*

Corolario 21 *Si X es un conjunto projectivo, entonces para cada variedad algebraica Y (cuasi proyectiva si y solo si es un abierto de un conjunto proyectivo), la proyección $X \times Y \longrightarrow Y$ es cerrada.*

Para demostrar el corolario podemos suponer que Y es afín

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, hook] \\
X \times \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}} \\
\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \times \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}} \arrow[ur, "\textit{cerrado por el teorema}"'] &
\end{tikzcd}$$

y el hecho de ser cerrado se mantiene en la inclusiones verticales de la izquierda.

Corolario 22 *Un morfismo $X \longrightarrow Y$ de conjuntos proyectivos es cerrado.*

La demostración sigue del Corolario 21, por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & \Gamma_f \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \times Y \arrow[dl, "\textit{cerrada por corolario}"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Todos estos problema salen porque las imágenes de proyectivos son proyectivos pero las imágenes de afines no son siempre afines.
Ejemplo Sea

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \\ (x, y) & \mapsto & (x, xy) \end{array}$$

Vamos a ver las imágenes de las rectas horizontales donde la linea roja representa $y = \lambda$ y en la imagen tales rectas se convierten en donde al variar de λ varia la pendiente de la recta. Observamos que la recta $x = 0$, amarilla, no sale en la imagen. Entonces Im $f = \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}\backslash\,(V(x)\backslash V(x, y))$ que se llama conjunto *constructible*.

Teorema 23 *Si $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, la imagen por un morfismo de un conjunto constructible en un conjunto constructible.*

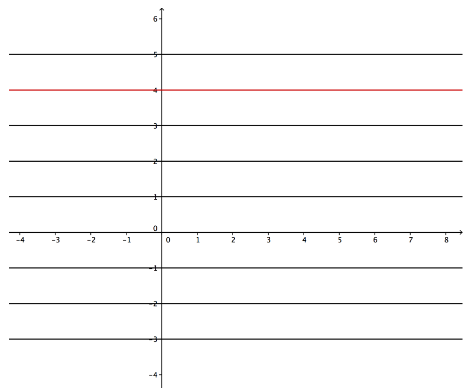

Figura 5:

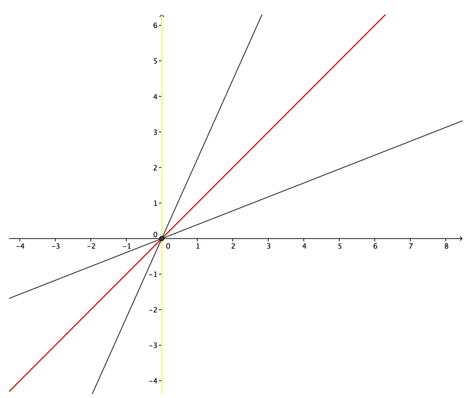

Figura 6:

Por ejemplo $V(x^2+y^2-1) \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$, donde π es la proyección canónica a el eje $y=0$. La imagen esta dada por $\{x \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ (conjunto semialgebraico).

Teorema 24 (de geometría real) *La imagen de un conjunto semialgebraico es un conjunto semialgebraico.*

Ahora estamos preparados para demostrar el teorema gordo.
Demostración de Teorema 20. Cogemos $x_0, \ldots, x_n$ coordenadas de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ y $y_1, \ldots, y_m$ coordenadas de $\mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$. Cogemos ademas

$$V(f_1, \ldots, f_n) = X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \times \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}},$$

donde $f_i \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m] = (\mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m])\,[x_0, \ldots, x_n]$ polinomios homogéneos en las coordenadas $x_0, \ldots, x_n$.
Dado $(a_1, \ldots, a_m)$, queremos determinar cuando esta en $\pi_2(X)$. La preimagen es un subconjunto de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ de ecuaciones

$$f_{i,a} = f_i(x_0, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = 0.$$

Quiero caracterizar cuándo $V(f_{1,a}, \ldots, f_{s,a}) \neq \emptyset$. Por el teorema de los ceros de Hilbert tenemos que

$$\sqrt{(f_{1,a}, \ldots, f_{r,a})} \not\supset (x_0, \ldots, x_n) \not\supset (x_0, \ldots, x_n) \Longleftrightarrow$$
$$(x_0, \ldots, x_n)^l \not\subset (f_{1,a}, \ldots, f_{r,a}) \text{ con grado } d_1, \ldots, d_r, \ \forall\, l >> 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{llll} x_0^{l-d_1} f_{1,a}, & x_0^{l-d_1-1} x_1 f_{1,a}, & \ldots, & x_n^{l-d_1} f_{1,a}, \\ \vdots & & & \vdots \\ x_0^{l-d_r} f_{r,a}, & x_0^{l-d_r-1} x_1 f_{r,a}, & \ldots, & x_n^{l-d_r} f_{r,a} \end{array}$$

son polinomios que no generan (con coeficientes en $\mathbb{K}$) el espacio de polinomios homogéneos de grado l, $\forall\, l >> 0$,

$$\Longleftrightarrow \ \text{rank} \begin{pmatrix} g_{d_1,0,\ldots,0}(a_1, \ldots, a_m) & g_{d_1-1,1,0,\ldots,0}(a_1, \ldots, a_m)(a_1, \ldots, a_m) & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} < \binom{n+l}{l}$$

que son las coordenadas de los vectores respecto a una base que son los monomios de grado l en $x_0, \ldots, x_n$. Ademas, por lo que hemos dicho, estos coeficientes se sacan observando que $f_i = g_{d_1,0,\ldots,0}(y_1, \ldots, y_m) x_0^{d_i} + g_{d_1,1,0,\ldots,0}(y_1, \ldots, y_m) x_0^{d_i-1} x_1 + \cdots$
$\Longleftrightarrow$ menores de orden máximo son ceros, y estos menores son polinomios en $\mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m]$ evaluados en $a_1, \ldots, a_m$. El teorema esta comprobado. $\square$

Corolario 25 *Si X es un conjunto proyectivo irreducible y reducido entonces sus únicas funciones regulares son las constantes. (si $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado)*

Demostración. Si $f \in \mathcal{O}(X)$ es regular, entonces podemos sacar un morfismo regular $X \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ y un diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{K} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \arrow[d, hook] \\ & \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \end{tikzcd}$$

Sabemos que $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ es un conjunto proyectivo en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, entonces puede ser todo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ (imposible) o una cantidad finita de puntos. Entonces la imagen de f es un conjunto finito de puntos. Del hecho que la imagen de un irreducible es un irreducible, tengo solo un punto, una constante. $\square$.

Nos recordamos de un ejemplo ya visto.

Cogemos $\mathbb{K}[x,y,t] \ni x^2 - ty$. Consideramos la inclusión $\dfrac{\mathbb{K}[x,y,t]}{(x^2-ty)} \hookleftarrow \mathbb{K}[t]$, que nos induce el morfismo $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}} \supset V(x^2-ty) \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$. Recuerdo que las fibras por este morfismo eran parábolas que se hacían mas delgaditas acercando a la origen, punto donde se encuentra una recta doble como fibra.

Consideramos ahora otra inclusión $\dfrac{\mathbb{K}[x,y,t]}{(x^2-ty)} \hookleftarrow \mathbb{K}\,[[t]]$ que en este caso nos induce un morfismo $\operatorname{Spec} \dfrac{\mathbb{K}[x,y,t]}{(x^2-ty)} \to \operatorname{Spec} \mathbb{K}\,[[t]]$, donde $\operatorname{Spec} \mathbb{K}\,[[t]]$ esta constituido solo para dos puntos.

Tengo un anillo de valoración discreta, dado por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\,[[t]] \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{K}\,((t)) \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \dfrac{f(t)}{g(t)} & \mapsto & ? \end{array}$$

¿Que valoración podemos dar?

Sea $g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_r t^r + \cdots$.

Si $a_0 \neq 0$ entonces existe un $g^{-1}(t) \in \mathbb{K}[[t]]$ tal que

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots) = 1.$$

Si $g(t) = \underbrace{a_0}_{=0} + \underbrace{a_1}_{=0} t + \underbrace{a_2}_{=0} t^2 + \cdots + \underbrace{a_r}_{\neq 0} t^r + \cdots = t^r(\underbrace{a_r}_{\neq 0} + a_{r+1} t + \cdots)$.

En cualquier caso puedo associar

$$\frac{f(t)}{g(t)} = t^s(\underbrace{a_0}_{\neq 0} + a_1 t + \cdots) \mapsto s$$

Paréntesis: Anillos de valoración discreta.
Un anillo A es de valoración discreta si ocurre, siendo v una valoración:

- $v(f+g) \geq \min\ (v(f), v(g))$,

- $v(f \cdot g) = v(f) + v(g)$.

Podemos sacar que $A = \{f \in \mathbb{K} \mid v(f) \geq 0\} \cup \{0\}$, que tiene como único ideal maximal $\mathfrak{M} = \{f \in \mathbb{K} \mid v(f) > 0\} \cup \{0\}$. Observamos que $\forall f \in \mathbb{K}$, o $f \in A$ si la valoración es positiva, o $f^{-1} \in A$ si la valoración de f es negativa.
Fin Paréntesis
¿Que ocurre cuándo tengo anillos de valoración discreta?
Hemos visto

$$\operatorname{Spec} \mathbb{K}[[t]] \hookrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$$

Tengo dos puntos: un punto con infinitas derivadas

$$(t) \mapsto (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$$

Tenemos una correspondencia

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{K}[[t]] \\ x_0 & \mapsto & a_1 + \ldots \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & \mapsto & a_n + \ldots \\ x_1 - a_1 & \mapsto & t(\cdots) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - a_n & \mapsto & t(\cdots) \end{array}$$

los coeficientes me dan derivadas que me determinan la curva.
¿Que quiere decir tener un morfismo en el punto genérico? (i.e. en el cuerpo de fracciones)
Tenemos

$$\begin{array}{cccc} \operatorname{Spec} \mathbb{K}((t)) \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] = & \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \\ & \left(\dfrac{1}{t}, \ldots, \dfrac{1}{t^n}\right) & \mapsto & \left(1 : \dfrac{1}{t} : \ldots : \dfrac{1}{t^n}\right) = (t^n : t^{n-1} : \ldots : 1) \end{array}$$

a quien asociamos la aplicación (esto que es una posible elección)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n] & \longrightarrow & \mathbb{K}((t)) \\ x_0 & \mapsto & \dfrac{1}{t} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & \mapsto & \dfrac{1}{t^n} \end{array}$$

Observamos que en el morfismo de antes cuando hemos pasado al proyectivo he recuperado el punto en el infinito que nos da la curva racional normal.
Damos ahora una definición alternativa de morfismos propios y separados.

Teorema 26 *Sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de tipo finito (hemos visto antes lo que es), xon X, Y esquemas noetherianos ($\Longrightarrow \bigcup_{finita} \mathrm{Spec}$(anillos noetherianos)). Entonces:*

- *f es separado $\Longrightarrow$ para cada A anillo de valoración discreta con $\mathbb{K}$ el cuerpo de fracciones de A tengo el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\,\mathbb{K} \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\,A \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

  y cada vez que tengo el diagrama conmutativo tengo también la flecha puntuada. En el ejemplo de antes "pegando abiertos"

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\,\mathbb{K}((t)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \textit{recta con "doble origen"} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\,\mathbb{K}[[t]] \arrow[r] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & \mathrm{Spec}\,\mathbb{K} \end{tikzcd}$$

  no es separado porque puedo completarlo en dos maneras distintas, una poniendo el punto de arriba y una el punto de abajo.

- *f es proprio si y solo si existe y es unico*

Teorema 27 *Si X es un esquema noetheriano de tipo finito propio irreducible y reducido sobre $\mathbb{K}$, entonces $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{K}$.*

Demostración. Usamos la definición de propio

$$\begin{tikzcd} X \times_{\mathbb{K}} Y \arrow[r] \arrow[d, "cerrada"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Cogemos $Y = \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. X localmente es un $\operatorname{Spec} \dfrac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{I}$, entonces una función regular se puede ver com un morfismo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \arrow[d, hook] \\ & \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \end{tikzcd}$$

y podemos sacar

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] & \Gamma_j \subset X \times_{\mathbb{K}} \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \arrow[d, "\pi_2"] \\ & \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \end{tikzcd}$$

mas o menos como hemos dicho antes $\operatorname{Im} f = \pi_2\left(\Gamma_j\right)$ que es irreducible, reducido, cerrado y no es todo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. Entonces es constante. $\square$

Hemos visto las correspondencias

$$\begin{aligned} X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \quad &\longleftrightarrow \quad \operatorname{Proj} \frac{\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]}{I} \\ X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \quad &\longleftrightarrow \quad \operatorname{Spec} \frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{I} \end{aligned}$$

Hablamos de esquema de tipo finito sobre $\mathbb{K}$, que significa tener $X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{K}$ que localmente es $\dfrac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{I}$, que es una $\mathbb{K}$-álgebra finitamente generada. Ya hemos visto que si $X = \operatorname{Spec} A$, entonces $\mathcal{O}_X(X) = A$.

Si X es propio de tipo finito sobre $\mathbb{K}$, irreducible, reducido, entonces $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{K}$.

Reducido si localmente $X = \operatorname{Spec} \dfrac{\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]}{I}$ con $\dfrac{\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]}{I}$ libre de elementos nilpotentes.

Un contraejemplo donde no es reducido es dado por $X = \operatorname{Spec} \dfrac{\mathbb{K}[x, y]}{(x^2, y)}$, entonces $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{K}^2$.

¿También en estos casos "malos", podemos recuperar A?

Caso sencillo es este ejemplo

$X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \operatorname{Proj}\left(\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]\right)$.

¿Como es $f \in \mathcal{O}_X(X)$?

Restringimos $f_{|U_0} \in \mathcal{O}_X(U_0) \overset{(*)}{=} \mathbb{K}\left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right]$, $(*)$ es afín ya es un elemento de un anillo, y donde $U_0 = \operatorname{Spec} \mathbb{K}\left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right] = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[y_1, \dots, y_n]$, con $y_i = \frac{x_i}{x_0}$, entonces $f_{|U_0} = \frac{F_0[x_0, \dots, x_n]}{x_0^d}$, con $d = \deg F$. Observamos que $U_0 \cap U_1 = D(y_1)$ y que $\mathcal{O}(D(y_1)) = \mathbb{K}[y_1, \dots, y_n]_{y_1}$.
De manera análoga cogemos $f_{|U_1} = \frac{F_1[x_0, \dots, x_n]}{x_1^d}$, puedo sacar el mismo d de x_0: si fuera d' en $f_{|U_1}$, con $d' > d$ por ejemplo, puedo moltiplicar el numerador y el denominador de $\frac{F_0(x_0, \dots, x_n)}{x_0^d}$ por $x_1^{d'-d}$.
En la intersección tienen que coincidir

$$f_{|U_0 \cap U_1} \in \mathcal{O}(\underbrace{U_0 \cap U_1}_{D(x_0 x_1)}) = \left\{ \frac{G}{(x_0 x_1)^d} \mid G \text{ homogéneo de grado } d \right\}$$

entonces

$$\frac{F_1 \cdot x_0^d}{(x_0 x_1)^d} = \frac{F_0 \cdot x_1^d}{(x_0 x_1)^d} \;\Rightarrow\; F_1 x_0^d = F_0 x_1^d \text{ en } \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$$

que significa, siendo x_0 y x_1 primos entre sí,

$$\begin{matrix} x_0^d | F_0 \\ x_1^d | F_1 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \exists\ \lambda \in \mathbb{K} \text{ t.q. } \begin{matrix} F_0 = \lambda x_0^d \\ F_1 = \lambda x_1^d \end{matrix}$$

porque F_0 y F_1 tienen ambos grado d, esto significa che $f = \lambda$, una constante.
Sea $X = \operatorname{Proj}(S)$, entonces $\mathcal{O}_X(U) = \left\{ s : U \longrightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} S_{(\mathfrak{p})} \mid \dots \right\}$, recordando que $S_{(\mathfrak{p})}$ son los elementos homogéneos de grado 0 de la localización $S_{\mathfrak{p}}$.
Si considero, en vez de los elementos homogéneos de grado 0, los elementos homogéneos de grado $d > 0$, obtengo una diferencia entre los grados en el cociente $\frac{F_0}{x_0^{d'}}$ y entonces el factor de multiplicación λ no es una constante, sino un polinomio homogéneo.
Puedo definir un haz, llamado $\mathcal{O}_X(d)$, definido por

$$\mathcal{O}_X(d)(U) = \left\{ \dots \bigsqcup S(d)_{(\mathfrak{p})} \right\}$$

donde $S(d)_{(\mathfrak{p})}$ son los elementos homogéneos de grado d. Observamos que $(\mathcal{O}_X(d))(X) = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ y que la espiga de $\mathcal{O}_X(d)$ en $\mathfrak{p}$ es $S(d)_{(\mathfrak{p})}$ que es un módulo sobre $S_{(\mathfrak{p})}$. Atención, NO es un anillo porque se multiplico dos elementos de grado d por supuesto no obtengo un elemento de grado d, puedo multiplicar por elementos de grado 0, así que obtendo un $S_{(\mathfrak{p})}$-módulo.

Haces y Fibrados Vectoriales

Definición 28 *Si X es un espacio topologico y $\mathcal{O}_X$ es un haz de anillos, se llama haz de módulos sobre $\mathcal{O}_X$ a un haz $\mathcal{F}$ tal que para todo abierto $U \subset X$, $\mathcal{F}(U)$ es un modulo sobre $\mathcal{O}_X(U)$. Para cada $x \in X$, la espiga $\mathcal{F}_x$ es un módulo sobre $\mathcal{O}_{X,x}$.*

Definición 29 *Si A es un anillo y M es un A-módulo y llamamos $X = \operatorname{Spec} A$, podemos definir un haz $\mathcal{F} = \tilde{M}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos mediante*

$$\mathcal{F}(U) = \left\{ s : U \longrightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}} \mid \forall\ \mathfrak{p} \in U\ \exists\ V \subset U, con\, \mathfrak{p} \in V\ \ y\ \ m \in M, f \in A \backslash \mathfrak{p}\ \ t.q\, s_{|V} = \frac{m}{f} \right\}$$

Los trozos se acaban pegando y

$$\mathcal{F}(X) = M\ \ y\ \mathcal{F}\left(D(f)\right) = M_f = \left\{ \frac{m}{f^n} \right\}.$$

Definición 30 *Si S es un anillo graduado y M es un S-módulo graduado se puede definir, si $X = \operatorname{Proj}(S)$, un haz $\mathcal{F} = \tilde{M}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos de forma que*

$$\mathcal{F}(U) = \left\{ s : U \longrightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}} \mid como\ antes \right\}.$$

Si $F \in S_+$ es un elemento homogéneo

$$\mathcal{F}_{|D(F)} = \tilde{M}_{(F)} \qquad \operatorname{Proj}(S)_{|D(F)} = \operatorname{Spec}(S_{(F)}).$$

Definición 31 *Un haz $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos se dice COHERENTE si localmente se tiene*

- *$X = \bigcup U_i$ con $U_i = \operatorname{Spec}(A_i)$;*

- *$\mathcal{F}_{|U_i} = \tilde{M}_i$ con $\tilde{M}_i$ un A_i-módulo noetheriano.*

Ejemplo. Los haces coherentes sobre $\operatorname{Spec} A$ son de la forma $\tilde{M}$ con M un A-módulo noetheriano.

$$\begin{array}{ccc} \{A - \text{módulo noetheriano}\} & \longleftrightarrow & \{\text{haces coherentes sobre } \operatorname{Spec} A\} \\ M & \mapsto & \tilde{M} \end{array}$$

Ejemplo original.

$S = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ y $X = \operatorname{Proj}(S) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Vamos a coger $M = S(d) = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ donde

$M_l := \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_{l+d}$ (el significado es que estoy "subendo" el nivel de las cosa que voy a definir como "constantes").

Para cada $\mathfrak{p} \in X$, $\tilde{M}_\mathfrak{p} = M_{(\mathfrak{p})} = \left\{ \dfrac{F}{G} \mid F \in M_l = S_{d+e},\ G \in S_e \right\}$. Volviendo a la prueba de antes, ahora nuestro λ es un polinomio homogéneo de grado d. Ademas

$$(\mathcal{O}_X(d))(X) = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_d.$$

Definición 32

$$\tilde{S}(D) = \mathcal{O}_X(d) \implies \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] = \bigoplus_{d \geq 0} (\mathcal{O}_X(d))(X).$$

Cogemos $X = \mathrm{Proj}(S)$ y llamamos $\mathcal{O}_X(d) = \tilde{S}(d)$, recordando que $S(d) = S$ como conjunto y $S(d)_l = S_{l+d}$.

$$S = \bigoplus_{d \geq 0} \left(\mathcal{O}_X(d)\right)(X)? \quad \text{NO.}$$

Ejemplo. $S = \mathrm{Proj}\left(\dfrac{\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]}{I}\right)$ donde $X = \{(\underbrace{t_0^4}_{x_0} : \underbrace{t_0^3 t_1}_{x_1} : \underbrace{t_0 t_1^3}_{x_2} : \underbrace{t_1^4}_{x_3}) | (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}^1\}$ y cogemos $I = I(X)$.

Observamos que $\dfrac{x_0 x_2}{x_1} \in (\mathcal{O}_X(d))(X) \supsetneq S_1 = \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2, x_3]_1$. La demostración se hace recubriendo la curva con dos abiertos y verificando que $\dfrac{x_0 x_2}{x_1}$ es una sección.

Ejemplo. $I \subset A$ ideal, $\tilde{I} \subset \mathcal{O}_X$ con $(X = \mathrm{Spec}\, A)$.

$I \subset S$ ideal homogéneo $\tilde{I} \subset \mathcal{O}_X$ con $(X = \mathrm{Proj}\, S)$.

Definición 33 *Se llama haz de ideales en un esquema X a un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ (¡un ideal es un módulo sobre un anillo!) tal que para cada abierto U, $\mathcal{I}(U) \subset \mathcal{O}_X(U)$ es un ideal.*

Ejemplo. Sean I, J ideales de $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$. ¿Cuándo ocurre que $\tilde{I} = \tilde{J}$?

Supongamos $I = (F_1, \ldots, F_r)$, $J = (G_1, \ldots, G_s)$; $\tilde{I} = \tilde{J}$; $\underbrace{\tilde{I}_{|D(x_i)}}_{\widetilde{I_{(x_i)}}} = \underbrace{\tilde{J}_{|D(x_i)}}_{\widetilde{J_{(x_i)}}}$. Observamos que en el caso afín la biyección es perfecta, que significa: si y solo si $I_{(x_i)} = J_{(x_i)}$, $\forall\, i = 0, \ldots, n$.

Nos acordamos que

$$I_{(x_i)} = \left(F_1\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right), \ldots, F_r\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \right) = \left(\frac{F_1}{x_i^{d_1}}, \ldots, \frac{F_r}{x_i^{d_r}} \right)$$

y vale lo mismo por J, entonces

$$I_{(x_i)} = J_{(x_i)} \iff \frac{F_j}{x_i^{d_j}} \in \left(\frac{G_1}{x_i^{e_1}}, \ldots, \frac{G_s}{x_i^{e_s}} \right)$$

y quitando denominatores

$$\Longrightarrow x_i^{n_{ij}} F \in (G_1, \ldots, G_s) \;\; \forall\, j = 1, \ldots, r$$

esto implica que existe $d >> 0$ tal que si $\deg F \geq d$, $FF_j \in (G_1, \ldots, G_s)$ $\forall\, j = 1, \ldots, r$. Entonces existe un grado suficientemente alto $l >> 0$ tal que si $l \geq e$ vale $I_l \subset J_l$.
Conclusión. $\tilde{I} = \tilde{J} \;\; \Leftrightarrow \;\; I_l = J_l$ si $l >> 0$. Hemos comprobato la "$\Leftarrow$", la "$\Rightarrow$" es quasi inmediata.
Esto ocurre también en general: si $X = \mathrm{Proj}(S)$ entonces

$$\begin{array}{rcl} \{S - \text{módulos graduados noetherianos}\} & \longrightarrow & \{\mathcal{O}_X - \text{módulos noetherianos}\} \\ M & \longmapsto & \tilde{M} \\ \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{O}_X(\mathcal{F}(d)) & \longleftarrow & \mathcal{F} \end{array}$$

donde $\tilde{M} = \tilde{N} \;\; \Leftrightarrow \;\; M_l = N_l \;\; \forall\, l >> 0$, por la biyección tengo que poner esta relación de equivalencia, y $\mathcal{F}(d) = \mathcal{O}_X(d) \otimes \mathcal{F}$.
El ejemplo de la cuártica muestra que $M \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow \tilde{\tilde{M}}$ no es una biyección.
De todas formas tenemos una correspondencia

$$\left\{(t_0^4 : t_0^3 t_1 : t_0 t_1^3 : t_0^4)\right\} = X \;\; \longleftrightarrow \;\; \left\{(t_0^4 : t_0^3 t_1 : t_0^2 t_1^2 : t_0 t_1^3 : t_0^4)\right\} = Y \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{K}},$$

obtenendo $\bigoplus_{d \geq 0} (\mathcal{O}_X(d))(X) = \dfrac{\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]}{I(Y)}$. La biyección recupera la copia isomorfo mas natural a nuestra cara X, que es una curva un poco artificial ya que le falta un monomio.
Al final tenemos

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^1 \arrow[r] & \mathbb{P}^3 \\
(t_0 : t_1) \arrow[r, mapsto] \arrow[ddr] & (t_0^4 : t_0^3 t_1 : t_0 t_1^3 : t_0^4) \\
& \mathbb{P}^4 \arrow[u, dashed, "\text{proyección}"'] \\
& (t_0^4 : t_0^3 t_1 : t_0^2 t_1^2 : t_0 t_1^3 : t_0^4)
\end{tikzcd}$$

Paréntesis: Propiedades fundamentales de los haces.
Si tengo $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ morfismo de haces, entonces

$$\begin{array}{c} \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \\ \forall\, U \;\; \text{abierto es inyectivo} \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \\ \forall\, x \in X \;\; \text{es inyectivo} \end{array}$$

de otro lado

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U)\longrightarrow\mathcal{G}(U) & \Longrightarrow & \mathcal{F}_x\longrightarrow\mathcal{G}_x \\ \forall\, U \;\text{ abierto es sobreyectivo} & \not\Longleftarrow & \forall\, x\in X \;\text{ es sobreyectivo} \end{array}$$

¿Porqué funciona el primero y no el segundo?
Si en inyectivo con espigas, entonces es inyectivo en algún abierto. Si damos el valor cero en el punto, entonces cero en el punto significa cero en un entorno del punto, pero los haces se pegan bien y tenemos cero en todo el abierto. El problema con la suprayectividad es que a veces el levantamiento no es unico!!!
Ejemplo.

$$0\longrightarrow I(X)\longrightarrow\mathbb{K}[x_0,x_1,x_2,x_3]\longrightarrow\frac{\mathbb{K}[x_0,x_1,x_2,x_3]}{I(X)}\longrightarrow 0$$

que da lugar a una nueva sucesión de haces, también exacta porque tengo funtores exactos

$$0\longrightarrow\widetilde{I(X)}\longrightarrow\mathbb{K}[x_0,\widetilde{x_2,x_2},x_3]\longrightarrow\frac{\mathbb{K}[x_0,\widetilde{x_1,x_2},x_3]}{I(X)}\longrightarrow 0$$

que es igual a

$$0\longrightarrow\mathcal{I}_{X,\mathbb{P}^3}\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}\longrightarrow i_*\mathcal{O}_X\longrightarrow 0$$

Podemos hacer el truco de cambiare el grado, pasando a

$$0\longrightarrow I(X)(d)\longrightarrow\mathbb{K}[x_0,x_1,x_2,x_3](d)\longrightarrow\frac{\mathbb{K}[x_0,x_1,x_2,x_3]}{I(X)}(d)\longrightarrow 0$$

obteniendo la sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$0\longrightarrow\mathcal{I}_{X,\mathbb{P}^3}(d)\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d)\longrightarrow i_*\mathcal{O}_X(d)\longrightarrow 0$$

El ejemplo visto antes es equivalente a decir que para $d=1$, al tomar secciones globales

$$0\longrightarrow\mathcal{I}_{X,\mathbb{P}^3}(1)(\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}})\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)(\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}})\xrightarrow{\;*\;} i_*\mathcal{O}_X(1)(\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}})$$

(*) no es sobreyectiva, porque (*) es igual a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)(\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}})=\mathbb{K}[x_0,x_1,x_2,x_3]_1\longrightarrow(\mathcal{O}_X(1))(X)=i_*\mathcal{O}_X(1)(\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}})$. Además $\mathcal{I}_{X,\mathbb{P}^3}(1)(\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}})=I(X)_1=0$ porque no hay elementos de grado 1 en $I(X)$, equivalente a decir que la curva no está contenida en un hiperplano.
Lo que podemos decir es que si

$$0\longrightarrow\mathcal{F}'\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}''\longrightarrow 0$$

es exacta, entonces

$$0\longrightarrow\mathcal{F}'(X)\longrightarrow\mathcal{F}(X)\longrightarrow\mathcal{F}''(X)$$

es exacta.

Fin Paréntesis.

Sea X un esquema y $\mathcal{F}$ un haz coherente de $\mathcal{O}_X$-módulos. Es decir, existe un recubrimiento finito $X = \bigcup U_i$, con $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ abiertos afines con $\mathcal{F}_{|U_i} = \tilde{M}_i$ con M_i un A_i-módulo finitamente generado.

Cogemos $\varphi : X \longrightarrow Y$ morfismo de esquemas. Si $\mathcal{F}$ es un haz sobre X tenemos definido $\varphi_*\mathcal{F}$, la imagen directa de $\mathcal{F}$ por φ, donde

$$(\varphi_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(\varphi^{-1}(V)).$$

Si $\mathcal{F}$ es coherente, $\mathcal{F}_{|U_i} = \tilde{M}_i$ con $U_i = \operatorname{Spec}(A_i)$ localmente y tenemos, siempre localmente, $\varphi_{|U_i} : \operatorname{Spec} A_i \longrightarrow \operatorname{Spec} B_i$ (correspondiente a un morfismo de anillos $A_i \xleftarrow{\tilde{\varphi}} B_i$). M_i es un A_i-módulo y también un B_i-módulo, definido por $b \cdot m := \tilde{\varphi}_i(b)m$. $(*)$.

Se puede ver que $\varphi_*\mathcal{F}_{|\operatorname{Spec} B_i} = \tilde{M}_i$, tomandolo como B_i-módulo.

Al revés, si tenemos un haz en Y vamos a construir un haz sobre X.

Sea $\mathcal{G}$ un haz coherente sobre Y, $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morfismo de esquemas. Localmente $\mathcal{G}_{|\operatorname{Spec} B_i} = \tilde{N}_i$ con N_i un B_i-módulo.

A través de $\tilde{\varphi}_i : B_i \longrightarrow A_i$ tenemos una estructura de B_i-módulo para A_i, definida como en $(*)$. Puedo considerar el producto tensorial $N_i \otimes_{B_i} A_i$ que también es un A_i-módulo con la acción $a \cdot (n \otimes a') := n \otimes a \cdot a'$.

Se puede ver sin excesiva dificultad que todos estos módulos $\widetilde{N_i \otimes_{B_i} A_i}$ se pegan bién; estos están definidos en $\operatorname{Spec} A_i$ y al pegar son un haz coherente $\varphi^*\mathcal{G}$ sobre X.

¿En que consiste este haz? Idea geométrica: para cada $x \in X$

$$(\varphi^*\mathcal{G})_x \longrightarrow (N_i \otimes_{B_i} A_i)_{\mathfrak{p}} \simeq (N_i)_{\mathfrak{q}}.$$

Por lo tanto $(\varphi^*\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{\varphi(x)}$. ¡Las espigas coinciden!

Localmente

$$\begin{gathered} X \rightsquigarrow \operatorname{Spec} A_i \\ x \rightsquigarrow \mathfrak{p} \\ \varphi^*\mathcal{G} \rightsquigarrow \widetilde{N_i \otimes_{B_i} A_i} \\ Y \rightsquigarrow \operatorname{Spec} B_i \\ \varphi(x) \rightsquigarrow \tilde{\varphi}_i^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q} \end{gathered}$$

Ejemplo.

Si $\varphi : X \longrightarrow Y$ es una inmersión cerrada, entonces $\forall$ $\mathcal{G}$ sobre Y

$$\varphi^*\mathcal{G} = \mathcal{G}_{|X}.$$

El hecho que es una inmersión cerrada nos dice que localmente $A_i = \dfrac{B_i}{I}$ donde con localmente quiero decir que $X \rightsquigarrow \operatorname{Spec} A_i$ y $Y = \operatorname{Spec} B_i$.
Si M es un módulo proyectivo, esta es una propiedad local.
M es A-módulo proyectivo $\Longrightarrow$ $M_{\mathfrak{p}}$ es un $A_{\mathfrak{p}}$-módulo proyectivo $\forall\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \implies M_{\mathfrak{m}}$ es un $A_{\mathfrak{m}}$-módulo proyectivo para cada $\mathfrak{m}$ maximal.
En anillos locales $\Longrightarrow$ proyectivo $\Leftrightarrow$ libre.
Si $M_{\mathfrak{p}}$ es un $A_{\mathfrak{p}}$-módulo libre, existe $D(f) \ni \mathfrak{p}$ tal que M_f es un A_f-módulo libre (localmente existe un entorno en el cual el hecho de ser libre se conserva).

$$\left\{\frac{m_1}{f_1}, \dots, \frac{m_r}{f_r}\right\} \text{ es una base de } M_{\mathfrak{p}} \implies \left\{\frac{m_1}{f_1}, \dots, \frac{m_r}{f_r}\right\} \text{ base de } M_{f_1 \cdots f_r}.$$

Definición 34 *Un haz coherente $\mathcal{F}$ se dice localemente libre si existe $X = \bigcup U_i$, con $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ tal que $\mathcal{F}_{|U_i} = \tilde{M}_i$ con M_i un A_i-módulo libre ($\Leftrightarrow$ M_i proyectivo).*

Ejemplo.
Sea $S = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ anillo graduado.

$$\varphi : S(-1)^{n+1} \longrightarrow S$$

$$(F_0, \dots, F_n) \mapsto x_0F_0 + x_1F_1 + \cdots + x_nF_n$$

donde en el espacio de llegada hay elementos que se pueden poner como combinación lineal de $x_0, \dots, x_n$. φ es una aplicación HOMOGENEA (de grado 0) ya que manda elementos homogéneos de grado l en elementos homogéneos de grado l.
φ define un morfismo de haces

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{S(-1)^{n+1}} & \longrightarrow & \tilde{S} & \longrightarrow & \left(\widetilde{\dfrac{S}{(x_0, \dots, x_n)}}\right) = (*) \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \longrightarrow & \tilde{0} = 0 \end{array}$$

donde $(*)$ es un haz de cero porque dijimos que dos módulos definen el mismo haz si los elementos homogéneos coinciden a partir de cierto grado. Aquí coinciden a partir de grado 1.
φ no es sobreyectiva: $\operatorname{coker}(\varphi) = \dfrac{\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]}{(x_0, \dots, x_n)} \simeq \mathbb{K}$.
Sin embargo la aplicación de haces sé que es sobreyectiva!
Sea $M = \ker \varphi = \{(n+1) - \text{uplas tal que } x_0F_0 + \cdots + x_nF_n = 0\}$.
Vamos a ver que $\tilde{M}$ es localmente libre.
En el abierto $D_+(X_i) = \operatorname{Spec} \mathbb{K}\left[\dfrac{x_0}{x_i}, \dots, \dfrac{x_n}{x_i}\right]$ se tiene $\tilde{M}_{|D_i(x_i)} = \widetilde{M_{(x_i)}}$.

¿Cuales son los elementos de grado 0?
$\left(\frac{F_0}{x_i^a}, \ldots, \frac{F_n}{x_i^a}\right) \in M_{(x_i)} \implies F_k$ homogéneo de grado $a-1$ (ya que en $S(-1)$ hay un shift de 1 en el grado).
Además se necesita $x_0F_0 + \ldots + x_nF_n = 0$, entonces puedo siempre dar F_i en función de los restantes $F_1, \ldots, \hat{F}_i, \ldots, F_n$. Dicho de otra forma, no necesito dar el F_i; es bastante dar el $F_0, \ldots, F_{i-1}, F_{i+1}, \ldots, F_n$ y ademas una forma libre.
$M_{(x_i)}$ es un $\mathbb{K}\left[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right]$-módulo libre de base

$$\left(\frac{1}{x_i}, \ldots, \underbrace{-\frac{x_0}{x_i^2}}_{i}, \ldots\right)$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\left(\ldots, \underbrace{-\frac{x_n}{x_i^2}}_{i}, \ldots, \frac{1}{x_i}\right)$$

Obtenemos

$$d\left(\frac{x_k}{x_i}\right) = \left(\ldots, \underbrace{-\frac{x_k}{x_i^2}}_{i}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{x_i}}_{k}, \ldots\right)$$

¿Como se corresponden las bases en $D_+(x_i)$ y $D_+(x_j)$?

En $D_+(x_j)$ con base $d\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_k}{x_j}\right)$ donde $d\left(\frac{x_k}{x_j}\right) = \left(\ldots, \underbrace{-\frac{x_k}{x_i^2}}_{i}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{x_j}}_{k}\right)$.

Tenemos $d\left(\frac{x_k}{x_i}\right) = \left(\ldots, \underbrace{-\frac{x_k}{x_i^2}}_{i}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{x_i}}_{k}, \ldots\right)$ donde sacamos el cambio $\frac{x_i}{x_j}$, y además

$$d\left(\frac{x_j}{x_i}\right) = \left(\ldots, \underbrace{-\frac{x_j}{x_i^2}}_{i}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{x_i}}_{j}, \ldots\right)$$

donde sacamos el cambio $-\dfrac{x_i x_k}{x_j^2}$ y al final

$$d\left(\frac{x_k}{x_j}\right) = \frac{x_i}{x_j} d\left(\frac{x_k}{x_i}\right) - \frac{x_i x_k}{x_j^2} d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)$$

con $\dfrac{x_i}{x_j} d\left(\dfrac{x_k}{x_i}\right) = \left(\ldots, \underbrace{-\dfrac{x_k}{x_i x_j}}_{i}, \ldots, \underbrace{\dfrac{1}{x_j}}_{k}, \ldots\right)$ y $-\dfrac{x_i x_k}{x_j^2} d\left(\dfrac{x_j}{x_i}\right) = \left(\ldots, \underbrace{\dfrac{x_k}{x_i x_j}}_{i}, \ldots, \underbrace{-\dfrac{x_k}{x_j^2}}_{j}\right)$.

Si fueron diferenciales

$$d\left(\frac{x_k}{x_j}\right) = d\left(\frac{\frac{x_k}{x_i}}{\frac{x_j}{x_i}}\right) = \frac{\frac{x_j}{x_i} d\left(\frac{x_k}{x_i}\right) - \frac{x_k}{x_i} d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\left(\frac{x_j}{x_i}\right)^2}.$$

Llamamos $\tilde{M} = \Omega_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}}$ haz de formas diferenciales sobre $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.
Si X es un esquema irreducible sobre $\mathbb{K}$ y $\mathcal{F}$ es un haz localmente libre, localmente $\mathcal{F}_{|\operatorname{Spec} A_i} = \tilde{M}_i$ con M_i un A_i-módulo localmente libre $M_i \simeq A_i^r$.
En otro $\operatorname{Spec} A_j$ tenemos $\mathcal{F}_{|\operatorname{Spec} A_j} = \tilde{M}_j$ con $M_j = A_j^r$ (r es el mismo ya porque en la intersección de dos abiertos la espiga tiene el mismo rango que en cada uno de los abiertos).

$$(\operatorname{Spec} A_i) \cap (\operatorname{Spec} A_j) = \operatorname{Spec} A_{ij} \quad \mathcal{F}_{|\operatorname{Spec} A_{ij}} = M_{ij} \simeq A_{ij}^r.$$

Los M_{ij} sirven para pegar M_i con M_j.
Se puede pegar $(\operatorname{Spec} A_i) \times \mathbb{K}^r$ restringido a $\operatorname{Spec} A_{ij}$ con $(\operatorname{Spec} A_j) \times \mathbb{K}^r$ restringido a $\operatorname{Spec} A_{ij}$ mediante las equivalencias $M_i \simeq A_i^r$, $M_j \simeq A_j^r$, $M_{ij} \simeq A_{ij}^r$ y se obtiene un fibrado vectorial F sobre X.

Definición 35 *Un fibrado vectorial es un esquema de tipo finito sobre $\mathbb{K}$ con un morfismo $F \xrightarrow{\pi} X$ tal que exista un recubrimiento abierto $X = \bigcup U_i$ tal que $\forall\ i\ \pi^{-1}(U_i) \subset F$ es isomorfo a $U_i \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{K}} \mathbb{K}^r$ y*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & U_i \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{K}} \mathbb{K}^r \arrow[dl] \\ U_i & \end{tikzcd}$$

En los abiertos tenemos

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_i) \arrow[d, "\simeq"'] & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] & \pi^{-1}(U_j) \arrow[d, "\simeq"] \\
U_i \times \mathbb{K}^r & & U_j \times \mathbb{K}^r \\
(U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r \arrow[u, hook] & \overset{lineal}{\simeq} & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Observamos que las fibras son todas $\mathbb{K}^r$.
Dado un fibrado vectorial $F \xrightarrow{\pi} X$ se puede definir el hax $\mathcal{F}$ de secciones del fibrado

$$\mathcal{F}(U) = \{s : U \longrightarrow F \mid \ \pi \circ s = id_U\}\,.$$

Restringido a U_i tengo

$$\mathcal{F}(U_i) = \{s_i : U_i \longrightarrow U_i \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{K}} \mathbb{K}^r \mid \pi \circ s = id_U\}$$

$\mathcal{F}$ es localmente libre con $\mathcal{F}(U_i) \simeq \mathcal{O}_X(U_i)^r$ un $\mathcal{O}_X(U_i)$-módulo libre.
¿Para que sirven los fibrados vectoriales?
Ejemplo. En $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ una hypersuperficie (una subvariedad tal que todas sus componentes tienen dimensión $n-1$) se puede definir por una ecuación.
Por ejemplo, un número finito de puntos en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ no se puede dar con 2 ecuaciones (ideal formado por 2 ecuaciones).
Si $X = \{(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)\}$ $I(X) = (x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)$. No puedo quitar ninguna ecuación, la parte homogénea de grado 2 de $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ tiene dimensión 3 y necesito los 3 generadores. Ya que los puntos no están en una recta: 2 puntos $\Rightarrow$ 1 recta mas 1 cónica. 1 punto $\Rightarrow$ intersección de 2 rectas. 3 puntos como las cónicas que pasan por ellos $\Rightarrow$ sistema lineal de dimensión 3!
E abiertos afines

- En $D_+(x_0)$ sólo tengo un punto $\rightsquigarrow \left(\dfrac{x_1}{x_0}, \dfrac{x_2}{x_0}\right)$
- En $D_+(x_1)$ $\rightsquigarrow \left(\dfrac{x_0}{x_1}, \dfrac{x_2}{x_1}\right)$
- En $D_+(x_2)$ $\rightsquigarrow \left(\dfrac{x_0}{x_2}, \dfrac{x_0}{x_2}\right)$

Tenemos

$$\begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{x_0} \\ \dfrac{x_2}{x_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1^2}{x_0^2} & 0 \\ \lambda\dfrac{x_1x_2}{x_0^2} & (1-\lambda)\dfrac{x_1}{x_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{x_0}{x_1} \\ \dfrac{x_2}{x_1} \end{pmatrix} \qquad \text{en} \quad D_+(x_0) \cap D_+(x_1)$$

y

$$\begin{pmatrix} \dfrac{x_0}{x_1} \\ \dfrac{x_2}{x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\dfrac{x_2}{x_1} & (1-\mu)\dfrac{x_0x_2}{x_1^2} \\ 0 & \dfrac{x_2^2}{x_1^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{x_0}{x_2} \\ \dfrac{x_1}{x_2} \end{pmatrix} \qquad \text{en} \quad D_+(x_1) \cap D_+(x_2)$$

entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{x_0} \\ \dfrac{x_2}{x_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dfrac{x_1^2}{x_0^2} & 0 \\ \lambda\dfrac{x_1x_2}{x_0^2} & (1-\lambda)\dfrac{x_1}{x_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu\dfrac{x_2}{x_1} & (1-\mu)\dfrac{x_0x_2}{x_1^2} \\ 0 & \dfrac{x_2^2}{x_1^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{x_0}{x_2} \\ \dfrac{x_1}{x_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu\dfrac{x_1x_2}{x_0^2} & (1-\mu)\dfrac{x_2}{x_0} \\ \mu\lambda\dfrac{x_2^2}{x_0^2} & \lambda(1-\mu)\dfrac{x_2^2}{x_0x_1} + (1-\lambda)\dfrac{x_2^2}{x_0x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{x_0}{x_2} \\ \dfrac{x_1}{x_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Del hecho que tiene que ser $\lambda(1-\mu)\dfrac{x_2^2}{x_0x_1} + (1-\lambda)\dfrac{x_2^2}{x_0x_1} = 0$, obtenemos $\lambda - \mu\lambda + 1 - \lambda = 0$ así que tiene que ser $\mu\lambda = 1$. Eligiendo $\mu = \frac{1}{\lambda}$ tengo una manera para elegir matrices de transición compatibles.

Tengo entonces una receta para pegar las ecuaciones de la subvariedad de codimensión 2!

$\Rightarrow \ \exists \ F \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ y $F \overset{s}{<\!\!-\!\!-} \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ con una sección $s \in \mathcal{F}(\mathbb{P}^2)$ que se anula en X

$$(S)_0 = \left\{ x \in \mathbb{P}^2 \mid s(x) \in \pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{K}^2, s(x) = 0 \right\}.$$

Ejercicio. $X = V(x_0x_1 + x_2x_3 + x_n^2) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ y $L = V(x_0, x_2, x_n) \subset X$, significa que L esta definido por las $x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}$.

Encontrar $F \longrightarrow X$ y una sección que se anula en L.

Dimensión

Definición 36 *Si X es un espacio topológico, se llama dimensión de X a la mayor longitud r de una cadena $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_r$, inclusiones estrictas, de cerrados irreducibles de X.*

Recordamos que irreducible significa que si $X_i = X_i' \cup X_i''$ cerrados, entonces $X_i = X_i'$ o $X_i = X_i''$.
Con esta definición, $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión cero, ya que los únicos puntos cerrados irreducibles son los puntos.
La definición que sigue es la que tiene sentido cuando tenemos un esquema, si $X = \operatorname{Spec} A$.

$$\{\text{Cerrados irreducibles de } \operatorname{Spec} A\} \longleftrightarrow \{\text{Ideales primos de } A\}$$

$\dim X =$ máximo r tal que existe una cadena $\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_r$, siempre con inclusiones estrictas, de ideales primos. Esta dimensión de A es la dimensión de Krull. (A es dominio $\iff$ (0) es primo).
Si $A = \dfrac{\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]}{I}$ y I es primo $\Rightarrow \dim A = \operatorname{grtransc}_{\mathbb{K}} \operatorname{cf} A$, grado de transcendencia sobre $\mathbb{K}$ del cuerpo de fracciones de A.
Ejemplo.
$\dim \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = \dim \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] = \operatorname{grtransc}_{\mathbb{K}} \operatorname{cf} \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n) = n$.
Si $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, $f \notin \mathbb{K}$ irreducible.
$\dim X = \dim \frac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{(f)} = \operatorname{grtransc}_{\mathbb{K}} \operatorname{cf} \left(\frac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{(f)}\right) = n - 1$.
Observación. $\dim A = \dim A_{\mathfrak{p}_0}$ en la situación de arriba
$\dim A = \text{máx}_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \dim A_{\mathfrak{p}} = \text{máx}_{x \in X} \dim \mathcal{O}_{X,x}$.

Como localmente cualquier esquema es el espectro de algo, ya tenemos la noción de dimensión de un esquema X: $\dim X = \text{máx}_{x\in X} \ \dim \mathcal{O}_{X,x}$.
Esta propiedad nos dice que la dimensión se puede calcular localmente. Además estamos suponiendo que A sea un dominio de integridad y que X sea irreducible. Por lo dicho si $X = X_1 \cup \ldots \cup X_s$ unión de irreducibles, entonces $\dim X = \text{máx}\{\dim X_1, \ldots, X_s\}$

$\geq$) $\dim X \geq \dim X_i$ porque $X_i \subset X$ a partir de la definición

$\leq$) Sea $r = \dim X \implies \exists\ X_0' \subset \ldots \subset X_r'$ cadena incluida en $X_0 \cup \ldots \cup X_s$ cadena de irreducibles en X, entonces existe i con $X_r' \subset X_i \Rightarrow \dim X_i \geq r_i$.

Si $A = \frac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{I}$ entonces $\dim A = \dim \frac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{\sqrt{I}}$. Ideales primos de $A \Rightarrow$ cadenas de ideales primos que contiene I y además $\mathfrak{p} \supset I \Leftrightarrow \mathfrak{p} \supset \sqrt{I}$ para cada $\mathfrak{p}$ primo.
$A_{res} = \frac{A}{\mathfrak{N}}$ donde $\mathfrak{N} =$ nilradical $= \sqrt{(0)}$.

Definición 37 *Dado cualquier esquema X se llama estructura reducida de X el esquema X_{res} que consiste, si X está definido localmente por* $\operatorname{Spec} A_i$*, en pegar los* $\operatorname{Spec}(A_i)_{res}$.

- Si $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, como localmente $\mathbb{P}^n$ es $\mathbb{A}^n$ y $\dim \mathbb{A}^n = n$, tenemos que $\dim \mathbb{P}^n = n$.
- Si $X = V(F)$, con F homogéneo no constante, entonces $\dim X = n-1$ (ya que localmente X es un hypersuperficie de $\mathbb{A}^n$). Estoy diciendo más, ya que no pido che F sea irreducilbe, estoy diciendo que cada componente irreducible de X tiene dimensión $n-1$.

- Más general, si $X = \operatorname{Proj} \frac{\mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]}{(F)}$, todas las componentes tienen dimensión $n-1$.

Proposición 38 *Si $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (o $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$) tiene todas las componentes de dimensión $n-1$, entonces $X = V(f)$ (respectivamente $X = V(F)$).*

Demostración. Basta ver que cada componente irreducible de X es de la forma $V(f)$. Dicho de otra forma, basta suponer que X sea irreducible. Como $\dim X = n-1 \Rightarrow I(X) \neq 0 \Rightarrow \exists\ f \in I(X) \backslash \mathbb{K}$ (f no es constante). Como $I(X)$ es primo, si f es reducible cada uno de sus factores está en $I(X)$. Luego puedo suponer que f sea irreducible.
Tenemos entonces que X, $\dim n-1$ está in $V(f)$, $\dim n-1$ irreducible. ¿Puedo decir que $X = V(f)$?

Lema 39 *Si $X \subset Y$, con $\dim X = \dim Y$ y Y es irreducible, entonces $X = Y$*

Demostración Trabajamos, al fin y al cabo, con variedades afines. Sea entonces $X \subset Y \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ inclusión propia $\iff I(X) \supset I(Y) \implies \exists\, f \in I(X) \backslash I(Y) \implies X \subset Y \cap V(f)$.
$\dim Y = \operatorname{grtransc}_{\mathbb{K}} \operatorname{cf} \frac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{I(Y)}$. Como $f \notin I(Y)$, $\bar{f} \neq 0$ como clase de equivalencia en $\dfrac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{I(Y)} \implies \dim \dfrac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{I(Y)+(f)} < \dim \dfrac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{I(Y)}$. De tal manera $\dim Y \cap V(f) < \dim Y = \dim X$ y esta es un absurdo. $\square$.
Esto prueba también que cualquier hypersuperficie de $\mathbb{P}^n$ viene dada por UNA ecuación.
Dado $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ con todas sus componentes de dimensión $n-1$, exist $F \in \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ homogéneo de grado positivo d tal que $X = V(F)$.
$F \in \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]_d = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$ donde $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ es un haz localmente libre de rango 1, $\iff$ fibrato vectorial de rango 1 (fibrado lineal / haz de linea).
Si Y es un esquema irreducible de dimensión n y $X \subset Y$ con todas sus componentes de $\dim n-1$. ¿Se puede decir lo mismo que se tiene para $\mathbb{P}^n$? NO
Ejemplo. $Y = V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ y $X = \{(0,0)\}$ con $X \subset Y$.
X no se puede definir con una sola ecuación

1. si corto con $y = 0 \ \Rightarrow\ (y^2 - x^3) + (y) = (y, x^3)$

2. si corto con $x = 0 \;\Rightarrow\; (y^2 - x^3) + (x) = (x, y^2)$

en ningún caso obtengo el ideal de $(0, 0)$.
Si $A = \frac{\mathbb{K}[x,y]}{(y^2 - x^3)}$ y $M = (\bar{x}, \bar{y})$ donde bar me individua la clase de equivalencia. En A_M (localizado de A en M) el ideal maximal no se puede generar por un elemento!!

Definición 40 *Dado un anillo local de dimensión n, se dice que es REGULAR si su ideal maximal se puede generar por n elementos.*

Definición 41 *Dado un esquema X, se dice que $x \in X$ es liso si $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo local regular. Un ESQUEMA LISO es un esquema en el que todos los puntos son lisos. Si $x \in X$ no es liso se dice que X es singular.*

Supongamos a partir de ahora que Y es liso y de tipo finito (en realidad basta que sea liso en codimensión 1 $\rightsquigarrow$ si cojo un punto x que corresponde a una subvariedad de codimensión 1, $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo local regular.
Sea $X \subset Y$ irreducible de dimensión $n - 1$.
Tenemos una correspondencia $X \longleftrightarrow x \in Y$ y (gracias a nuestras hipótesis) $\dim \mathcal{O}_{Y,x} = 1$
Demostración. Si $Y = \operatorname{Spec} A$ entonces $X \longleftrightarrow \mathfrak{p}$ $X = \operatorname{Spec} \frac{A}{\mathfrak{p}}$ con $\mathcal{O}_{Y,x} = A_{\mathfrak{p}}$ de dimensión 1.
$\mathcal{O}_{Y,x}$ local regular de dimensión 1 (su maximal viene dado por el ideal $\mathfrak{p}$) $\iff$ $\mathcal{O}_{Y,x}$ anillo de valoración discreta. Localmente X viene dado por una sola ecuación.
Si $Y = \bigcup U_i$, entonces $X \cap U_i = V(f_i)$ viene dado por una sola ecuación, con f_i función regular, $f_i \in \mathcal{O}_Y(U_i)$.
Si Y es de tipo finito sobre $\mathbb{K}$ $\Rightarrow$ las funciones regulares son funciones de verdad.
De hecho estoy diciendo algo mas: "$I(X \cap U_i) = f_i$".
Para poder hablar bien de esto hay que utilizar la estructura de anillo de valoración discreta.
La valoración en $\mathcal{O}_{Y,x}$ es cuantas veces el generador del maximal (que es único) divide un dado elemento.
En $U_i \cap U_j \rightsquigarrow \frac{f_j}{f_i}$ está bien definido y nunca se anula en $U_i \cap U_j$, tenemos $\frac{f_j}{f_i} \in \mathcal{O}_Y^*(U_i \cap U_j) \Rightarrow$ puedo usarlo para pegar

$$\begin{tikzcd}
U_i \times \mathbb{K} & U_j \times \mathbb{K} \\
(U_i \cap U_j) \times \mathbb{K} \arrow[u, hook] \arrow[r] & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$$(p, \lambda) \longmapsto \left(p, \frac{f_j}{f_i}(p)\lambda\right)$$

Moralmente $f_i \mapsto \left(\frac{f_j}{f_i}\right) f_i = f_j$. Observamos que $\lambda \mapsto \frac{f_j}{f_i}(p) \cdot \lambda$ es un morfismo lineal!.
Esto también explica porqué no funciona para codimensión mayor!
¿Como defino el cociente entre las 2 funciones que definen algo en codimensión 2 por ejemplo?
¿Hay una única elección de matriz de transición?
Además

$$\begin{tikzcd}
U_i \times \mathbb{K} & U_j \times \mathbb{K} & U_l \times \mathbb{K} \\
U_{ijl} \times \mathbb{K} \arrow[u, hook] & U_{ijl} \times \mathbb{K} \arrow[u, hook] & U_{ijl} \times \mathbb{K} \arrow[u, hook] \\
f_i & \frac{f_j}{f_i} f_i & \frac{f_l}{f_j} f_j \\
f_i \arrow[rr, mapsto] & & \frac{f_l}{f_i} = \frac{f_l}{f_j}\frac{f_j}{f_i}
\end{tikzcd}$$

entonces existe $\mathcal{L}$ haz localmente libre de rango 1 (invertible) y una sección de $\mathcal{L}(Y)$ que se anula exactamente en X (como esquema).
Si $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ con $\dim X_i = n - i \ \ \forall\, i$.
$X_i \longleftrightarrow s_i \in \mathcal{L}_i(Y)$ y $X \longleftrightarrow S_1 \otimes \ldots \otimes S_r \in (\mathcal{L}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_r)(Y)$.
Vale todo esto al revés también.
Si $\mathcal{L}(Y)$ es un haz localmente libre de rango 1 y $s \in \mathcal{L}(Y)$, que significa $\mathcal{L}_{|U} = \mathcal{O}_{X|U}$. Por el mismo argumento que es el caso afín, el lugar de anulación de una función regular (o el lugar de un elemento de $\mathcal{O}_X(U)$) es algo de dimensión $n-1$, entonces $s_{|U} \in \mathcal{O}_X(U)$ ($\dim((S)_0 \cap U) = n - 1$).
Sea $X \subset Y$, con Y lisa de dimensión n, irreducible.
Sea X un hypersuperficie (todas sus componentes tienen dimensión $n-1$)
Lisa $\Rightarrow$ localemente X está definida por una ecuación o de manera equivalente, si $Y = \bigcup U_i$, entonces $X \cap U_i = V(f_i)$, con $f_i \in \mathcal{O}_Y(U_i)$.
Pegando las ecuaciones locales obtenemos que existe L fibrado lineal sobre Y con una sección que se anula en X.
El pasaje de $U_i \times \mathbb{K}$ a $U_j \times \mathbb{K}$ viene dado por la multiplicación por $\frac{f_j}{f_i} \in \mathcal{O}^*$.
Dado L fibrado lineal con dos secciones s y s' que dan lugar a hypersuperficies X y X' (localmente $Y = \bigcup U_i,\ X \leftrightarrow f_i,\ X' \leftrightarrow f_i'$), el paso de $U_i \times \mathbb{K}$ a $U_j \times \mathbb{K}$ se hace multiplicando por h_{ij}: en $U_i \cap U_j$ obtengo $f_j = h_{ij} f_i$ y $f_j' = h_{ij} f_i'$, entonces $\frac{f_j}{f_i} = \frac{f_j'}{f_i'} \Leftrightarrow \frac{f_j}{f_j'} = \frac{f_i'}{f_i}$.
Cada uno de estos son cocientes de funciones regulares en U_j (y respectivamente U_i) tales

que cuando las restringimos a $U_i \cap U_j$ coinciden.

Definición 42 *Se llama función racional sobre una variedad irreducible Y a una clase de equivalencia de pares (U, f), donde U es un abierto no vacío de Y y $f \in \mathcal{O}_Y(U)$, por la relación*

$$(U, f) \sim (U', f') \iff \exists\, V \subset U \cap U' \text{ tal que } f_{|V} = f'_{|V}.$$

La diferencia con la definición de germen de función regular es que los abiertos que cogemos no son entornos de puntos.

Observación. El conjunto de funciones racionales de Y coincide con el conjunto de funciones racionales de cualquier abierto $U \subset Y$.

Y es irreducible, entonces dos abiertos cualquiera se cortan, si $U \subset Y$, también U es irreducible $\Rightarrow$ su anillo de funciones regulares es un dominio $\Rightarrow$ el cuerpo de fracciones está bien definido.

Si U es un abierto afín, el conjunto de funciones racionales de U es $\mathrm{cf}(\mathcal{O}_Y(U))$, que se denota

$$K(Y) = \{\text{funciones racionales de } Y\}.$$

Definición 43 *Sea $f \in K(Y)\backslash\{0\}$ para cada $X \subset Y$ una hypersuperficie irreducible. El localizado $\mathcal{O}_{Y,X}$ es un anillo a valoración discreta (visto antes). cf $\mathcal{O}_{Y,X} = K(Y) \ni f$.*

En este anillo de valoración tengo una valoración $v_X(f) \in \mathbb{Z}$.

Moralmente el generador del maximal de $\mathcal{O}_{Y,X}$ es la ecuación de X y la valoración de f me dice cuantas veces f tiene ceros (o polos) a lo largo de X.

Divisores y Fibrados

Definición 44 *Se llama divisor asociado a una función racional $f \in K(Y)\backslash\{0\}$ a*

$$\mathrm{Div}(f) = \sum_{X \ hypersuperficie\, irreducible \ de \ Y} v_X(f) X.$$

Observamos que es una suma finita ya que solo para un número finito de hypersuperficies la valoración de f es $\neq 0$.

Definición 45 *Se llama divisor de Weil a una combinación lineal finita $\sum n_i X_i$ con $n_i \in \mathbb{Z}$ y X_i hypersuperficie irreducible de Y.* $\mathrm{Div}(f)$ *se llama divisor principal.*

Se dice divisor porque antiguamente se utilizaba la notación producto

$$\sum n_i p_i \longleftrightarrow \prod p_i^{n_i}$$

y los p_i eran asociados a primos.
Sean s, s' dos secciones de un fibrado lineal $(S)_0 \leftrightarrow D$ y $(S')_0 \leftrightarrow D'$, con $D \geq 0$ y $D' \geq 0$ (D y D' son divisores efectivos, que significa que todos los n_i son non negativos).
La discusión que hicimos antes para hypersuperficies no dice en que difieren dos divisores, nos dice che $D - D' = \mathrm{Div}(f)$, el divisor de una función racional $f \in K(Y)\backslash\{0\}$.
Reciprocamente supongamos que $D - D' = \mathrm{Div}(f)$. Localmente $D \to f_i$ y $D' \to f_i'$, esto quiere decir que $\frac{f_i}{f_i'}$ define lo mismo que f en cada U. Esto significa que

$$\frac{\frac{f_i}{f_i'}}{f} \text{ no tiene polos } \Rightarrow \in \mathcal{O}_Y(U_i) \Rightarrow \text{ no se anula nunca.}$$

Lo mismo vale para $\frac{f_j}{f_j'}/f \in \mathcal{O}_Y(U_j)$.
Defino un morfismo de fibrados y demuestro que es un isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
U_i \times \mathbb{K} \arrow[r, "f_j/f_i"] & U_j \times \mathbb{K} \\
U_i \times \mathbb{K} \arrow[r, "f_j'/f_i'"] \arrow[u, "\frac{f_i/f_i'}{f}", "\simeq"'] & U_j \times \mathbb{K} \arrow[u, "\frac{f_j/f_j'}{f}"', "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

Como el diagrama conmuta, el morfismo es un isomorfismo ya que conmuta con las restricciones.
$D \longrightarrow \mathcal{O}_X(D)$ haz de linea, entonces

$$\begin{array}{ll}
D - D' = \mathrm{Div}(f) & \Longleftrightarrow \mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X(D') \\
\quad \Updownarrow \text{ notación} & \\
\quad D \sim D' & \quad D \text{ y } D' \text{ linealmente equivalente}
\end{array}$$

Si D es un divisor cualquiera, puedo escribir $D = D_1 - D_2$, con $D_1, D_2 \geq 0$

$$\begin{array}{c} D_1 \longleftrightarrow \mathcal{O}_X(D_1) \\ D_2 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_2) \end{array} \rightsquigarrow D_1 - D_2 = D \longleftrightarrow \begin{array}{c} \mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2)^* \\ \| \\ \mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(-D_2) \\ \| \\ \mathcal{O}_X(D_1 - D_2) = \mathcal{O}_X(D) \end{array}$$

El fibrado lineal $\mathcal{O}_X(D)$ no tiene porque secciones regulares, pero a lo mejor tiene secciones racionales.
Supongamos ahora que $Y \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. L fibrado lineal sobre $Y \Leftrightarrow \mathcal{L}$ haz invertible.
En general, dado $\mathcal{F} = \tilde{M}$ haz coherente (no acordamos que $\tilde{M} = \tilde{M}' \Leftrightarrow M_l = M'_l$ para $l >> 0$).
Por ejemplo si $M = \bigoplus_{d \geq 0}(\mathcal{F}(d))(Y)$, entonces $\tilde{M} = \mathcal{F}$.

Teorema 46 (B de SERRE) *Si $\mathcal{F}$ es un haz coherente sobre un esquema proyectivo, entonces $\mathcal{F}(d)$ tiene secciones no nulas para $d >> 0$.*

Dado L fibrado lineal, $L \otimes \mathcal{O}_Y(d)$ tiene secciones no nulas para $d >> 0$.
$\rightsquigarrow \exists\, D' \geq 0$ t.q. $\mathcal{O}_Y(D') = L \otimes \mathcal{O}_Y(d)$. Substituyendo $\mathcal{O}_Y(D'')$, obtenemos $L = \mathcal{O}_Y(D' - D'')$.

$$\begin{array}{ccl} \dfrac{\mathrm{Div}(Y)}{\sim} & \longrightarrow & \{\text{fibrados lineales sobre } Y\} / \simeq = \mathrm{Pic}(Y) \\ D & \longrightarrow & \mathcal{O}_Y(D). \end{array}$$

También es un isomorfismo de grupos (la operación en $\mathrm{Pic}(Y)$ es el producto tensorial).
Dada $X \subset Y$ hypersuperficie se puede considerar el haz de ideales $\mathcal{I}_{X,Y}$, de las funciones regulares de Y que se anulan en X, observamos che $\mathcal{I}_{X,Y} \simeq \mathcal{O}_Y(U_i)$ dado por la correspondencia $g \cdot f_i \longleftarrow g$. Entonces $\mathcal{I}_{X,Y}$ es un haz invertible. ¿Como se pegan las cosas?

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I}_{X,Y}(U_i \cap U_j) \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_Y(U_i \cap U_j) \arrow[l, "\simeq"'] & & U_i \cap U_j \leftarrow U_i \\ gfi & g \arrow[l, mapsto] & & \\ \mathcal{I}_{X,Y}(U_i \cap U_j) & \mathcal{O}_Y(U_i \cap U_j) \arrow[l, "\simeq"'] & & U_i \cap U_j \leftarrow U_j \end{tikzcd}$$

$$hf_j \longleftarrow\!\!\!\!\mid\; h = \frac{f_i}{f_j} g = \left(\frac{f_j}{f_i}\right)^{-1}$$

Tenemos entonces que $\mathcal{I}_{X,Y} = \mathcal{O}_Y(X)^* = \mathcal{O}_Y(-X)$. y por supuesto (es de rango 1 y invertible)

$$\mathcal{I}^*_{X,Y} = \mathcal{O}_Y(X).$$

Si $X \subset Y$ de codimensión mayor que 1, $\mathcal{I}_{X,Y}$ no es localmente libre y $\mathcal{I}^*_{X,Y} = \mathcal{O}_Y$.
Localmente X está definido por 2 ecuaciones f y g sin componentes comunes, entonces $I = (f, g)$ en $\mathcal{O}_{Y,p}$ con p punto; el dual quiere decir $\mathrm{Hom}(I, \mathcal{O}_{Y,p})$. Bajo este homomorfismo

$I \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,p}$, con $f \mapsto f'$ y $g \mapsto g'$ ¿Cual es la imagen de fg? $I \subset \mathcal{O}_{Y,p}$ en que puedo ver alternativamente f como elemento de $\mathcal{O}_{Y,p}$ y g como elemnto de I o al revés luego

$$\begin{tikzcd} fg \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & fg' \\ & f'g \end{tikzcd}$$

tiene que ser $fg' = f'g$ obteniendo

$$\left.\begin{array}{l} f|f'g \;\text{ y }\; f\nmid g \;\Rightarrow\; f \mid f' \\ g|g'f \;\text{ y }\; g\nmid f \;\Rightarrow\; g \mid g' \end{array}\right\} \mathcal{O}_{Y,p} \text{ es } UFD.$$

Entonces $g' = hg$ y $f' = hf$.

Luego $\operatorname{Hom}(I, \mathcal{O}_{Y,p}) \overset{*}{=} \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_{Y,p}, \mathcal{O}_{Y,p}) = \mathcal{O}_{Y,p}$, donde la igualdad $(*)$ es dad asociando a $f \longrightarrow f'$ el elemento h tal que $f' = hf$.

$\mathcal{I}^*_{X,Y} = \mathcal{O}_Y \implies \mathcal{I}_{X,Y}$ NO es localmente libre ya que en este caso sería $(\mathcal{I}^*_{X,Y})^* = \mathcal{I}_{X,Y}$ y no es así, ya que $(\mathcal{I}^*_{X,Y})^* = \mathcal{O}^*_{Y,p} = \mathcal{O}_{Y,p}$. *controllare*

Ejemplo: $\operatorname{Pic} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = ?$.

Una hypersuperficie es lo mismo que el lugar de ceros de una sección de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$, luego $\operatorname{Pic} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Si tenemos $D \in \operatorname{Div}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})$, con $D = \sum n_i X_i$ y la correspondencia $X_i \leftrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i)$, así que $D \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\sum n_i d_i)$. No hay mas fibrados lineales que los $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$.

Construcción. Sea Y un esquema de tipo finito sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, propio, entonces (difícil), $\mathcal{L}(Y)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita. Nos acordamos que tenemos una correspondencia entre los L fibrados lineales sobre Y y los haces $\mathcal{L}$.

Sea $V = < x_0, x_1, \dots, x_n > \subset \mathcal{L}(Y)$ un subespacio vectorial de dimensión $< \infty$.

Ejemplo. $Y = \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ y $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)$, $V = < \underbrace{t_0^4}_{x_0}, \underbrace{t_0^3 t_1}_{x_1}, \underbrace{t_0 t_1^3}_{x_2}, \underbrace{t_1^4}_{x_3} >$, de dimensión 4, mientras $\mathcal{L}(Y) = \mathbb{K}[t_0, t_1]_4$, de dimensión 5.

Si $\dim V = n+1$, ¿como obtengo $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$?

Creo que vamos a ver que

$$\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S^d V$$

anillo graduado. Entonces

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{d \geq 0} S^d V\right)$$

$$S^d V \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes d}(Y)$$

$$\bigoplus_{d \geq 0} S^d V \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes d}(Y) \text{ anillo graduado.}$$

Tenemos que $\ker \alpha = I$ ideal homogéneo. Cogemos

$$\operatorname{Proj}\left(\frac{\bigoplus_{d\geq 0} S^d V}{I}\right)$$

esquema proyectivo.
Volvemos a nuestro ejemplo

$$\begin{array}{ccl}
S^2V & \longrightarrow & (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(8))(\mathbb{P}^1) = \mathbb{K}[t_0,t_1]_8 \\
x_0^2 & \longmapsto & t_0^8 \\
x_0x_1 & \longmapsto & t_0^7t_1 \\
x_0x_2 & \longmapsto & t_0^5t_1^3 \\
x_0x_3 & \longmapsto & t_0^4t_1^4 \\
x_1^2 & \longmapsto & t_0^6t_1^2 \\
x_1x_2 & \longmapsto & t_0^4t_1^4 \\
x_1x_3 & \longmapsto & t_0^3t_1^5 \\
x_2^2 & \longmapsto & t_0^2t_1^6 \\
x_2x_3 & \longmapsto & t_0t_1^7 \\
x_3^2 & \longmapsto & t_1^8
\end{array}$$

podemos observar que $I_Z =< x_0x_3 - x_1x_2 >$, donde las coordenadas $x_0,\ldots,x_3$ están dadas por

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \mathbb{P}^3_{\mathbb{K}} \\
(t_0:t_1) & \longmapsto & (t_0^4 : t_0^3t_1 : t_0t_1^3 : t_1^4)
\end{array}$$

Necesito que cada punto $y \in Y$ defina un punto de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Observamos que un punto de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ es la intersección de n hiperplanos $\leftrightarrow$ hiperplano de $\mathbb{P}^{n\,*}_{\mathbb{K}}$ (conjunto de todos los hiperplanos de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ que se anulan en el punto).
Idea Cada Punto de Y debe definir un hiperplano de V (secciones globales de $\mathcal{L}$ que están en V y se anulan en y).

Definición 47 *Se dice que $V \subset \mathcal{L}(Y)$ genera $\mathcal{L}$ en el punto y si $V(-y) = \{s \in V \ : \ s(y) = 0\} \subset V$ es una inclusión estricta, $\Rightarrow$ $V(-y)$ es un hiperplano de V.*

Observación. Dada una recta $< s_0, s_1 >$ en V, $\exists\, \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 \in V(-y)$.
Se dice que V genera $\mathcal{L}$ si lo genera en cada punto de Y.
Observamos que

$$\begin{array}{ccl}
Y & \longrightarrow & P(V)^* = P(V^*) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \\
y & \longmapsto & V(-y)
\end{array}$$

donde los hiperplanos vienen dados por los elementos de $(V^*)^* = V$. Además $V(-y) \subset V$ nos dice que $V^* \longrightarrow V(-y)^*$ es una aplicación sobreyectiva

$$y \longmapsto (x_0(y) : \ldots : x_n(y))$$

Observación. Si tenemos

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{L}(Y) \\ & V \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

entonces tenemos un aplicación $Y \longrightarrow P(V^*) \subset P(V'^*)$. Cogiendo $\{x_0, \ldots, x_n\}$ base de V', tenemos

$$\begin{array}{ccc} V' & \longrightarrow & \mathcal{L}(Y) \\ x_0, \ldots, x_n & \longmapsto & s_0, \ldots, s_n \end{array}$$

la aplicación mencionada antes es de la forma

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & P(V^*) \subset P(V'^*) \\ y & \longmapsto & (s_0(y) : \ldots : s_n(y)). \end{array}$$

Haciendo otro ejemplo podemos considerar

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^5 \\ (t_0 : t_1) & \longmapsto & (\underbrace{t_0^4}_{x_0} : \underbrace{t_0^3 t_1}_{x_1} : \underbrace{t_0^2 t_1^2}_{x_2} : \underbrace{t_0^2 t_1^2}_{x_3} : \underbrace{t_0 t_1^3}_{x_4} : \underbrace{t_1^4}_{x_5}) \end{array}$$

La imagen va a estar contenida en el hiperplano de ecuación $x_2 = x_3$.
Si $Y \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ y $L = \mathcal{O}_Y(1)$, considerando la aplicación

$$V' = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))(\mathbb{P}^n) \longrightarrow (\mathcal{O}_Y(1))(Y)$$

con la construcción anterior obtengo la inclusión $Y \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.
controllare e chiedere questo punto
Sea $V = \mathcal{L}(Y)$ con $V \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ me da un morfismo

$$Y \xrightarrow{\varphi_L} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \mathbb{P}(\mathcal{L}(Y)^*).$$

La imagen del morfismo $\operatorname{Im} \varphi_L$ no está contenida en un hiperplano (morfismo no degenerado).
Llamamos a $(I_1 = \ker(V \longrightarrow \mathcal{L}(Y)))$.

Si $V \subset \mathcal{L}(Y)$, donde la inclusión es propia, estricta, tenemos

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}(\mathcal{L}(Y)^*) \arrow[dd, dashed, "\pi"] \\ Y \arrow[ur, "\varphi_L"] \arrow[dr, "\varphi_V"'] & \\ & \mathbb{P}(V)^* \end{tikzcd}$$

donde $\varphi_V(Y)$ no es linealmente normal porque $\varphi_V(Y) = \pi(\varphi_L(Y))$, con $\varphi_L(Y)$ no degenerada. $V \subset \mathcal{L}(Y)$ genera $\mathcal{L}$ en el punto y, si $V \otimes \mathcal{O}_Y \xrightarrow{ev_V} \mathcal{L}$ es sobreyectiva en la espiga de y, entonces tenemos que

$$Y \times V \xrightarrow{ev_V} L$$

$$(y', s) \longrightarrow s(y')$$

donde

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d] \\ Y \arrow[u, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$$

tenemos que $\dim L_y = 1$ así que $ev_V(y)$ sobreyectiva $\Leftrightarrow ev_V(y) \not\equiv 0 \;\Leftrightarrow\; \exists\, s \in V$ con $s(y) \neq 0$ $\Leftrightarrow\; V(-y) \subset V$, inclusión estricta.

Definición 48 *Si $\mathcal{F}$ es un haz coherente se dice que un subespacio V de las secciones globales genera el punto y si el morfismo $V \otimes \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{F}$ es sobrayectivo en la espiga de y.*

Vemos ahora la generalización de la construcción para fibrados F de rango arbitrario $s+1$. Sea $V \subset F(Y)$, con $\dim V = n$, que generan el fibrado F. Considero para cada $y \in Y$,

$$V(-y) = \{s \in V \mid s(y) = 0\}$$

de codimensión $s+1$ en V.
En $\mathbb{P}(V^*) = \mathbb{P}^n$, $V(-y)$ define un subespacio lineal de dimensión s. Tenemos

$$\underbrace{V^*}_{n+1} \longrightarrow \underbrace{V(-y)^*}_{n-s}$$

que me da

$$Y \longrightarrow \mathbb{G}(s,n) = \{\text{subespacios de } \mathbb{P}^n \text{ de dimensión } s\}$$

Definición 49 *L se dice que es muy amplio si φ_L es una inmersión cerrada.*
Se dice que L es amplio si existe d tal que $L^{\otimes d}$ es muy amplio.

Ejemplo. Si $Y = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ y $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$

- Si $d > 0$ entonces L no tiene secciones,

- SI $d = 0$ entonces φ_L es la aplicación constante $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{P}^0_{\mathbb{K}}$ =punto,

- Si $d > 0$ entonces $\varphi_L = v_d$ la inmersión de Veronese.
  Un caso particular de este tipo es dado por $n = 1$, donde obtengo

$$\begin{array}{rccc} v_d: & \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}} \\ & (t_0, t_1) & \longmapsto & (t_0^d : t_0^{d-1}t_1 : \ldots : t_1^d) \end{array}$$

  cuya imagen es la curva racional normal de grado d. En general la aplicación de Veronese tiene una inmersión
$$v_d(\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}) \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}_{\mathbb{K}}.$$

Ejemplo. Si

$$\begin{tikzcd} & Y = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathbb{P}^n & & \mathbb{P}^m \end{tikzcd}$$

obtenemos que
$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(a, b) = \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a) \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(b).$$

Si cogemos $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(1, 1)$ entonces $L(Y) = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n, y_o, \ldots, y_m]_{(1,1)}$ formas bihomogéneas de grado 1,1. La aplicación asociada es dada por

$$\begin{array}{rccc} \varphi_L = \varphi_{n,m}: & \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1} \\ & (x_0, \ldots, x_n) \ (y_0, \ldots, y_n) & \longmapsto & (x_0y_0 : x_0y_1 : \ldots : x_ny_m) \end{array}$$

llamada inmersión de Segre, donde las ecuaciones en el espacio de llegada están definida por el anularse de los menores de orden 2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_0y_0 & x_0y_1 & \cdots & x_0y_m \\ x_1y_0 & x_1y_1 & \ldots & x_1y_m \\ \vdots & & \vdots & \\ x_ny_0 & \ldots & \ldots & x_ny_m \end{pmatrix}.$$

El punto de la situación

- Establecer el lenguaje y los objectos con los que queremos trabajar.

- Trabajar con ellos: técnicas de trabajo.

Hemos siempre considerado $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ conjuntos proyectivos, cuya generalización son los esquemas de tipo finito sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (propios, separados,...).
Nuestros *esquemas* localmente serán siempre de la forma Spec $\left(\frac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{I}\right)$.
Haz coherentes. Consideramos los haces de ideales que hemos encontrado. Tenemos unas correspondecias

$$\begin{array}{ccccc} \text{haces localmente libres} & \leftrightarrow & \text{fibrados vectoriales} & & \\ \cup & & & & \\ \text{haces invertibles} & \leftrightarrow & \text{fibrados lineales} & -- > & \text{morfismos al proyectivo} \end{array}$$

Dado $\mathcal{L}$ haz invertible sobre X, podemos tener $V \subset \mathcal{L}(X)$ secciones que generan $\mathcal{L}$, hemos visto tal que $\varphi_V : X \longrightarrow P(V^*)$. En el caso $V = \mathcal{L}(X)$ tenemos $\varphi_{\mathcal{L}} : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{L}(X)^*)$.
Pregunta: ¿ cómo se calcula $\dim \mathcal{L}(X)$?
Resula que la "buena pregunta" es otra; hay que introducir la cohomología de haces.

Cohomología de Haces

¿Como surge la cohomología?
Sea X un espacio topológico que tiene una sucesión exacta de haces de anillos sobre él:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

(por ejemplo un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos para X un esquema). Por definición la sucesión es exacta si y solo si

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}''_x \longrightarrow 0$$

es exacta para cada $x \in X$.
Vamos a ver que, al tomar secciones globales, para que siga siendo exacta, hay que quitar la flecha al cero a la derecha, solo es exacto el trozo

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}''(X)$$

Sea $s' \in \mathcal{F}'(X)$ que va a cero: $s' \longmapsto 0$. Esto implica que $s'_x \longmapsto 0$ al verlo en la sucesión de espigas. Una sección s' que es cero en cada espiga es cero en cada espiga. Existen entonces abiertos U_x tales que $s'_{|U_x} = 0$; para este recubrimiento los axiomas de haces implican $s' \equiv 0$. También es evidente que $\operatorname{Im}(\mathcal{F}'(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X)) \subset \ker(\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}''(X))$, por la misma razón que antes.

Ahora $s'_x \longmapsto 0$ y $s_x = \varphi(s'_x)$ para algún s'_x, esto quiere decir que existe un entorno U_x de x tal que $s_{|U_x} = \varphi(s'_{|U_x})$ con $s' \in \mathcal{F}'(U_x)$. Mas precisamente $s'(x) \mapsto s_{|U_x}$ (s' depende de x).

Sea $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ y tenemos que $s \longmapsto 0$, entonces $\mathcal{F}'(U_i) \ni s'_i \longrightarrow s_{|U_i}\ \forall\, i$.

Para pegar los s'_i a que den una sección global s' tal que $s'_{|U_i} = s'_i$, necesito que $s'_{i|U_i \cap U_j} = s'_{j|U_i \cap U_j}$. Ambos están en $\mathcal{F}'(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\theta} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ y sus imágenes coinciden: son $s_{|U_i \cap U_j}$.

La aplicación θ es injectiva!!! Entonces $s'_{i|U_i \cap U_j} = s'_{j|U_i \cap U_j}$.

En fin $0 \longrightarrow \mathcal{F}'(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}''(X)$ es exacta.

¿Que es lo que falla para que $\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}''(X)$ sea sobreyectiva?

Sea $s'' \in \mathcal{F}''(X)$. Pasando a espigas y de allí a recubrimientos por abiertos, tenemos que existe $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ con

$$\begin{array}{ccc} s''_{|U_i} & \in & \mathcal{F}''(U_i) \\ \uparrow & & \uparrow \\ s_i & \in & \mathcal{F}(U_i) \end{array}$$

¿Puedo pegar ahora las s_i?

$$\mathcal{F}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{F}''(U_i \cap U_j)$$

$$\begin{tikzcd} s_{i|U_i \cap U_j} \arrow[dr] & \\ & s''_{|U_i \cap U_j} \\ s_{j|U_i \cap U_j} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

pero el morfismo ε NO es sobreyectivo.

Luego $s_{i|U_i \cap U_j} - s_{j|U_i \cap U_j} \mapsto 0$ y existe $s'_{ij} \in \mathcal{F}'(U_i \cap U_j)$, que no nos va bien.

Parece ser que de s'' surge, de forma natural, una aplicación de $\mathcal{F}''(X)$ a $\prod_{i,j} \mathcal{F}'(U_i \cap U_j)$ de la forma $s'' \longmapsto (s'_{ij})$. Es un morfismo (de anillos ó de módulos).

En general, dado un recubrimiento por abierto de X, $X = \bigcup_{i \in I} U_i := U$, con I conjunto totalmente ordenado, y dado un haz $\mathcal{F}$ sobre X, ponemos

$$\mathcal{C}^p(U, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < i_1 < \ldots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p})$$

y consideramos la aplicación diferencial

$$\begin{array}{rcl} \delta : \mathcal{C}^p(U,\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{p+1}(U,\mathcal{F}) \\ \mathcal{F}(U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_p}) \ni (s_{i_0\cdots i_p})_{i_0<\ldots i_p} & \longmapsto & (t_{i_0\cdots i_{p+1}})_{i_0<\ldots<i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j s_{i_0\cdots\hat{i_j}\cdots i_{p+1}|U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_{p+1}}} \end{array}$$

Se tiene $\delta\circ\delta = 0$, entonces $\mathcal{C}^0(U,\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^1(U,\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^2(U,\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \cdots$ complejo de cadenas. Llamamos

$$H^p(U,\mathcal{F}) = \frac{\ker\left(\delta : \mathcal{C}^p(U,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^{p+1}(U,\mathcal{F})\right)}{\operatorname{Im}\left(\delta : \mathcal{C}^{p-1}(U,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^p(U,\mathcal{F})\right)}$$

Ejemplo. Si $p = 0$, tenemos

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^0(U,\mathcal{F}) = \prod_{i\in I}\mathcal{F}(U_i) & \stackrel{delta}{\longrightarrow} & \mathcal{C}^1(U,\mathcal{F}) = \prod i < j\mathcal{F}(U_i\cap U_j) \\ (s_i) & \longmapsto & (s_j - s_i)_{ij} \end{array}$$

donde en el espacio de llegada $s_i = s_{iU_i\cap U_j}$ y $s_j = s_{j_{U_i\cap U_j}}$, porque por definición estamos considerando las restricciones. Tenemos que

$$H^0(U,\mathcal{F}) = \ker\left(\delta : \mathcal{C}^0(U,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(U,\mathcal{F})\right) \simeq \mathcal{F}(X).$$

son los $s \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que $(s_j - s_i)_{|U_i\cap U_j} = 0$: son las secciones globales!.
En realidad, la aplicación $\mathcal{F}''(X) \longrightarrow \prod_{i,j}\mathcal{F}'(U_i\cap U_j)$ tiene como codominio el espacio $H^1(U,\mathcal{F}')$, ya que se puede ver que la diferencial δ es cero y se modificamos la elección de s'_{ij} segundo a otra elección de una preimagen $s_i \to s''_i$, obtenemos que variamos a la imagen $\mathcal{C}^0(U,\mathcal{F}') \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^1(U,\mathcal{F}')$. Entonces realmente obtenemos una aplicación $\mathcal{F}''(X) \longrightarrow H^1(U,\mathcal{F}')$.
Tenemos una sucesión exacta larga

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(U,\mathcal{F}') \arrow[r] & H^0(U,\mathcal{F}) \arrow[r] & H^0(U,\mathcal{F}'') \arrow[dll] \\ & H^1(U,\mathcal{F}') \arrow[r] & H^1(U,\mathcal{F}) \arrow[r] & H^1(U,\mathcal{F}'') \arrow[dll] \\ & H^2(U,\mathcal{F}') \arrow[r] & \cdots & \end{tikzcd}$$

Todo esto parece depender del recubrimiento $U = \bigcup U_i$. Si $U' = \bigcup U'_i$ es otro recubrimiento, un refinamento de U, existe un morfismo natural $H^p(U,\mathcal{F}) \longrightarrow H^p(U',\mathcal{F})$. Se define $H^p(X,\mathcal{F}) = \lim_U H^p(U,\mathcal{F})$.
Observaciones.

1. Si X es un esquema afín, entonces $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ para cada $p > 0$ y todo haz coherente $\mathcal{F}$.

2. Si U es un recubrimiento afín de X, basta calcular $H^p(U, \mathcal{F})$ para calcular $H^p(X, \mathcal{F})$, sin que sea necesario calcular limites.

3. $\mathcal{F}(X) = H^0(X, \mathcal{F})$.

Teorema 50 *Si X es un esquema de tipo finito sobre $\mathbb{K}$ y $\mathcal{F}$ es un haz coherente, $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ para cada $p > \dim X$.*

Idea de la cosa. Supongamos que $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e irreducible di $\dim X = r$. Entonces existen $H_0, \ldots, H_r$ hyperplanes tales que $X \cap H_0 \cap \ldots \cap H_r = \emptyset$, $\Rightarrow$ $X = \bigcup_{i=0}^r U_i$, con $U_i = X \backslash H_i$ que son abiertos afines.

Definición 51 (Característica de Euler) $\chi(\mathcal{F}) = \sum_p (-1)^p h^p(X, \mathcal{F})$ *donde* $h^p(X, \mathcal{F}) = \dim H^p(X, \mathcal{F})$.

Cohomología de $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l)$ El recubrimiento será dado por $U = \{U_0, U_1, U_2\}$, donde $U_i = \{x_i \neq 0\}$

$$\mathcal{C}^0(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{C}^2(U, \mathcal{F})$$

$$\mathcal{F}(U_0) \times \mathcal{F}(U_1) \times \mathcal{F}(U_2) \qquad \mathcal{F}(U_0 \cap U_1) \times \mathcal{F}(U_0 \cap U_2) \times \mathcal{F}(U_1 \cap U_2) \qquad \mathcal{F}(U_0 \cap U_1 \cap U_2)$$

Recodamos que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l) = \widetilde{S(l)}$ y $S(l) = \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ shiftado de l en el grado. Tenemos

$$\mathcal{F}(U_0) = \left\{ \frac{F}{x_0^a} \mid F \in S_{l+a} \right\} \quad \mathcal{F}(U_1) = \left\{ \frac{F}{x_1^a} \mid F \in S_{l+a} \right\} \quad \mathcal{F}(U_2) = \left\{ \frac{F}{x_0^a} \mid F \in S_{l+a} \right\}$$

Observamos que

$$U_i = D_+(x_i) \quad U_i \cap U_j = D_+(x_i x_j) \quad U_i \cap U_j \cap U_k = D(x_i x_j x_k)$$

entonces podemos sacar que

$$\mathcal{F}(U_0 \cap U_1) = \left\{ \frac{F}{(x_0 x_1)^a} \mid F \in S_{l+2a} \right\}$$

y analogamente para otras intersecciones

$$\mathcal{F}(U_0 \cap U_1 \cap U_2) = \left\{ \frac{F}{(x_0x_1x_2)^a} \mid F \in S_{l+3a} \right\}$$

Vamos ahora a ver como se portan las aplicaciones de borde de Cech $\mathcal{C}^i \longrightarrow \mathcal{C}^{i+1}$

$$\left(\frac{F_0}{x_0^a}, \frac{F_1}{x_1^a}, \frac{F_2}{x_2^a} \right) \longmapsto \left(\frac{x_0^aF_1 - x_1^aF_0}{(x_0x_1)^a}, \frac{x_0^aF_2 - x_2^aF_0}{(x_0x_2)^a}, \frac{x_1^aF_2 - x_2^aF_1}{(x_1x_2)^a} \right)$$

$$\left(\frac{G_{01}}{(x_0x_1)^a}, \frac{G_{02}}{(x_0x_2)^a}, \frac{G_{12}}{(x_1x_2)^a} \right) \longmapsto \frac{x_0^aG_{12} - x_1^aG_{02} + x_2^aG_{01}}{(x_0x_1x_2)^a}$$

Cálculo de la cohomología

- $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l))$

  Estoy buscando las secciones globales del fibrado por lo que hemos dicho antes, que por la exactitud son el núcleo del primer morfismo, entonces usamos la regla

  $$x_0^aF_1 - x_1^aF_0 = 0 \;\Rightarrow\; x_0^aF_1 = x_1^aF_0 \;\Rightarrow\; \frac{F_1}{x_1^a} = \frac{F_0}{x_0^a}$$

  Obtenemos los polinomios homogéneos de grado l

- $H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l))$

  Cogemos $F \in S_{l+3a}$. Tenemos que

  $$\frac{F}{(x_0x_1x_2)^a} \in \operatorname{Im}\delta_1 \iff F \in (x_0^a, x_1^a, x_2^a).$$

  Si $\deg F > 3(a-1)$, hay por lo menos un termino para cada monomio entre x_0, x_1 y x_2 que aparece con grado $\geq a$, entonces $F \in (x_0^a, x_1^a, x_2^a)$.
  $l + 3a \geq 3a - 3 + 1 \Leftrightarrow l \geq -2$ significa que cualquier elemento de $\mathcal{C}^2$ está en la imagen de $\mathcal{C}^1$, así que $H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l)) = 0$.
  Generalizando $\Rightarrow$ $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) = 0$ si $l \geq -n$, en $\mathbb{P}^n$.
  En nuestro caso si $l = -3$ (o $l = -n-1$ en general), obtengo $\deg F = 3a - 3$.
  $H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3))$ está generado por la clase de $\dfrac{x_0^{a-1}x_1^{a-1}x_2^{a-1}}{(x_0x_1x_2)^a} = \dfrac{1}{x_0x_1x_2}$
  Todo se puede generalizar así que $h^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)) = 1$.
  Si $l \leq -3$ consideramos la aplicación

  $$S_{-3-l} \times H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l)) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3))$$

  $$\left(G, \left[\frac{F}{(x_0x_1x_2)^a} \right] \right) \longmapsto \left[\frac{GF}{(x_0x_1x_2)^2} \right]$$

esto es un par perfecto perfecto de dualidad, $\Rightarrow \quad H^2(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l)) \simeq S^*_{-3-l}$ como $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.
En general

$$H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) \simeq S^*_{-n-1-l} \text{ para } \mathbb{P}^n \text{ como } \mathbb{K}\text{-espacios vectoriales}$$

Esto ya nos dice para $\mathbb{P}^n$ que en los extremos tenemos "polinomios homogéneos", tanto en H^0 cuanto en H^n.

- $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l))$
  Tomamos

$$\left(\frac{G_{01}}{(x_0x_1)^a}, \frac{G_{02}}{(x_0x_2)^a}, \frac{G_{12}}{(x_1x_2)^a}\right) \in \ker(\delta_1) \iff x_0^a G_{12} - x_1^a G_{02} + x_2^a G_{01} \overset{(*)}{=} 0$$

tenemos que

$$x_0^a G_{12} \in (x_1^a, x_2^a) \;\Rightarrow\; G_{12} \in (x_1^a, x_2^a)$$

observando que (x_1^a, x_2^a) no es primo pero es primario, y la flecha esta dada por el hecho $x_0^a \notin \sqrt{(x_1^a, x_2^a)}$.

$$G_{12} = x_1^a F_2 - x_2^a F_1 \overset{por\,(*)}{\Rightarrow} x_0^a x_1^a F_2 - x_0^a x_2^a F_1 - x_1^a G_{02} + x_2^a G_{01} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1^a(x_0^a F_2 - G_{02}) = x_2^a(x_0^a F_1 - G_{01}) \;\Rightarrow\; \exists\, F_0 \text{ t.q } \begin{array}{l} x_0^a F_2 - G_{02} = x_2^a F_0 \\ x_0^a F_1 - G_{01} = x_1^a F_0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \ker \delta_1 = \operatorname{Im} \delta_0 \;\Rightarrow\; H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(l)) = 0 \;\; \forall\, l \in \mathbb{Z}.$$

Analogamente

$$H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) = 0 \;\; \forall\, l \in \mathbb{Z}.$$

Al final

$$H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) = \begin{cases} S_l & p = 0 \\ 0 & 0 < p < n \\ S^*_{-n-1-l} & p = n \end{cases} \qquad (*)$$

¿Esto siempre es cierto?
Consideramos

$$\begin{array}{ccc} S^{n+1} & \longrightarrow & S(1) \\ (F_0, \ldots, F_n) & \longmapsto & x_0F_0 + \ldots + x_nF_n \end{array}$$

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \longrightarrow 0$$

- $H^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}(l)) = 0$ si $l \leq 0$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}(1)) \arrow[r] & H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})^{n+1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\simeq"'] & H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & H^1(\Omega_{\mathbb{P}^n}(1)) \arrow[r] & 0 \\
& & \mathbb{K}^{n+1} & S_1 & &
\end{tikzcd}$$

$$(\lambda, \ldots, \lambda_n) \longmapsto (\lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_n x_n)$$

luego se descubre que φ es un isomorfismo, entonces

$$H^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}(1)) = H^1(\Omega_{\mathbb{P}^n}(1)) = 0$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(\Omega_{\mathbb{P}^n}(l)) \arrow[r] & H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l-1))^{n+1} \arrow[r, "(*)"] & H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) \arrow[dll] \\
& H^1(\Omega_{\mathbb{P}^n}(l)) \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

En general $H^p(\Omega_{\mathbb{P}^n}(l)) = 0$ si $2 \leq p \leq n-1$. Observamos además que $(*)$ es sobreyectiva si $l > 0$ y 0 si $l < 0$, entonces

$$H^1(\Omega_{\mathbb{P}^n}(l)) = 0 \text{ si } l \neq 0 \text{ y } h^1(\Omega_{\mathbb{P}^n}) = 1.$$

Demostración alternativa de que $H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) = 0$ si $0 < p < n$, para cada $l \in \mathbb{Z}$, atención de todas formas al caso $p = 1$, hay algo que corregir.
Por inducción sobre n. Si $n = 1$ es trivial o si $n = 2$ es el caso que hemos visto. Truco, ver $\mathbb{P}^n$ como hiperplano de $\mathbb{P}^{n+1}$. Considero la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S(-1) \longrightarrow \frac{S}{(x_n)} \longrightarrow 0$$

con $S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ y $\frac{S}{(x_n)} \simeq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_{n-1}]$. Hacificando la sucesión exacta si tiene

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \longrightarrow 0$$

donde identificamos $\mathbb{P}^{n-1} = H_n = V(x_n) \hookrightarrow \mathbb{P}^n$.
Tensorizado por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l) \;\; \Rightarrow$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l) \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(l) \longrightarrow 0.$$

Por hipotesis de inducción

$$H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l-1)) \longrightarrow H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) \begin{cases} \simeq & \text{si} \quad 2 \leq p \leq n-2 \\ \text{epi} & \text{si} \quad p = 1 \\ \text{mono} & \text{si} \quad p = n-1 \end{cases}$$

Si $2 \leq p \leq n-2$
$$h^p(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l-1)) = h^p(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l))$$
así que
$$\ldots = h^p(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2)) = h^p(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) = h^p(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = h^p(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = \ldots$$
si $p = 1$
$$\ldots \geq h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) \geq h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \geq h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \geq \ldots$$
si $p = n-1$
$$\ldots \leq h^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) \leq h^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \leq h^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \leq \ldots$$
Aquí hay que utilizar un teorema fuerte de Serre.

Teorema 52 (Serre) *Si $\mathcal{F}$ en un haz coherente sobre $\mathbb{P}^n$, entonces $\exists l_0 >> 0$ tal que $\forall l > l_0$, $H^p(\mathcal{F}(l)) = 0 \ \forall\, p > 0$.*

Con esto tenemos que $h^p(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) = 0$ para cada $2 \leq p \leq n-2$ y $h^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) = 0$. Queda abierto el h^1.
Coletilla del teorema di Serre. Además, si $\mathcal{F}$ es localmente libre, $H^p(\mathcal{F}(l)) = 0$, $\forall\, l << 0$ y $\forall\, p < n$.
Vamos a ver que pasa para un haz coherente $\mathcal{F}$: de
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l) \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(l) \longrightarrow 0$$
tensorizando por $\mathcal{F}$ no se preserva la exactitud a la derecha salen así los funtores derivados!
Supongamos que $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ sea una sucesión exacta de haces coherentes. Considerando $\mathcal{H}om(\mathcal{G}, -)$ obtenemos
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}om(\mathcal{G},\mathcal{F}') \arrow[r] & \mathcal{H}om(\mathcal{G},\mathcal{F}) \arrow[r] & \mathcal{H}om(\mathcal{G},\mathcal{F}'') \arrow[dll] \\
 & \mathcal{E}xt^1(\mathcal{G},\mathcal{F}') \arrow[r] & \mathcal{E}xt^1(\mathcal{G},\mathcal{F}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$
Considerando de otro lado $\mathcal{H}om(-, \mathcal{G})$ obtenemos
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}om(\mathcal{F}'',\mathcal{G}) \arrow[r] & \mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G}) \arrow[r] & \mathcal{H}om(\mathcal{F}',\mathcal{G}) \arrow[dll] \\
 & \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}'',\mathcal{G}) \arrow[r] & \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F},\mathcal{G}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$
Si $\mathcal{F}$ es localmente libre, entonces $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$, $\forall\, i > 0$, $\mathcal{G}$ coherente (2). **Obervación**. ¿Porqué pusimos $\mathcal{H}om$?

$\mathcal{H}om(\mathcal{G}, -)$ el haz de homomorfismos de G en $-$.
$\mathrm{Hom}(G, -)$ son los homomorfismos de $\mathcal{G}(X)$ a ${}_{(}X)$, creo que sean lo morfismos globales, esto ya no es un haz

$$\left.\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&]
0 \arrow[r] \& \mathrm{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \arrow[r] \& \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \arrow[r] \& \mathrm{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \arrow[dll] \\
\& \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \arrow[r] \& \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \arrow[r] \& \cdots
\end{tikzcd}\right\} (1)$$

Analogamente para $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{G})$ y $\mathcal{H}om(-, \mathcal{G})$.
Observación. Si $\mathcal{G}$ es localmente libre

- $\mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{F}$

- $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong H^0(\mathcal{G}^* \otimes \mathcal{F})$

Razón Si M es A-módulo libre, $\mathrm{Hom}_A(M, N) \simeq M^* \otimes_A N$ con isomorfismo $\varphi \otimes n \longmapsto \{m \mapsto \varphi(m) \cdot n\}$.
Consecuencia. Si $\mathcal{G}$ es localmente libre, de (1) se saca

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{G}^* \otimes \mathcal{F}') \longrightarrow H^0(\mathcal{G}^* \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(\mathcal{G}^* \otimes \mathcal{F}'')$$

Como $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ queda exacta al tensorizar por $\mathcal{G}^*$, y se tiene $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = H^i(\mathcal{G}^* \otimes \mathcal{F})$.
Observación. $\mathcal{G}$ localmente libre NO IMPLICA que $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = 0 \; \forall i > 0$, en contradicción con (2).
Ejemplo. $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$, $\mathcal{F} = \Omega_{\mathbb{P}^n} \implies \mathrm{Ext}^i(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = H^1(\Omega_{\mathbb{P}^n}) \neq 0!$

Teorema de la Dualidad de Serre

Si X es una variedad lisa, tiene un fibrado cotangente Ω_X (localmente libre de rango igual a $\dim X$ generado por las diferenciales). Si $Y \subset X$ subvariedad lisa, existe $\Omega_{X|Y} \longrightarrow \Omega_{|Y}$ epimorfismo que consiste en las restricciones de las diferenciales.

Definición 53 *Se llama FIBRADO CONORMAL de Y en X al núcleo del epimorfismo de arriba. Se llama FIBRADO NORMAL de Y en X al dual del fibrado conormal, denotado con $N_{Y|X}$.*

Observaciones.

1. Si $f_1, \dots, f_r$ son ecuaciones en un abierto de X que definen Y, entonces $N^*_{Y|X}$ esta generado por $f_1, \dots, f_r$.(per me sono i differenziali)

2. Por ser Y, X lisos se puede tomar $r = \operatorname{codim} Y = \dim X - \dim Y$.

Puedo definir $\mathcal{I}_{Y,X} \xrightarrow{\varphi} i_* N^*_{Y|X}$, que localmente es

$$g_1 f_1 + \cdots + g_r f_r \longmapsto (g_1 df_1 + \cdots + g_r df_r)_{|Y}$$

donde estoy restringiendo al abierto donde está definido todo.
¿ Que ocurre si $g_1 f_1 + \cdots + g_r f_r = 0$?
Esto implica que $g_1 df_1 + \cdots + g_r df_r + dg_1 f_1 + \cdots + dg_r f_r = 0$. Siendo las f_j las ecuaciones que definen Y en X cuando restrinjo a Y la ultima equivalencia, la segunda mitad me sale cero. Así que tiene que ser $g_1 df_1 + \cdots + g_r df_r = 0$, que nos dice que φ esta bien definida.
Conclusión. $\ker \varphi = \mathcal{I}^2_{Y,X}$, obteniendo la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{I}^2_{X,Y} \arrow[r] & \mathcal{I}_{X,Y} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Omega_{X|Y} \arrow[r] & \Omega_Y \arrow[r] & 0 \\
& & & i_* N^*_{Y|X} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $N^*_{Y|X} \simeq \dfrac{\mathcal{I}_{Y,X}}{\mathcal{I}^2_{Y,X}}$ que una estructura de $\dfrac{\mathcal{O}_X}{\mathcal{I}_{Y,X}} = \mathcal{O}_Y$-módulo. No necesito hacer el i_* en este caso porque ya estoy en el ambiente justo.
Observación. En general se define el haz conormal como $\dfrac{\mathcal{I}_{Y,X}}{\mathcal{I}^2_{Y,X}}$ cociente.

Dada X lisa de dimensión n, se llama *fibrado lineal canonico* a $\bigwedge^n \Omega_X$ y cualquier divisor suyos (divisor asociados al fibrado) se llama *divisor canonico*.
Notación ω_X: haz canónico que corresponde al fibrado lineal.

Teorema 54 (el Gordo) *Si $X \subset P$ variedades lisas irreducibles y $r = \operatorname{codim} X$, entonces*

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_X, \omega_P) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq r \\ \omega_X & si \quad i = r \end{cases}$$

CASO PROYECTIVO

Sea $X = \mathbb{P}^n$. Se puede construir una aplicación

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \times H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-d-1)) \longrightarrow \underbrace{H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1))}_{\dim 1}$$

observando que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1) = \omega_{\mathbb{P}^n}$.

Siempre es importante tener a mente la sucesión

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0$$

llamada "Sucesión de Euler".

En general se puede definir $H^0(X, \mathcal{F}) \times H^i(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$. Mas en general existe algo del tipo $H^i(\ ) \times H^j(\ ) \longrightarrow H^{i+j}(\ )$. Vamos a dar una idea de lo que esta pasando, el significado es

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0\} / \sim$$

Dos extensiones son equivalentes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{H}' \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

si existe h isomorfismo (que es isomorfismo por el lema de la serpiente) tal que el diagrama conmuta. En general

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{H}_i \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0\} / \sim$$

donde la relación de equivalencia

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{H}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}_i \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0 \\
 & & {} & {} & {} & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{H}_1' \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{H}_i' \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

se en numero finito de paso (las flechas pueden ir arriba o abajo, pero el mismo paso van a la misma dirección) relaciono las dos sucesiones.

De forma limpia

$$H^i(X, \mathcal{F}) \times \mathrm{Ext}^j(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = H^{i+j}(X, \mathcal{G})$$

que obtenemos observando que $H^i(X, \mathcal{F}) = \operatorname{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ y uniendo su sucesión exacta del Ext con la de $\operatorname{Ext}^j(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ tenemos

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 & & \\
 & & 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[ur] \arrow[r] & \cdots_{i\,pasos} \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r] & 0 \\
 & & \cdots_{l\,pasos} \arrow[ur] & & & & \\
 & \mathcal{G} \arrow[ur] & & & & & \\
0 \arrow[ur] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

y uniendo las dos sucesiones ya hemos generalizado.

Teorema 55 (Dualidad de Serre) *Si X es una variedad lisa, entonces*

i) $h^n(X, \omega_X) = 1$

ii) *La aplicación*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \times \operatorname{Ext}^{n-i}(\mathcal{F}, \omega_X) \longrightarrow H^n(X, \omega_X)$$

es un emparejamiento perfecto y por tanto

$$\operatorname{Ext}^{n-i}(\mathcal{F}, \omega_X) \cong H^i(X, \mathcal{F})^*.$$

En particular si $\mathcal{F}$ es localmente libre tenemos la versión "famosa" del Teorema de Dualidad de Serre

$$H^{n-i}(X, \mathcal{F}^* \otimes \omega_X) \cong H^i(X, \mathcal{F})^*$$

Idea de la demostración.
Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ entonces por el teorema Gordo

$$\omega_X = \mathcal{E}xt^{N-n}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^N}).$$

Cogemos

$$H^n(X, \mathcal{E}xt^{N-n}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^N}))$$

observando que no siempre el $H^0(\mathcal{E}xt) = \mathrm{Ext}$ porque a lo mejor $\mathcal{E}xt$ solo es un prehaz.
Puedo pero siempre asociar, gracias a sucesiones espectrales

$$H^i(X, \mathcal{E}xt^j(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \rightsquigarrow \mathrm{Ext}^{i+j}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

la idea, muy imprecisa, es coger las parejas i, j con suma fija y hacer una especie de suma directa de todos $H^i(\mathcal{E}xt^j)$.
Siempre por el teorema Gordo

$$H^n(X, \mathcal{E}xt^{N-n}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^N}) \rightsquigarrow \mathrm{Ext}^N(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^N}) = \underbrace{H^N(\omega_{\mathbb{P}^N})}_{\dim 1}$$

Fórmula de Adjunción Sea X una variedad lisa y F un fibrado vectorial de rango r con una sección s que se anula en $Y \subset X$ lisa de codimensión r, entonces $N_{Y|X} = F_{|U}$.
Localmente $X = \bigcup U_i$ de forma que $F_{|U_i} \simeq U_i \times \mathbb{K}^r$ entonces $s_{|U_i} = (f_{i_1}, \ldots, f_{i_r})$ con $f_{i_j} \in \mathcal{O}_X(U_j)$, son funciones regulares; tengo que las ecuaciones locales de Y in X son exactamente las f_{i_j}. $N^*_{Y|X}$ es generado localmente en $U_i \cap Y$ por $df_{i_1}, \ldots, df_{i_r}$.
Paso de U_i a U_j.
En $U_i \cap U_j$

$$\begin{pmatrix} f_{i_1} \\ \vdots \\ f_{i_r} \end{pmatrix} = A_{ij} \begin{pmatrix} f_{j_1} \\ \vdots \\ f_{j_r} \end{pmatrix}$$

donde A_{ij} son las matrices de transición del fibrado F que ya tengo dadas con el fibrado.
Hago la diferencial de $f_{i_1} = a_{11} f_{j_1} + a_{12} f_{j_2} + \ldots + a_{1r} f_{j_r}$ que me sale

$$df_{i_1|Y} = a_{11} df_{j_1|Y} + a_{12} df_{j_2|Y} + \ldots + a_{1r} df_{j_r|Y}$$

restringiendo a Y los demás términos se han quedado nulos porque son exactamente los términos que definen Y

$$\begin{pmatrix} df_{i_1|Y} \\ \vdots \\ df_{i_r|Y} \end{pmatrix} = A_{ij|Y} \begin{pmatrix} df_{j_1|Y} \\ \vdots \\ df_{j_r|Y} \end{pmatrix}$$

entonces tenemos que

$$g_1 df_{i_1|Y} + g_2 df_{i_2|Y} + \ldots + g_r df_{i_r|Y} = (g_1, \ldots, g_r) \begin{pmatrix} df_{i_1|Y} \\ \vdots \\ df_{i_r|Y} \end{pmatrix} = \underbrace{(g_1, \ldots, g_r) A_{ij|Y}}_{(g'_1, \ldots, g'_r)} \begin{pmatrix} df_{j_1|Y} \\ \vdots \\ df_{j_r|Y} \end{pmatrix}$$

así que tenemos

$$\begin{pmatrix} g_1' \\ \vdots \\ g_r' \end{pmatrix} = {A_{ij}}^T_{|Y} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \end{pmatrix}$$

Las coordenadas en U_i son la $g_1, \ldots, g_r$ y para obtener las coordenadas en U_j, las $g_1', \ldots, g_r'$, tengo que multiplicar por ${A_{i,j}}^T_{|Y}$.

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \end{pmatrix} = \left({A_{ij}}^T_{|Y}\right)^{-1} \begin{pmatrix} g_1' \\ \vdots \\ g_r' \end{pmatrix}$$

esto es el pasaje por el fibrado conormal, por el fibrado normal dualizo y ya tengo todo.
Cálculo de $\mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^N})$. Sabemos que $\mathcal{O}_X = \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}{\mathcal{I}_{X,\mathbb{P}^N}}$ y $\mathcal{I}_{X,\mathbb{P}^N}$ localmente está generado por $f_1, \ldots, f_r$.
X localmente está definida por $f_1, \ldots, f_r$, tantas funciones cuanta es la codimensión.
Localmente si $A = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(U)$ tengo el *complejo de Koszul*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A = \bigwedge^r A^r \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bigwedge^2 A^r \arrow[r] & A^r \arrow[rr] \arrow[dr] & & A \arrow[r] & \dfrac{A}{(f_1, \ldots, f_r)} \arrow[r] & 0 \\
& & & & & (f_1, \ldots, f_r) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Nos dice que localmente

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_U \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{O}_U^r \longrightarrow \mathcal{O}_U \longrightarrow \mathcal{O}_{X\cap U} \longrightarrow 0$$

tengo una solución libre.
Cogiendo polinomios tengo

$$0 \longrightarrow S(-N-1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S(-2)^{\binom{N+1}{2}} \longrightarrow S(-1)^{N+1} \longrightarrow S \longrightarrow \frac{S = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]}{(x_0, \ldots, x_n)} \simeq \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

y los haces asociados

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-N-1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-2)^{\binom{N+1}{2}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-1)^{N+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N} \longrightarrow 0$$

Localmente tengo isomorfismos del tipo

$$\mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^N})_{|U} \cong {\omega_{\mathbb{P}^N}}_{|U}.$$

El isomorfismo está dado en dependencia de la elección de $f_1, \dots, f_r$, tenemos que ver lo que pasa cuando cambio representantes. De todas formas el cambio es relacionado con los cambios en el fibrado conormal que hemos visto antes, al final vamos a tener

$$\mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^N}) \cong \omega_{\mathbb{P}^N} \otimes \det N_{X,\mathbb{P}^N} \cong \omega_X \quad (*).$$

Cogiendo la sucesión

$$0 \longrightarrow N^*_{X,\mathbb{P}^N} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^N|X} \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow 0$$

y tomando determinantes

$$\omega_{\mathbb{P}^N} \simeq \det N^*_{X,\mathbb{P}^N} \otimes \omega_X$$

que nos da exactamente $(*)$. El determinante en realidad tendría que ser el producto exterior pero en este caso coinciden.

Teorema de Riemann-Roch

Sea E un fibrado de rango r sobre X lisa proyectiva y s una sección de E que se anule exactamente un una subvariedad $Y \subset X$ lisa de codimensión r. Ya hemos visto que $N_{Y/X} = E_{|Y}$.

Hemos hablado también del fibrado conormal en la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \underbrace{N^*_{Y/X}}_{r} \longrightarrow \underbrace{\Omega_{X|Y}}_{n} \longrightarrow \underbrace{\Omega_Y}_{n-r} \longrightarrow 0$$

Podemos sacar de esta sucesión

$$\underbrace{\bigwedge^n \Omega_{X|Y}}_{\omega_{X|Y}} \simeq \left(\bigwedge^r N*_{Y/X}\right) \otimes \underbrace{\left(\bigwedge^{n-r} \Omega_Y\right)}_{\omega_Y}.$$

Si Y está definida así entonces

$$\omega_Y = \det N_{Y/X} \otimes \omega_{X|Y}$$

Si $r = 1$ cogemos $E = L = \mathcal{O}_X(Y)$ entonces

$$\omega_Y = L_{|Y} \otimes \omega_{X|Y} = (\mathcal{O}_X(Y) \otimes \omega_X)_{|Y}$$

o visto de forma divisorial

$$K_Y = (Y + K_X)_{|Y}.$$

Ejemplo. Si $X = \mathbb{P}^n$ y Y es intersección completa de r hypersuperficies de grado $d_1, \ldots, d_r$ ($\Leftrightarrow Y$ es el lugar de ceros de una sección de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_r)$).
Hemos visto que $\omega_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$ y que $N_{Y/\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_Y(d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_Y(d_r)$, así que $\det N_{Y/\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_Y(d_1 + \cdots d_r)$ y por la formula de adjunción

$$\omega_Y = \mathcal{O}_Y(-n-1+d_1+\cdots d_r).$$

El Teorema de Riemann Roch en una variedad X es una formula que calcula, para cada haz coherente $\mathcal{F}$, la característica de $\mathcal{F}$

$$\chi(\mathcal{F}) = h^0(X,\mathcal{F}) - h^1(X,\mathcal{F}) + h^2(X,\mathcal{F}) + \cdots + (-1)^n h^n(X,\mathcal{F})$$

en función de ciertos invariantes de $\mathcal{F}$ y X.
Vamos a coger $\dim X = 1, 2$ y $\mathcal{F}$ haz invertible (hacemos los casos simples).

Riemann-Roch para fibrados lineales en curvas Sea C una curva lisa y L un fibrado lineal.
Supongamos que L tiene una sección no nula que se anula en un esquema $D \overset{i}{\subset} C$. Tenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{D,C} = \mathcal{O}_C(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow i_*\mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

donde $i_*\mathcal{O}_D$ es un haz soportado en puntos en puntos(si U es un abierto de C que no contiene a los puntos entonces $(i_*\mathcal{O}_D)(U) = \mathcal{O}_C(\underbrace{D \cap U}_{\emptyset}) = 0$). Observamos que $(\mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_C(D))_{|D} = (\mathcal{O}_C(D))_{|D} = \mathcal{O}_D$. Dicho esto tensorizamos nuestra sucesión por $L = \mathcal{O}_C(D)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{O}_C(D) = L \longrightarrow i_*\mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

Tenemos

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_C) + \chi(i_*\mathcal{O}_D)$$

donde $\chi(i_*\mathcal{O}_D) = h^0(C, i_*\mathcal{O}_D) - h^1(C, i_*\mathcal{O}_D)$.
Si $D = \sum d_i p_i \rightsquigarrow \sum d_i = \deg D = h^0(C, i_*\mathcal{O}_D)$, mientras $h^1(C, i_*\mathcal{O}_D) = 0$ porque estamos sobre puntos ($\dim 0$) y la cohomología se anula por i mayores de la dimensión. Nos falta el trozo

$$\chi(\mathcal{O}_C) = h^0(C, \mathcal{O}_C) - h^1(C, \mathcal{O}_C)$$

donde $h^0(C, \mathcal{O}_C) = 1$ y por dualidad de Serre $h^1(C, \mathcal{O}_C) = h^0(C, \omega_C) = g$ género de la curva.
Conclusión

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_C(D)) &= h^0(C, \mathcal{O}_C(D)) - h^1(C, \mathcal{O}_C(D)) = h^0(C, \mathcal{O}_C(D)) - h^0(C, \mathcal{O}_C(K_C - D)) \\ &= 1 - g + \deg D \end{aligned}$$

Si D es un divisor arbitrario, existe D' suficientemente amplio, grande, positivo t.q. $D+D'$ también es muy amplio. En término de fibrados dado L un fibrado lineal existe L' muy amplio t.q. $L \otimes L'$ es muy amplio.
Repito el truco

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{O}_C(D') \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{D'} \longrightarrow 0$$

tensorizo por $\mathcal{O}_C(D)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(D) \longrightarrow \mathcal{O}_C(D+D') \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{D'} \longrightarrow 0$$

Como antes

$$\chi(\mathcal{O}_C(D+D')) = \chi(\mathcal{O}_C(D)) + \chi(i_*\mathcal{O}_{D'})$$

con $\chi(i_*\mathcal{O}_{D'}) = \deg D'$ el calculo es lo mismo y por lo que hemos visto antes $\chi(\mathcal{O}_C(D+D')) = 1-g+\deg(D+D') = 1-g+\deg D+\deg D'$ así que vale

$$\chi(\mathcal{O}_C(D)) = \deg D + 1 - g$$

para cualquier divisor.
Si $D = K_C$ entonces $\mathcal{O}_C(D) = \omega_C$ ¿que me dice esto?
Sabemos que $\chi(K_C) = \deg K_C + 1 - g$ y ademas que $\chi(K_C) = h^0(C, \omega_C) - h^1(C, \omega_C)$ donde $h^0(C, \omega_C) = g$ y por la dualidad de Serre $h^1(C, \omega_C) = h^0(C, \mathcal{O}_C) = 1$. Podemos sacar que

$$\deg K_C = 2g - 2.$$

Si C es una curva plana lisa de $\mathbb{P}^2$ de grado d significa $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(C) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$ o igualmente que C es lugar de ceros de una sección de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$. Por la formula de adjunción:

$$\omega_C = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3+d))_{|C}$$

y

$$2g-2 = \deg \omega_C = d(d-3) = d^2 - 3d$$

obtenemos la formula

$$g = \frac{d^2-3d+2}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Riemann-Roch para superficies Sea S una superficie lisa y sea $L = \mathcal{O}_S(D)$ con D curva lisa y $D \overset{i}{\hookrightarrow} S$. Como antes L tiene una sección que se anula en D

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{S,D} = \mathcal{O}_S(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow i_*\mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

tensorizo por $\mathcal{O}_S(D)$ y obtengo

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_S(D) \longrightarrow i_*(\mathcal{O}_D(D)) \longrightarrow 0$$

Observamos que $i_*(\mathcal{O}_D(D)) = (\mathcal{O}_S(D))_{|D}$ esta vez la restricción no es trivial porque tengo una curva en lugar de puntos como divisor. Tenemos

$$\chi(\mathcal{O}_S(D)) = \chi(\mathcal{O}_S) + \chi(i_*(\mathcal{O}_D(D)))$$

donde $\chi(\mathcal{O}_S) = h^0(S,\mathcal{O}_S) - h^1(S,\mathcal{O}_S) + h^2(S,\mathcal{O}_S)$ con $h^0(S,\mathcal{O}_S) = 1$, por dualidad de Serre $h^1(S,\mathcal{O}_S) = h^1(S,\omega_S) = q$ que se llama *irregularidad*, y siempre por Serre $h^2(S,\mathcal{O}_S) = h^=(S,\omega_S) = p_g$ que se llama *género geométrico*. El otro troz es $\chi(i_*(\mathcal{O}_D(D))) = \chi(i_* L_{|D})$. Para ver un poquito lo que no has salido hacemos una pequeña

Paréntesis: Teoría de Hodge Sia X una variedad proyectiva compleja

i) $H^i(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}(X)$ donde $H^{p,q}(X) = H^p(X,\Omega_X^q)$ denotando $\Omega_X^q = \bigwedge^q \Omega_X$

ii) $H^{p,q}(X) = \overline{H^{q,p}(X)}$

Fin Paréntesis

En nuestro caso $H^1(S,\omega_S) = H^1(S,\bigwedge^2\Omega_S = H^{1,2}(S) = \overline{H^{2,1}(S)}$ y el $H^{2,1}(S) = H^2(S,\Omega_S)$. Así que podemos también calcular la irregularidad como

$$q = h^0(S,\Omega_S).$$

Vamos a ver el otro trozo

$$\begin{aligned} \chi(i_* L_{|D}) &= h^0(S, i_* L_{|D}) - h^1(S, i_* L_{|D}) + h^2(S, i_* L_{|D}) \\ &= h^0(D, L_{|D}) \quad - h^1(D, L_{|D}) \quad + \underbrace{h^2(D, L_{|D})}_{=0} \end{aligned}$$

y por el teorema de Riemann-Roch para curvas $\chi(L_{|D}) = \deg(L_{|D}) + 1 - g(D)$.
Recordar que $L = \mathcal{O}_S(D)$ ¿Que es $\deg(L_{|D})$?
En general si $L = \mathcal{O}_S(D)$ con D divisor y D' curva lisa de S, puedo definir

$$D.D' = \deg(L_{|D'}).$$

Si $L = \mathcal{O}_S(D)$ y D' es arbitrario, entonces existe D'' suficientemente amplio tal que $D' + D''$ sea amplio lo justo para parecer una curva lisa

$$\left.\begin{array}{c} D.(D'+D'') = \deg(L_{|D'+D''}) \\ D.D'' = \deg(L_{|D''}) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ defino } D.D'' = \deg(L_{|D'+D''}) - \deg(L_{|D''}).$$

Hemos descubierto que $\deg(L_{|D}) = D.D = D^2$: hecho el primer trozo.
¿$g(D)$?
Por la formula de adjunción $K_D = (K_S + D)_{|D}$ y $K_S.D + D^2 = \deg(K_D)$. Podemos sacar $2g(D) - 2 = K_S.D + D^2$ y al final

$$g(D) = \frac{K_S.D + D^2}{2} + 1.$$

Conclusión

$$\begin{array}{rcl}\chi(\mathcal{O}_S(D)) & = & \chi(\mathcal{O}_S) + D^2 + 1 - \left(\frac{K_S.D+D^2}{2}\right) + 1 = \\ & = & \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{D^2 - K_S.D}{2}\end{array}$$

Observamos que esto está demostrado para D efectivo y todo lo demás bonito. Por D general haremos el mismo truco de siempre: cogemos D'' suficientemente amplio tal que $D + D''$ sea suficientemente amplio y ......
Al final la formula vale para todo divisor.

Aplicaciones sobre Curvas

Sea X un esquema con todas las buenas propiedades que hemos visto y sea L un fibrado lineal con $h^0(X, L) = n + 1$. Ya hemos visto que se puede construir una aplicación

$$\varphi_L : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

donde el espacio de llegada es el espacio proyectivo cuyos hiperplanos son elementos de $H^0(X, L)$.
Quiero decir que para cada hiperplano H tengo una correspondencia

$$\begin{array}{ccc} H \subset \mathbb{P}^n & \longleftrightarrow & s \in H^0(X, L)\backslash\{0\} \\ D = H \cap \varphi_L(X) & \longrightarrow & (s)_0 = D \end{array}$$

donde cuidado, esta intersección es una intersección de esquemas, donde pueden pasar todas las cosas malas que ya hemos visto (multiplicidades, ...).

Teoría de Curvas Sea X un esquema liso, irreducible, reducido, propio de dimensión 1 (son todas las propiedades "buenas"). Fijamos L fibrado lineal sobre X. Por Riemann-Roch $h^0(X, L) - h^1(X, L) = \deg L + 1 - g$, donde por la dualidad de Serre $h^1(X, L) = h^0(X, \omega_X \otimes L^{-1})$ y $\omega_X \otimes L^{-1}$ tiene grado $2g - 2 - \deg L$.

Corolario 56 *Si* $\deg L > 2g - 2$ *entonces* $h^0(X, L) = \deg(L) + 1 - g$.

¿Cuándo podemos decir que φ_L define un morfismo?
Observamos que $\varphi_L : X \longrightarrow \mathbb{P}^N$ define un morfismo $\iff$ L es generado por sus secciones globales $\iff$ $\forall\, x \in X \ \ \exists \ s \in H^0(X, L)$ tal que $s(p) \neq 0$.
Cogemos la sucesión

$$0 \longrightarrow L \otimes \mathcal{I}_{p,X} \longrightarrow L \longrightarrow L_{|_p} \longrightarrow 0$$

sacamos para las sucesiones globales

$$0 \longrightarrow H^0(X, L \otimes \mathcal{I}_{p,X}) \longrightarrow H^0(X, L) \xrightarrow{(*)} H^0(L_{|p}) = \mathbb{K}$$

La construcción vale $\Leftrightarrow$ $(*) \neq 0$, pero $h^0(L_{|p}) = 1$, así que vale $\Leftrightarrow$ $(*)$ es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $h^0(X, L \otimes \mathcal{I}_{p,X}) \overset{(**)}{=} h^0(X, L) - 1$.
Si X es una curva entonces $\mathcal{I}_{p,X} = \mathcal{O}_X(-p)$ como divisor. Vamos a calcular $h^0(X, L(-p))$ y ver si vale $(**)$.
Si $\deg L(-p) > 2g - 2$ tenemos

$$\begin{aligned} h^0(X, L(-p)) &= \underbrace{\deg(L(-p))}_{\deg L - 1} + 1 - g \\ &= h^0(X, L) - 1 \end{aligned}$$

Corolario 57 *Si* $\deg L > 2g - 1$ *entonces* φ_L *es un morfismo.*

¿Como traduzco φ_L inyectiva?
Por supuesto φ_L inyectiva $\Leftrightarrow$ $\forall\, p, q \in X$ vale $\varphi_L(p) \neq \varphi_L(q)$. Observamos que esto es equivalente al hecho que exista un hiperplano que pasa por $\varphi_L(p)$ y no por $\varphi_L(q)$ $\Leftrightarrow$ existe $s \in H^0(X, L)$ tal que $s(p) = 0$ pero $s(q) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $s \in H^0(X, L(-p))$.
Para cada $p \in X$ ocurre que para cada $q \in X$ exista $s \in H^0(X, L(-p))$ tal que $s(q) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $L(-p)$ generado por sus secciones.
Remark. Si $\deg L(-p) > 2g - 1 \Leftrightarrow \deg L > 2g \implies L(-p)$ esta generado por sus secciones.
Cuidado, hemos hecho trampa porque para la inyectividad nos hace falta pedir $\forall\, q \in X$ con $q \neq p$. Pero el caso $q = p$ nos viene bien para que sea una inmersión, así que cogemos ambos casos.
Ejemplo. Cogemos

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ (t_0 : t_1) & \longmapsto & (t_0^3 : t_0 t_1^2 : t_1^3) \end{array}$$

cuya imagen en $\mathbb{P}^2$ está dada por $V(x_1^3 - x_0 x_2^2)$, curva cuspidal. Observamos que $(1 : 0) \mapsto (1 : 0 : 0)$ que es un punto singular. Hemos cogido una morfismo inyectivo que pero no es una inmersión.

Proposición 58 *El morfismo φ_L es una inmersión cerrada si y solo si $\forall\, Z \subset X$ esquema de longitud 2 ($h^0(\mathcal{O}_Z) = 2$), cogiendo la sucesión*

$$0 \longrightarrow L \otimes \mathcal{I}_Z \longrightarrow L \longrightarrow L_{|Z} \longrightarrow 0$$

y las secciones globales

$$0 \longrightarrow H^0(X, L \otimes \mathcal{I}_Z) \longrightarrow H^0(X, L) \xrightarrow{\ *\ } H^0(L_{|Z}) \simeq \mathbb{K}^2$$

la aplicación $(*)$ es sobreyectiva.

Corolario 59 *Si $\deg L > 2g$ entonces φ_L es una inmersión cerrada (por definición si y solo si L es muy amplio).*

Corolario 60 *Si X es una curva, entonces L es amplio si y solo si $\deg L > 0$.*

De manera obvia $h^1(X, L) = h^1(X, \omega_X \otimes (L \otimes \omega_X^{-1}))$ y por la dualidad de Serre $h^1(X, L) = h^0(X, \omega_X \otimes L^{-1})$ que hemos visto ser igual a cero si $\deg L > 2g - 2 = \deg \omega_X$. Todo esto nos dice que

$$\deg(L \otimes \omega_X^{-1}) > 0 \iff L \times \omega_X^{-1} \text{ es amplio.}$$

La cosa es cierta en general

Teorema 61 (anulación de Kodaira) *Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo tal que char $\mathbb{K} = 0$ y X es un esquema con todas las buenas propiedades sobre $\mathbb{K}$. Entonces si L es amplio vale*

$$H^i(X, \omega_X \otimes L) = 0 \quad \forall\, i > 0$$

de manera equivalente

$$H^j(X, L^{-1}) = 0 \quad \forall j < \dim X.$$

¿Cuándo φ_{K_X} (del canónico) es una inmersión cerrada?
Sabemos que $\deg K_X = 2g - 2$. Tenemos tres casos distintos

- Si $g = 0$ entonces $h^0(X, nK_X) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. K_X no es amplio

- Si $g = 1$ tengo $h^0(X, \omega_X) = 1$ así que tengo una sección que no se anula, tiene que ser constante $\Rightarrow$ $\omega_X = \mathcal{O}_X$ y $h^0(X, nK_X) = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Tenemos $\varphi_{K_X} : X \longrightarrow \mathbb{P}^0$ aplicación constante.

- Si $g \geq 2$ tengo $\deg 2K_X = 4g - 4 > 2g \Leftrightarrow 2g > 4 \Leftrightarrow g > 2$. K_X es amplio.

¿Para cada $p, q \in X$ vale $h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - p - q)) = h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X)) - 2 = g - 2$? Tenemos por Riemann-Roch

$$h^0(\mathcal{O}_X(p+q)) - h^0(\mathcal{O}_X(K_X - p - q)) = 2 + 1 - g$$

así que

$$h^0(\mathcal{O}_X(K_X - p - q)) = \underbrace{h^0(\mathcal{O}_X(p+q))}_{(*)} + g - 3,$$

si $(*) = 1$ es perfecto.

Definición 62 *X, con $g \geq 2$, es una curva hiperelíptica si $\exists p, q \in X$ tal que $h^0(\mathcal{O}_X(p+q)) > 1$.*

Hemos hecho otra trampa, la verdadera definición es con $h^0(\mathcal{O}_X(p+q)) = 2$, pero la nuestra nos viene bien para enunciar el teorema siguiente sin muchos detalles.

Teorema 63 *Si X no es hiperelíptica entonces K_X es muy amplio.*

Definición 64 *Si X es un esquema y ω_X el haz canónico y cogemos*

$$\varphi_{\omega_X^n} : X - - > \mathbb{P}^N.$$

Se llama DIMENSIÓN DE KODAIRA de $X := \mathcal{K}(X)$ a

$$\mathcal{K}(X) = \max_{n \in \mathbb{N}} \{\dim(\varphi_{\omega_X^n}(X))\}.$$

Si $h^0(\omega_X^n) = 0$ para cada n, entonces $\mathcal{K}(X) = -\infty$.
Si $\dim X = \mathcal{K}(X)$ se dice que X es de tipo general.

Índice general