Revista Internacional d'Humanitats 49 mai-ago 2020
CEMOrOc-Feusp / Univ. Autònoma de Barcelona

Entre Llull y Ockham, el razonamiento[1]

Enric Trillas[2]

- *De tenerlo todo claro desde el principio, probablemente ni haría falta escribir el libro.* Enrique Vila-Matas.

- *De saber cómo sería el cuadro, no lo pintaría.* Pablo Picasso.

1. INTRODUCCIÓN

De no limitarse a lo que Ramon Llull (1232-1316) y Guillermo de Ockham (1285-1347) escribieron sino atendiendo a su fondo, cabe observar una notable preocupación de ambos por el razonamiento y, concretamente, por el deductivo.

1.1. Cada uno de ellos legó un pensamiento original y muy personal influido, naturalmente, por filósofos anteriores tanto griegos, como árabes, como cristianos, a los cuales habían estudiado [2]. Además, si el segundo era miembro de la Orden de San Francisco, el primero, sobre cuya pertenencia a la Tercera Orden franciscana hay opiniones contrarias, sin duda fue muy próximo al espíritu de esa Orden; no sólo su inmediato entierro en el convento franciscano de Palma de Mallorca parece acreditarlo, sino que hay evidencias de su cercanía al pensamiento religioso franciscano. Ambos siguieron las enseñanzas espirituales de San Francisco y, en particular, vivieron de forma austera.

Estuvieron, además, interesados en la ciencia de su tiempo; un tiempo en el que, aun no siendo el actual, ambos escribieron algunas cosas que más parecen anticipaciones que antigüedades. Es por ello que merecen ser repensados.

1.2. Este artículo no intenta sino reconsiderar los pensamientos de Llull y Ockham en la perspectiva de lo que el autor ha escrito [4,5,10] sobre el pensamiento y el razonamiento, y buscando entre ambos un común denominador. No pretende, en realidad, sino conjeturar intentando aproximarse a una parte de la tendencia del pensamiento menos visible, más profundo, de ambos y desde un punto de vista muy general que, en su opinión, emerge de los escritos que se acaban de citar.

Cuanto seguirá y en modo alguno, es un estudio 'técnico' de lo que escribieron Llull y Ockham; no se trata sino de exponer unas conjeturas que no surgen

---

[1] Con agradecimiento al profesor Pere Villalba (Universitat Autònoma de Barcelona) y a los profesores Alejandro Sobrino y Martín Pereira (Universidade de Santiago de Compostela), por sus previos y valiosos comentarios críticos a este artículo.

[2]. Enric Trillas (Barcelona, 1940), fue catedrático de las universidades politécnicas de Cataluña y de Madrid, investigador del 'European Centre for Soft Computing' y profesor emérito honorífico de la Universidad de Oviedo. En posesión de diversos premios y condecoraciones, tanto nacionales como extranjeras, es Doctor en Ciencias por la Universidad de Barcelona, Doctor Honoris Causa por las universidades Pública de Navarra y Santiago de Compostela, y Profesor Visitante Distinguido de la Universidad Nacional de Córdoba (Argentina). Ya jubilado, es miembro de la Accademia Nazionale delle Scienze, Lettere e Arti de Palermo.

de un análisis erudito y directo de sus respectivas obras, sino de una gran curiosidad por las mismas y de reflexiones tras el estudio de lo escrito sobre ellas por algunos especialistas.

1.3. El pensamiento, una de las capacidades del cerebro, se manifiesta en cada persona a través de, por lo menos, dos formas; la libre, expresada frecuentemente mediante imágenes más bien borrosas y archivadas en la memoria del sujeto, así como la dirigida a algún objetivo, que se expresa por medio del lenguaje y que es la forma de razonamiento ordinario o de sentido común.

A continuación se presenta parte de un modelo matemático basado en las referencias [4, 5, 10] antes citadas y considerando las conjeturas llamadas especulaciones, que se encuentran en la frontera entre pensamiento y razonamiento deductivo. Son unas conjeturas no siempre deductivas que, no tenidas en cuenta usualmente, fueron introducidas por el autor. Cuanto se expone permitirá, además, explicar formalmente algunos aspectos que cabe encontrar en las obras de Llull y Ockham y que, eventualmente, pueden permitir especular sobre su pensamiento menos evidente.

2. NOTÍCIA SOBRE EL RAZONAMIENTO DE SENTIDO COMÚN

El razonamiento o inferencia, parte de información resumida en un enunciado o premisa p y pretende encontrar otro enunciado o conclusión q tal que quepa afirmar que éste se sigue de p. Ello se simboliza por $p < q$ y la relación binaria $<$ se llama la relación de inferencia. Que q se sigue de p se expresa a través del enunciado condicional ‘Si p, entonces q’, un enunciado que si, en el lenguaje, no se entiende siempre de la misma manera, nunca se acepta, sin embargo y como premisa p a un enunciado auto-contradictorio, es decir, tal que ‘Si p, entonces no-p’, en símbolos $p < p'$, con p' representando a no-p. En general, q es contradictorio con p, lo contradice o refuta, si es $p < q'$.

2.1. A la relación primitiva $<$ sólo se le supone la propiedad reflexiva, $p < p$, para todo enunciado p y la cual no es, obviamente, simétrica: $p < q$ no siempre coexiste con $q < p$. Cuando es $p < q$ y $q < p$, se dice que p y q son equivalentes desde el punto de vista de la inferencia y se escribe $p \sim q$; una relación, la $\sim$, que es reflexiva y simétrica. Cuando no es $p < q$ ni tampoco es $q < p$, ambos enunciados son no comparables por inferencia, se llaman ortogonales y se simboliza por $p \lozenge q$. En general y salvo la reflexiva, las propiedades de $<$ son ‘locales’, valen para un elemento o un conjunto de ellos pero no y necesariamente para todos [4,5,10].

2.2. Si la relación $<$ es transitiva para la terna de enunciados (p, q, r), es decir, $[p < q \;\&\; q < r \Rightarrow p < r]$, entonces y como es fácil probar, también es $[p \sim q \;\&\; q \sim r \Rightarrow p \sim r]$. Es decir, una condición suficiente para que la relación $\sim$ sea de equivalencia, es que $<$ sea transitiva (localmente). En tal caso, el conjunto de los enunciados considerados se clasifica perfectamente en clases de equivalencia llamadas ‘proposiciones’; no obstante, el lenguaje ordinario se expresa generalmente mediante enunciados y no mediante proposiciones.

Por lo que respecta a la negación, es de dos tipos básicos: *Débil* en p, si $p < (p')'$; *intuicionista* en p, si $(p')' < p$. De ser a la vez débil e intuicionista en p, $p \sim (p')'$, la negación es *fuerte* en p; de no ser ni débil ni intuicionista en p, $p \lozenge (p')'$, es *salvaje* en p. De la negación sólo se supone que verifica la ley de reversión $[p < q \Rightarrow q' < p']$, una ley que, como la reflexiva, se supone universal, válida para todo par p, q tal que $p < q$.

Si p no es auto-contradictorio, p</p’, y q verifica p </q’, se dice que q es una *conjetura* de p; simplemente, no-q no se infiere de p. Nótese que los enunciados p que son aceptables como premisa de un razonamiento son aquellos que se infieren y conjeturan de sí mismos (p < p, p </p’).

Con ello, si < es localmente transitiva para la terna (p, q’, p’), entonces es [p < q => p </q’]. En efecto, siendo p < q también es q’ < p’, con lo cual de ser p < q’, seguiría el absurdo p < p’; por tanto, debe ser p </q’. Si la relación < es transitiva e independientemente del carácter de la negación, conjeturar es más amplio, más general, que inferir; la inferencia es un caso particular de conjeturar. Dicho de otra manera, en tales condiciones conjeturar es más general que inferir. Nótese que en ese caso, siendo p < p, automáticamente es p </p’.

2.3. Cuando dado p se busca q tal que p < q, se trata de una inferencia hacia adelante o *deducción*, diciéndose que la conclusión q es una *consecuencia* de p; si se busca h tal que h < p, se trata de una inferencia hacia atrás o *abducción*, diciéndose que h es una *hipótesis* o explicación de p. En todo caso, la premisa de una deducción es una hipótesis de la conclusión y la hipótesis de una abducción es una premisa de la premisa inicial.

Bajo transitividad, una cadena de inferencias como p < r, r < s, s < q, implica p < q y, por ello, se escribe p < r < s < q. Usualmente, las consecuencias q se deducen de p por medio de cadenas de inferencia hacia adelante como la anterior y parando cuando q se considera significativa para el problema en cuestión. Análogamente, una cadena hacia atrás como r < p, s < r, h < s, implica h < p y se escribe p > r > s > h. Usualmente, las hipótesis h se abducen de p por medio de cadenas de inferencia hacia atrás como la anterior; análogamente, se para cuando h se considera significativa.

2.4. Tradicionalmente sólo se considera la deducción y la abducción, olvidándose que dado p existen enunciados e tales que p ◊ e, ortogonales a p; tales enunciados se llaman *especulaciones* desde p. Si no puede ser p < e, ni e < p, puede no obstante ser p < e’ o e’ ◊ p, es decir, ser e una conjetura de p (p </ e’). Por tanto, las especulaciones son, a su vez, de dos tipos: Las e ◊ p tales que e’ < p, y las e ◊ p tales que e’ ◊ p. Las primeras son aquellos enunciados ortogonales a p cuya negación es una hipótesis de p y se llaman especulaciones *débiles*. Las segundas y sus negaciones, no se infieren ni adelante, ni atrás de p; se llaman especulaciones *fuertes* o deductivamente *salvajes*.

Por lo que respecta a las especulaciones débiles e, salvo que la negación sea salvaje en e se obtienen por abducción, negación y deducción. En efecto, e’ < p indica que e’ se alcanza desde p hacia atrás; alcanzada e’, basta negarla, (e’)’ = e’’, para alcanzar e bien hacía atrás si la negación es débil en e, e < (e’)’, o bien hacia adelante si la negación es intuicionista en e, (e’)’ < e. De ser la negación fuerte en e, (e’)’ ~ e, la especulación débil se alcanza con sólo negar e’. Por lo tanto y salvo si la negación es salvaje, las especulaciones débiles se alcanzan, en general, mediante pasos de inferencia hacia atrás y/o hacia adelante.

¿Cómo alcanzar las especulaciones fuertes? Al ser p ◊ e hay que buscar primero a todos esos e por medio de caminos mixtos adelante y atrás; hecho esto, hay que seleccionar aquellos e tales que e’ ◊ p. Por ejemplo y en un álgebra de Boole finita con cinco átomos a, b, c, d, e, y con p = a + b, el elemento q = b + d es ortogonal a p; además, al ser q’ = a + c + d + e, también es q’ ortogonal a p. Por tanto, q es una especulación fuerte de p y a la cual se puede llegar por el camino de inferencia mixto: b < p, b < q, es decir, p > b < q.

Naturalmente, que tal vía para encontrar especulaciones sea siempre posible depende de cuán rígida sea la estructura del conjunto de enunciados; el álgebra de Boole atómica es la estructura reticular más rígida posible, pero suponerla en todo el lenguaje y donde no cabe asegurar que la conjunción sea ni conmutativa, ni asociativa, etc., no es posible. Sólo cabe suponerla cuando los enunciados son precisos y se dispone de cuanta información sea necesaria; es decir, en la pequeñísima parte del razonamiento conocida como el ‘cálculo proposicional’ clásico. Sin embargo, en esos casos cabría intentar la construcción de algoritmos mediante los cuales y salvo problemas de explosión combinatoria, quepa deducir adelante y atrás para encontrar todas las especulaciones; es decir, ‘resolver’ deductivamente la *inducción*, la búsqueda de especulaciones.

2.5. Por lo que respecta al razonamiento ordinario o de sentido común, aquel con el cual las personas toman las decisiones de su vida diaria, pocas leyes pueden suponérsele. De hecho, sólo las cuatro siguientes pueden aceptarse [4,5, 10] y que, no locales sino universales, ligan a la relación < con la conjunción, la disyunción y la negación:

1) Para todo p, es $p < p$, y si p es la premisa de un razonamiento, también es p </ p’; 2) Si $p < q$, entonces $q' < p'$; 3) $p < p + q$, $q < p + q$; 4) $p \cdot q < p$, $p \cdot q < q$.

Son leyes que bastan para definir qué son una conjetura y una refutación; para ver al razonamiento ordinario como conjeturar y refutar. Debe observarse que no se suponen propiedades típicas como son las conmutativas o asociativas de la conjunción y la disyunción, ni las distributivas, ni las de dualidad, ni mucho menos la del reparto perfecto ($p \sim p \cdot q + p \cdot q'$), ni el tipo de negación, etc. Esas son propiedades que no pueden asumirse siempre; por ejemplo, ‘entró y lloró’ debe distinguirse de ‘lloró y entró’. Son leyes que muestran cuán excesiva es la estructura de álgebra de Boole y, en general, las estructuras reticulares para el razonamiento ordinario.

Ni siquiera cabe suponer que la relación < sea siempre transitiva; de serlo, entonces la inferencia ordinaria, tanto hacia adelante, como hacia atrás, es la más cercana a la ‘formal’ deducción matemática y, en particular, tanto conjeturar es más general que inferir, como no pueden existir consecuencias contradictorias de una misma premisa, etc.

A las cuatro leyes anteriores, en cada ámbito de razonamiento y de ser necesario, se les pueden agregar otras como es la conmutatividad de la conjunción; muestran un marco muy abierto de cara a la posible modelación matemática del razonamiento de sentido común. No permiten probar, naturalmente, que una premisa no pueda contar con hipótesis, refutaciones o especulaciones contradictorias; algo que no es raro en la experiencia común. Por otra parte, las especulaciones y mayormente las fuertes, son las responsables del fenómeno de la creatividad [5].

Los procesos de razonamiento en los cuales se buscan hipótesis, muchas veces por vía especulativa y luego se construye mediante deducción una teoría, constituyen el llamado razonamiento hipotético-deductivo, que es típico de la ciencia. Una vía para hallar hipótesis y que cualquier investigador puede reconocer como habitual, es la siguiente: Siendo e una especulación desde p, entonces y al ser $e \cdot p < p$, sí $e \cdot p$ no es auto-contradictoria, es una hipótesis para p.

2.6. La analogía es un precioso y poderoso recurso que, basado en la memoria, ayuda a razonar gracias a lo razonado anteriormente y, frecuentemente, en otros contextos. Si una vez se probó $p < q$ y se está frente a una premisa p* que, por alguna razón se considera semejante o análoga a p, entonces se piensa en conclusiones q* semejantes o análogas a q. De hecho, la regla llamada del ‘Modus Ponens,

$$[p \cdot (p < q) < q],$$

por ejemplo, puede extenderse como un caso particular de analogía: Si p* es análogo a p y es p < q, existe q* análogo a q, tal que

[p* · (p < q) < q*], y de manera que si es p* ~ p, también sea q* ~ q.

Un ejemplo típico lo facilita el siguiente conocimiento común: [El tomate es muy rojo & (Si el tomate es rojo, entonces está maduro):: El tomate está muy maduro].

La analogía, sin embargo, no permite llegar más que a conjeturas y refutaciones; es una ayuda para encontrarlas, pero no puede facilitar otro tipo de conclusiones. Para ilustrarlo, consideremos que a cada enunciado p se le asocia uno análogo p* a través de una función de analogía A: p* = A (p). En cada p, sólo puede suceder que la 'función negada' [A' (p) = A (p)'], verifique bien p < A (p)', o bien p </ A (p)'; es decir, que p* = A (p) sea una refutación o una conjetura de p.

La analogía puede ser, no obstante, muy peligrosa [5]; así y, por ejemplo, en la regla aproximada anterior, sin controlar el grado en que p* es semejante a p y, luego, aquel con el que q* lo es a q, puede darse el caso de que q* sea tan lejano de q que no indique nada. Ese es el gran peligro de razonar por medio de analogías o metáforas; de forma jocosa, los tomates pueden ser incomibles.

2.7. Ramon Lull y Guillermo de Ockham merecen ser reconsiderados conjuntamente ya que adelantaron aspectos del razonamiento que, luego, han sido de gran interés. Aspectos que, no coincidentes son, hasta cierto punto, complementarios.

3. LLULL Y EL RAZONAMIENTO

3.1. En Ramon Llull y respecto de cuanto se acaba de presentar sobre el razonamiento aparecen y son notables, en primer lugar, la analogía y la especulación; es gracias a ellas que Llull consigue plantear los atributos, o 'Dignidades' de Dios como los llama. Una vez planteados y discutidos, Llull emprende la tarea de deducir de ellos como premisas cuanto consigue obtener, a través del sistema algorítmico facilitado por su 'máquina' *Ars Magna* [12] que, posiblemente, diseñó influido por un instrumento llamado *zairja*, con un 'hardware' consistente en varios círculos concéntricos y móviles, que fue empleado por los astrónomos árabes. La máquina de Llull puede verse como un antecedente de las posteriores máquinas de cálculo aritmético.

La vía de Llull parece ser la siguiente: Supone una premisa p, especula desde ella hasta un enunciado e y, de p · e < p, obtiene la hipótesis p · e de p, de la cual y tomándola como premisa definitiva y nueva, deduce consecuencias c, p · e < c. Se trata de un razonamiento hipotético-deductivo cuya 'seguridad' depende, obviamente, de la seguridad de p, de la de e y del camino seguido para ello. De hecho, responde al 'camino mixto', atrás y adelante, p > p · e < c, que no permite considerar a c como una consecuencia, sino sólo como una especulación de p.

El proceso con su *Ars* es casi siempre de una notable complicación, a la que no es ajena la nomenclatura con letras que adoptó; letras que, además, no significan constantemente lo mismo y con las que pretendía lograr un 'alfabeto', generador de una 'gramática del pensamiento'. No puede sorprender, por ello, que *Ars* no fuese entendido por los profesores del Colegio de 'La Sorbonne' de París cuando, en primer lugar y allí por vez primera, la presentó públicamente en 1285; sin embargo, la segunda vez que la presentó en París, posiblemente en 1309 y ya más aclarado su funcionamiento, despertó un notable interés.

Tanta es la complicación, que no puede extrañar que repetidamente intentase mejorar el funcionamiento de un 'instrumento' que, realmente, ideó para 'responder' a preguntas con las respuestas por él pretendidas [2,6,7]. El empleo del *Ars*, cuando Llull lo encamina a convertir a los ‘herejes’ musulmanes y judíos, así como combatir el averroísmo (lo que pudo servir para incrementar el interés en ‘La Sorbonne’), es más propedéutico que de investigación; no obstante, Llull también intenta con él explicar algunos fenómenos físicos y sociales.

Por otra parte, su preocupación por la predicación, le hizo prestar atención a aspectos retóricos [14] y, por ejemplo, su libro *Rethorica Nova*, de 1301, es una muestra de ello.

Aunque llame a su ‘método’ *Ars Inveniendi* y, posiblemente, con el significado de ‘Arte Dialéctica’ y, por lo que respecta a su labor misionera, llega donde quería llegar; propiamente no inventa, ni descubre nada nuevo, llega a sus pre-establecidas creencias cristianas. Llull quiso ofrecer pruebas de las verdades religiosas tras lo que interpretó como una 'iluminación divina'; es para ello que requirió recursos retóricos y, justamente, en ese libro presenta ejemplos relativos a la predicación de su fe. Lo que Llull crea es una máquina para deducir desde una premisa hipotética a unas consecuencias y, eso sí, llega a unas creencias que, de aceptar aquellas premisas e hipótesis, prueba deductivamente. Lo que es realmente creativo en Llull, es el diseño de su ‘máquina’; una máquina que creía poder emplear para ‘descubrir’ lo desconocido.

De hecho, puede decirse que Llull empezó planteándose un ‘problema inverso’: Dadas las creencias (c) a las que quería llegar, especuló (e) qué atributos de Dios le permitirían llegar deductivamente a ellas y suponiendo previamente alguno de ellos como evidentes (p). Es un problema no muy lejanamente análogo al de encontrar qué moléculas constituyen un producto del cual, sabiendo algo del mismo, se desconoce su estructura química; es cómo el químico alemán August Kekulé (1829-1896) encontró la estructura molecular del benceno.

El estudio de los ‘problemas inversos’, generalmente muy difíciles y en buena parte de la mano de Mario Bunge [9] es, actualmente, importante en la filosofía y, posiblemente, Lull abordó un ejemplo de ellos.

Hasta cierto punto, Llull muestra la colusión entre un ‘modelo hipotético-deductivo’ y una ‘realidad’ sin posibilidad de contrastación empírica. Encuentra una vía de prueba formal deductiva, algorítmica, pero y como corresponde, con la validez de los resultados dependiente de la aceptación de unas premisas ($p \cdot e$) que, en realidad hipotéticas, tampoco son empíricamente controlables como lo son, por ejemplo, las componentes de un compuesto químico. Realmente, el trabajo de Llull con su *Ars* es de tipo tan ‘formal’ que incluso le permite una cierta revisión/reescritura de la silogística de Aristóteles [2, 6], algo, por otra parte, típico de la época.

3.2. Una de las características que distinguen a Llull de los filósofos de su tiempo, escolásticos, es que la influencia de filósofos árabes la recibió directamente al conocer el árabe; no se limitó a estudiar a los filósofos griegos, Aristóteles y sus comentaristas en primer lugar, como los escolásticos. Por ejemplo, fue influido por su misma traducción del libro ‘Compendium Logicae Algatzelis’ de Al-Ghazzali (‘Lògica del Gatzell’, en la versión en catalán) [14].

Aunque Llull se exprese y discuta cuanto concierne a su *Ars* en lenguaje ordinario, catalán o latín, su discurso no es, propiamente y sólo, de razonamiento de sentido común, ya que y si bien es semántico, en el mecanismo deductivo emplea propiedades sintácticas muchas de las cuales, afectando a las combinaciones finitas con las que opera, corresponden a un álgebra de Boole al tratarse de deducción soportada por la silogística aristotélica; de hecho, Llull intenta encontrar todos los términos medios que puedan relacionar cualesquiera sujeto y predicado para llegar a una conclusión y como una vía para abordar el problema inverso que se citó.

Llull se expresa sin simbolismo matemático alguno; el simbolismo matemático tardó mucho en emplearse sistemáticamente en la representación del razonamiento. De hecho no fue hasta que lo emplearon Augustus de Morgan (1806-1871) y George Boole (1815-1864) a mediados del siglo XIX y cuando en Inglaterra floreció el cálculo simbólico. Lo hicieron siguiendo unas leyes de cálculo simbólico luego conocidas como las del álgebra de Boole.

El de Llull es, sin embargo, un trabajo históricamente muy relevante ya que y, en primer lugar, influyó a Leibniz y, concretamente, a su 'Characteristica Universalis' en la cual y en lugar de letras como Llull, empleó números y no se limitó a preguntas teológicas; en segundo lugar, también le influyó para idear su máquina de cálculo aritmético. Además, parece que Llull avanzó, con siglos de anticipación, los modernos lenguajes computacionales [7].

En su época, la baja Edad Media, Llull es un autor sorprendentemente 'moderno'. Ha dejado doscientos sesenta y cinco libros y, en particular, dos 'relatos' escritos en catalán, *Blanquerna* (donde, como un avance de los 'métodos de elección', analiza cómo las monjas deben elegir sus abadesas) y *El llibre del gentil e dels tres savis* (de 'estética' árabe y fondo proselitista)*;* seguramente, es la primera vez que en el occidente un relato literario no se escribe directamente en latín.

3.3. En realidad, sus razonamientos con el *Ars Magna* pueden verse como una mezcla de arte combinatorio con razonamiento ordinario y booleano, usando además y lejos de Aristóteles, relaciones binarias y ternarias diferenciadas de los predicados unarios aristotélicos, lo cual puede considerarse otra importante y novedosa aportación de Llull. Sus premisas, obtenidas especulando por analogía son, realmente, hipótesis previas y, como se ha dicho, su razonamiento es hipotético-deductivo.

Que fuese el primero en ilustrar algún aspecto de la combinación de sus letras (de sus significados) por medio de diagramas de Venn, pone de manifiesto el álgebra de Boole subyacente; una estructura que, como se ha visto en la sección 2, es excesivamente rígida para representar el razonamiento de sentido común.

En conclusión, Llull no intenta estudiar el razonamiento en sí mismo, no analiza la conjetura y la refutación y mucho menos la especulación; aporta una original vía mecánica para deducir, una vía que inspiró posteriormente a ver la deducción como un 'cálculo'. No obstante, intentó varias veces estudiar el pensamiento en general, el intelecto humano.

En España, el interés por la obra de Llull aumentó a partir de cuando el famoso cardenal, franciscano, Francisco Jiménez de Cisneros (1436-1517) hizo republicar algunas de sus obras. Llull es el primer autor conocido que no deduce 'mentalmente' sino mecánicamente y, aunque no empleó su *Ars* para buscar conjeturas, ofreció una vía que llevó, más adelante y a Nicolás de Cusa (1401- 1464), tal vez el primer pensador moderno y en su libro *De Coniecturis,* a sugerir el uso de la máquina de Llull para obtenerlas. Se trata de una posibilidad que, para llegar a especulaciones, sigue abierta; tal vez es posible obtenerlas sistemáticamente mediante deducciones hacia adelante y abducciones hacia atrás como se dijo en el apartado 2.4.

4. OCKHAM Y EL RAZONAMIENTO

4.1. Tanto la producción como la actitud intelectual de Guillermo de Ockham (1285 – 1347) es muy distinta a la de Llull. Ockham fue, esencialmente, un filósofo escolástico medieval, incluso y a diferencia de Llull, podría decirse que fue un ‘universitario medieval’; posiblemente el último y con Tomás de Aquino los dos más relevantes [2,6]. Basta una mirada a, por ejemplo, su libro *Summa Logicae* [3], para observar con qué profundidad y, casi puede decirse alambicamiento verbal, rehace el *Organon* de Aristóteles con nuevas matizaciones y teniendo en cuenta a quienes previamente ya lo habían estudiado.

Aún pudiéndose calificar como un típico escolar del Oxford de entonces, nunca llegó a tener un título de doctor y enseñó en tal universidad bajo el de ‘Venerable Principiante’, *Venerabilis Inceptor,* es decir, como enseñante de post-grado sin cátedra*;* también enseñó en París [1, 2, 6, 7], donde el famoso Jean Buridan (1300-1358) fue uno de sus estudiantes y con quien luego mantuvo discrepancias filosóficas.

Como Llull y, de hecho, como todos los filósofos medievales, su obra, sin simbolismo alguno, está íntimamente relacionada con la Teología; podría decirse que ésta, como también en Llull, la motiva. En la disputa entre la Orden Franciscana y el Papa de Aviñón, Juan XXII, al respecto de la pobreza evangélica, las cosas llegaron a tal situación que el Papa lo excomulgó por haber huido de la Inquisición de Aviñón, refugiándose en Múnich bajo la protección del emperador del Sacro Imperio, Ludwig VI de Baviera. Por su parte Ockham declaró, en sus escritos, hereje a Juan XXII.

Los escritos políticos de Ockham, a causa del enfrentamiento entre el poder de los papas y el de los reyes, contribuyeron a que posteriormente fuese imponiéndose el llamado ‘pensamiento laico’ básico en la época moderna. Ockham influyó, incluso, a Martín Lutero (1483- 1546) por medio del pensamiento de su seguidor Gabriel Biel (1425-1495).

Aparte de su posición filosófica más o menos cercana al ‘nominalismo’ [1, 2, 6], Ockham negaba la existencia de entidades abstractas, que consideraba de tipo mental, sólo aceptando para razonar y aparte de Dios como necesario, la de entidades particulares. Por lo que se refiere al razonamiento, dos son los tópicos que más importan aquí. El primero de ellos es la regla metodológica llamada ‘Navaja de Ockham’ y el segundo su aceptación de un tercer tipo de enunciados, además de aquellos calificables de verdaderos o falsos.

4.2. En cuanto a la ‘Navaja’, también llamado ‘Principio de Parsimonia’, es un principio metodológico de economía intelectual que, realmente y como suele enunciarse, *Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem* (Los entes no deben multiplicarse sin necesidad), no aparece en ninguna obra conocida de Ockham, aunque escribió la muy cercana frase, *Es vano hacer con más lo que puede hacerse con menos;* es decir, que para probar algo no hay razón alguna para suponer entes hipotéticos innecesarios [1]. Ockham aplicó, por ejemplo, su navaja a algunos planteamientos de Tomás de Aquino [2].

Se trata de una idea que también se encuentra en filósofos anteriores a Ockham y que en las matemáticas se ha seguido al pié de la letra; por ejemplo y en el libro ‘Los Elementos’ de Euclides se afirma como un axioma, una hipótesis, que por un punto exterior a una recta sólo puede trazarse una paralela a la misma y, como es sabido, la eliminación de tal axioma, verlo como una hipótesis independiente, permitió uno de los grandes saltos de la geometría; pasar la navaja de Ockham a las suposiciones de Euclides, afeitarlas, fue fructífero al dar lugar al estudio de las geometrías no-euclidianas.

Por otra parte y de hecho, las cinco leyes que en el apartado 2.5 se han supuesto para el razonamiento de sentido común, significan pasarle la navaja, afeitar cuanto se hace en los usuales análisis lógicos y con la posibilidad, adicional, de agregar otras leyes para bien obtener algo significativo en un problema concreto y llegando, eventualmente, hasta un álgebra de Boole, o bien para analizar cómo se origina la creatividad [5].

Como hizo notar Leibniz, puede capturarse un número creciente de conceptos con uno reducido de hipótesis [11]. Es fácil probar, con lo expuesto en la sección 2, que la abducción es anti-monótona, es decir, si aumenta el número de premisas no lo hace el de hipótesis: Si, con más conocimiento p*, se pasa de la premisa p a una nueva premisa aumentada 'p y p*', $(p \cdot p^*)$, de ser h una hipótesis para ésta última premisa, $h < p \cdot p^*$, como siempre es $p \cdot p^* < p$, supuesto que < sea transitiva, resulta $h < p$. Al aumentar la información, al pasar de p a $p \cdot p^*$, sus hipótesis ya lo eran de p; su número no aumenta. Debe notarse que, sin embargo, la deducción es monótona; si crecen las premisas no decrecen sus consecuencias: $p < c$ y $p \cdot p^* < p$, llevan a $p \cdot p^* < c$. Lo que era una consecuencia lo sigue siendo tras aumentar las premisas.

Los procesos de investigación no sólo se hacen de manera 'estática' y sobre aspectos antes ya considerados, como en el caso de la geometría euclidiana. La investigación, especialmente la científica, evoluciona, la información no es fija sino que va apareciendo, es un flujo; las premisas varían. Por ello, el investigador creativo no busca sólo consecuencias, sino que especula sobre aquello que espera encontrar y que, entonces, deberá probar en la forma que corresponda a la disciplina en cuestión, deductivamente si ésta es de tipo matemático.

Fácilmente se da el caso, a lo largo de un proceso de investigación, que el investigador se dé cuenta que unas pocas hipótesis, incluso supuestas limitando su número de acuerdo con la Navaja de Ockham, no bastan para obtener lo que especula que puede o debe obtener y, para ello, debe añadir alguna hipótesis más. Es el caso, por ejemplo y en el anterior apartado 2.2, de la transitividad local de la relación de inferencia < que, de requerirse que las consecuencias sean necesariamente conjeturas, basta añadirla a las cuatro leyes de 2.5.

Por todo ello y en el siglo XX, el matemático Karl Menger (1902 -1985) introdujo una adenda a la 'Navaja' para que el número de hipótesis no se reduzca hasta un nivel de inoperancia o no adecuación y que, ya como 'Navaja de Ockham-Menger' [8, 5], puede enunciarse como: *No emplear más hipótesis que las suficientes para lo que se busque, ni menos de las necesarias para llegar a resultados significativos,* y que cabe ver como una regla metodológica 'equilibrada', no cerrando la puerta a la creatividad. Básicamente, cuanto Menger tiene en cuenta en la referencia [8] es la importancia en las matemáticas de la nueva versión de la Navaja.

4.3. Ockham conocía muy bien la obra de Aristóteles y no pasó por alto su consideración de los 'contingentes de futuro', enunciados a los cuales y en un determinado momento, no cabe atribuirles ni el calificativo 'verdadero' ni el 'falso' y como es, por ejemplo, 'la semana que viene caerá la Bolsa'. Se trata de enunciados que, abundantes en el lenguaje, 'afean el bello edificio' de la lógica bivalente clásica y Ockham fue de los primeros en atribuir a esos enunciados un tercer valor de verdad, algo que hasta comienzos del siglo XX no tuvo consecuencias apreciables; fue cuando se introdujeran las llamadas lógicas polivalentes o múltiplemente valuadas, las cuales aportaron nuevos conocimientos de tipo lógico. Más adelante y con la teoría de los conjuntos borrosos [4] que, considerando más de dos grados de pertenencia a los mismos, permite representar matemáticamente las abundantísimas palabras imprecisas del lenguaje ordinario y atendiendo más a la posibilidad que a la verdad o la probabilidad de los enunciados, se obtuvieron importantes aplicaciones tecnológicas[16].

4.4. De hecho, al mantener la lógica prudentemente separada de la Metafísica y de la Teología [1], Ockham contribuyó de manera notable a que se prestase atención a un tipo de razonamiento, el hipotético-deductivo, que sería uno de los gérmenes del posterior desarrollo de la ciencia experimental al dirigirse el pensamiento más hacia lo físico que a lo metafísico. Recuérdese que Galileo Galilei vivió entre 1564 y 1642 y que, entremedio, Giordano Bruno lo hizo entre 1548 y 1600.

En palabras de Bertrand Russell [1], si Tomás de Aquino fue primordialmente un teólogo, por lo que se refiere a la lógica Ochkam fue un filósofo secular; después de él ya no aparecen grandes filósofos escolásticos, el pensamiento occidental va decantándose hacia lo científico experimental.

5. CONCLUSIONES.

Tanto Llull como Ockham estuvieron imbuidos de espiritualidad franciscana; por su parte y fuese o no terciario franciscano, Llull puede considerarse un místico. Ambos vivieron austeramente y su aportación a, respectivamente, la mecanización de la deducción y la metodología del razonamiento deductivo, tanto con intención de llegar como de propagar las creencias cristianas por medio de ese tipo de razonamiento podrían, tal vez, mostrar una corriente dentro del pensamiento franciscano que, más relacionado con el razonamiento que con el pensamiento general y en lo que conoce el autor, no ha sido explorada. Sí y por su parte, le cabe especular sobre su existencia carece, lamentablemente y sin embargo, de capacidad para buscarla efectivamente, enlazándola con las enseñanzas de San Francisco y rastreando a filósofos franciscanos que hubiesen seguido tal corriente para poderla ver, realmente, como una corriente dentro del pensamiento franciscano. Llull intentaba que la Cristiandad no se limitase a las ‘conquistas militares’ sino a ‘convencer intelectualmente’; emplear, en lugar o más allá de la espada, la razón, una idea bien franciscana. Ockham, por su parte, defendió frente al papado la idea franciscana de la pobreza evangélica.

5.1. Si, por ejemplo, corresponde a Llull el primer manejo de los grafos y su representación por matrices [7], así como la deducción hacia atrás o abducción para intentar refutar una hipótesis, Ockham es quien por vez primera formuló las leyes de dualidad, luego llamadas de De Morgan: $(p + q)' \sim p' \cdot q'$ y $(p \cdot q)' \sim p' + q'$. Unas leyes que no son universalmente válidas en el razonamiento de sentido común, donde no siempre es posible, dadas la conjunción ($\cdot$) y la negación (‘), supuesta, además, fuerte, obtener la disyunción (+) por medio de la fórmula $p + q \sim (p' \cdot q')'$. No lo hizo con fórmulas como las anteriores que hubiesen requerido un simbolismo desconocido en su época, sino que las describió con palabras [2, 6]; hubo que esperar, como se dijo, a que pasase el primer tercio del siglo XIX para que los ya citados De Morgan y especialmente Boole, empezasen a matematizar la lógica y tras que, en el siglo anterior, Immanuel Kant (1724- 1804) hubiese afirmado que la lógica era ya una ciencia muerta, parada en Aristóteles.

Con respecto a la refutación de hipótesis por abducción citada al comienzo del párrafo, un ejemplo sencillo y de acuerdo con lo explicado en la sección 2, es el siguiente: Supuesto que h fuese una hipótesis para p, una vía de refutación por vía abductiva de ello, puede consistir en probar que h’ (no-h) es, realmente, una hipótesis. Entonces, de $h \cdot h' < h$ sigue $h' < (h \cdot h')'$, con lo cual siendo también $h \cdot h' < h'$ y supuesto que $<$ es transitiva localmente, se obtiene $h \cdot h' < (h \cdot h')'$; es decir que $h \cdot h'$ es auto-contradictorio. Además, siendo $h \cdot h' < h$, si fuese $h < p$, implicaría (por la transitividad) $h \cdot h' < p$, es decir, que $h \cdot h'$ sería otra hipótesis de p (auto-contradictoria), lo cual es absurdo. En conclusión, no cabe aceptar que h sea una hipótesis para p. Análogamente puede procederse de encontrar otra hipótesis *h* que, distinta de h’ refute, no obstante, a h, $h < \mathit{h}'$.

5.2. Si Llull y Ockham fueron pobres en su vida personal, no lo fueron en la intelectual y, parodiando a Piere Bourdieu (1930-2002) [11], cabría contemplarlos ejemplificando que las revoluciones intelectuales 'no son cosa de los más pobres intelectualmente', sino 'de los más ricos'.

Que Ockham aspiraba a la simplicidad, claridad y seguridad del razonamiento, buscando la mayor limpieza expositiva posible, así como a apoyar la fe en la razón parece, tras lo expuesto, suficientemente evidente. Llull, por su parte y pese a las dificultades para manejar y entender su 'máquina', intentó, en forma sucesiva, hacer más claro y simple, más comprensible, más limpio, su funcionamiento [17] con el que también pretendió apoyar la fe en la razón y con la seguridad que ofrece una deducción mecánica; un funcionamiento que él mismo abrió a su aplicación a campos distintos del teológico y que tal vez pueda contener el inicio de lo que en la Inteligencia Artificial se denominan 'búsquedas heurísticas' [7] y, en particular, cómo lo hace con los términos medios de los silogismos.

5.3. Tal vez y conjuntamente a su empleo o impulso, respectivamente, del razonamiento hipotético-deductivo, son los intentos de mostrar simplicidad, claridad y seguridad con el razonamiento deductivo los tres trazos, intencionales pero realmente ocultos, el común denominador que une a Llull con Ockham y que, más adelante, influyó a otros pensadores. Unos intentos que, en particular, muestran una preocupación por la simplicidad. Una simplicidad que no es ingenua, sino que buscando la limpieza expositiva puede coadyuvar a la creatividad.

Llull y Ockham fueron pioneros, varios siglos antes, de las 'fuerzas de la luz' que empezaron a iluminar Europa desde el siglo XVII; al fin 'el menos ilegítimo de los poderes simbólicos' es 'el de la ciencia' [11].

5.4. Por otra parte, si Llull no tuvo éxito en sus intentos de convencer a las autoridades de la Iglesia en cuanto a una cruzada auspiciada por el rey de Aragón, tampoco Ockham los tuvo con los suyos para aclarar las relaciones entre el poder temporal y el de la Iglesia.

Hubo que esperar mucho tiempo para que sus ideas 'profundas' se materializasen; entremedio, sus obras llegaron a estar prohibidas por la Inquisición. Además y aunque por razones distintas, ambos intentaron cobijarse bajo el poder temporal de su tiempo; Llull y entre otros, bajo Jaume II de Mallorca [13] y Ockham bajo Ludwig VI de Baviera. Si bien su pensamiento nunca desapareció por completo ya que ambos tuvieron seguidores, fueron autores de entre los siglos XIII y XIV casi ignorados (por lo menos fuera de ámbitos teológicos) hasta que Llull, tras que su 'alfabeto del razonamiento' influyese a Descartes, es reconsiderado y rescatado por Gottfried Wilhelm Leibniz en el XVII, en tanto que Ockham es redescubierto por filósofos del XIX con, incluso, un gran pensador matemático del XX como Karl Menger ocupándose de sus ideas.

5.5. Los ingenieros españoles de la Computación vieron en Llull a su primer precursor; en España, es el patrón de la ingeniería informática; aceptado como Beato y aunque los intentos de canonizarlo datan del siglo XVI, el proceso de canonización por la Iglesia Católica está abierto desde 2003; por su parte, Ockham es conmemorado como santo por la Iglesia de Inglaterra.

REFERENCIAS.

[1] B. Russell, 2005, Historia de la Filosofía. Eds. RBA.

[2] J. Ferrater Mora, 1994, Diccionario de Filosofía (4 volúmenes). Ed. Ariel.

[3] G. de Ockham, 2012, Summa de Lógica (Edición bilingüe). Ed. Personal.

[4] E. Trillas, 2017, On the Logos. A Naïve View on Ordinary Reasoning and Fuzzy Logic. Springer,

[5] Trillas, 2018, El desafío de la creatividad. Eds. Universidade de Santiago de Compostela.

[6] Stanford Encyclopedia of Philosophy, On Line. University of Stanford.

[7] A. Fidora, C. Sierra (Eds), 2011, Ramon Llull: From the *Ars Magna* to Artificial Intelligence. IIIA-CSIC.

[8] K. Menger, 1961, A Counterpart of Occam's Razor in Pure and Applied Mathematics: Ontological Uses. Synthese, 13/4: 331-349.

[9] M.Bunge, 2006, Problemas directos e inversos. En http://grupobunge.worldpress.com.

[10] E. Trillas, en imprenta, El Pensamiento: Narrar, conjeturar y computar. Ed. Universidad de Granada.

[11] P. Bourdieu, 1982, Leçon sur la leçon. Les Editions de Minuit.

[12] A. Bonner, 2007, The Art and Logic of Ramon Llull. A User's Guide. Brill NV-Leiden.

[13] J.N. Hillgarth, 1971, Ramon Llull and Lullism in fourteenth-century France. Oxford University Press.

[14] Vid., E. Bonet, 2011, Comments on the Logic and Rhetoric in Ramon Llull. En [7]: 95-104.

[15] T. Sales, 2011, Llull as Computer Scientist, or *Why Llull Was One of Us.* En [7]: 25-37.

[16] E. Trillas, 2019, Los conjuntos borrosos y su transversalidad. Revista Internacional d'Humanitats, 50: 51-62.

[17] P. Villalba, 2019, *Ars Inveniendi*: Ramon Llull. Antonianum, XCIV: 267-312.

Recebido para publicação em 11-10-19; aceito em 25-10-19